1. Vorlesung

Notiztitel 15.10.2010

blackboard — bitte anmelden!

4 st Vorlesung — Mo 14-16, Mi 8-10 — HZ010

2 st Übung — anmelden!

Klausur — 07.03. — 120P

Miniklausur — 10.11., 20.12., 24.01. — 12 BP

Übungsaufgaben — 6BP

Ausgabe Übungszettel — Do im BB

Rückgabe — Fr bis 12 Uhr NA02

Globalübung — Mi 16-18 HZ030

10.11., 12.01, 19.01. — HNC10

Literatur: Blackboard

1. Zahlen und Vektoren
1.1 Mengen und Abbildungen

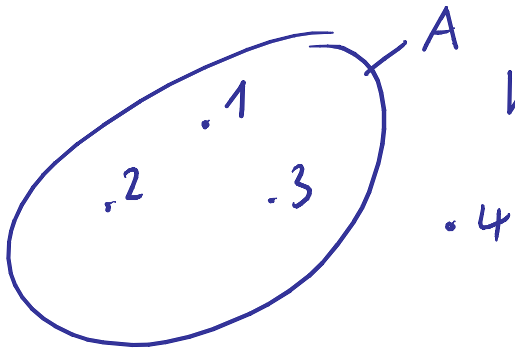
"Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten, ihren sogenannten Elementen, zu einem Ganzen."
(Cantor 1895)

$A = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$

$= \{x \mid x$ ist nat. Zahl $1 \leq x \leq 3\}$

$1 \in A$

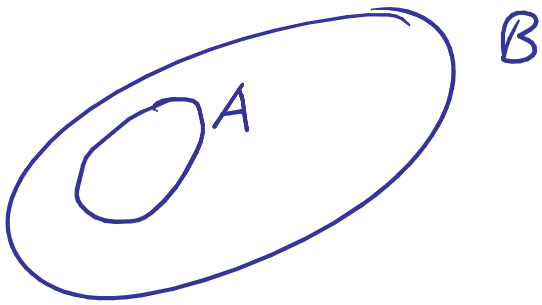
$4 \notin A$



Venn Diagramm

Teilmenge $A \subseteq B$

$\{2, 3\} \subseteq A$

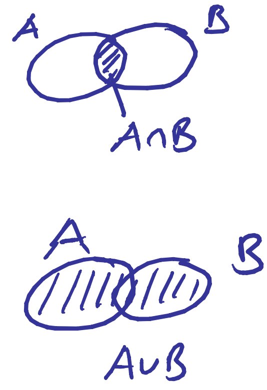


leere Menge $\{\} = \emptyset$

Mengenoperationen

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$	DURCHSCHNITT
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$	VEREINIGUNG

und/oder



„U" Topf

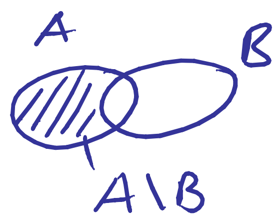
$A = \{1,2,3\}$

$B = \{x \mid x \text{ teilt } 6 \text{ und } x \neq 1\} = \{2,3,6\}$

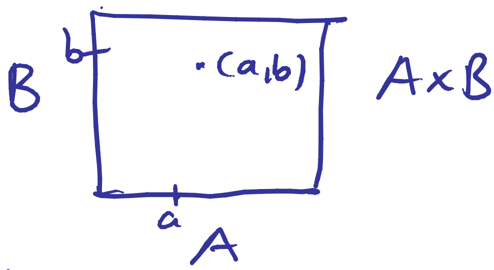
$A \cap B = \{2,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,6\}$

„Differenz"

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$	KOMPLEMENT
$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$	PRODUKT



$A \setminus B = \{1\}$



$A \times B = \{ (1,2), (1,3), (1,6),$
$(2,2), (2,3), (2,6)$
$(3,2), (3,3), (3,6) \}$

$(0,1) \neq (1,0)$

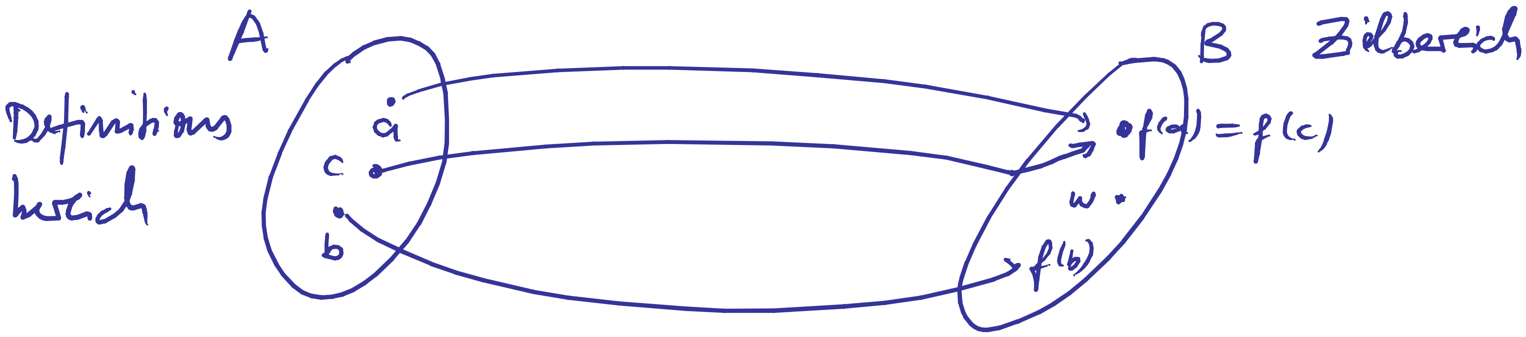
Abbildungen

Eine Abbildung $f : A \to B$

von einer Menge A in eine Menge B ist eine Vorschrift, die jedem Element a von A ein Element f(a) in B zuordnet.

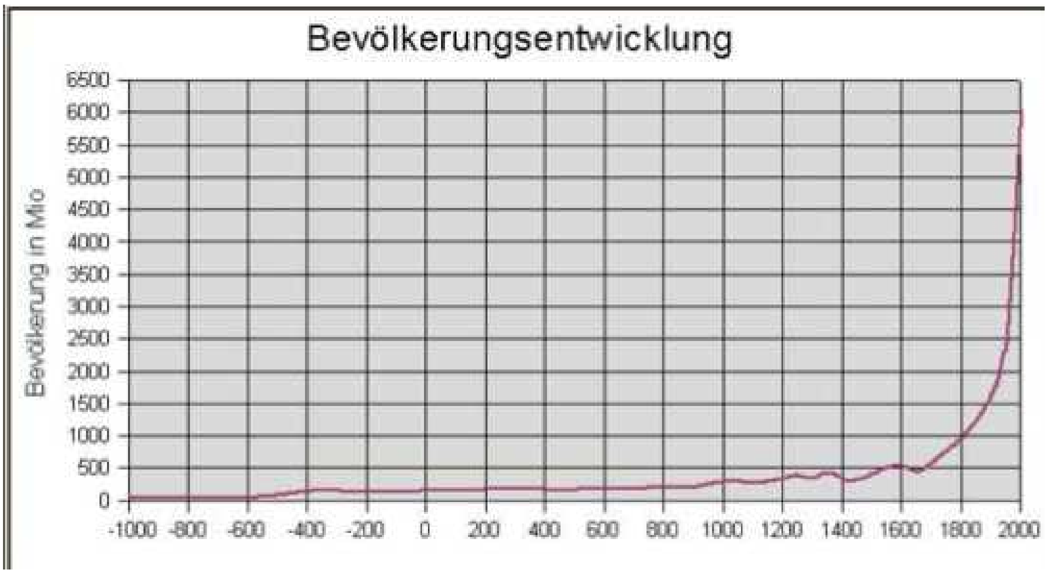
$$a \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow f(a)$$

Argument „Bild von a unter f"



Beispiele:

1)



Graph

Jahre

$B: \{x \mid -1000 \leq x \leq 2000\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$B(x)$ = Bevölkerungszahl

2) In einem Kreis gilt: $U=2\pi r$

$U: \{r \mid r>0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$U(r) = 2\pi r$

3)

Preise Brief/Postkarte

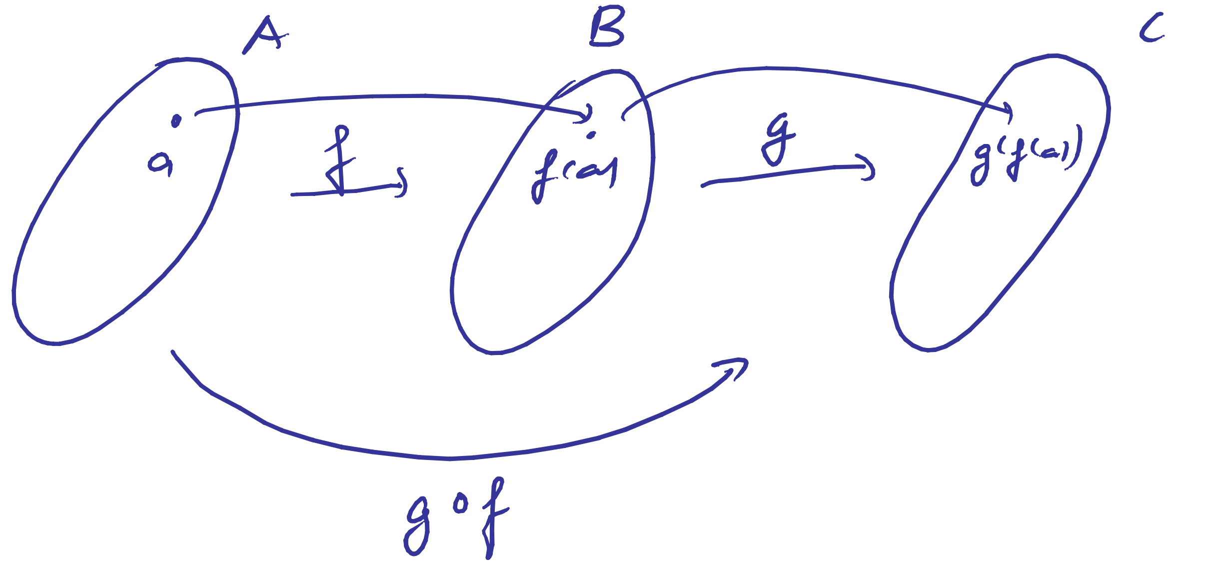
Art der Sendung	Maße	Gewicht	Porto
Postkarte	L: 140-235 mm* B: 90-125 mm	Flächengewicht 150-500 g/qm	0,45 EUR
Standardbrief	L: 140-235 mm* B: 90-125 mm H: bis 5 mm	bis 20 g	0,55 EUR
Kompaktbrief	L: 100-235 mm* B: 70-125 mm H: bis 10mm	bis 50 g	0,90 EUR
Großbrief	L: 100-353 mm B: 70-250 mm H: bis 20 mm	bis 500 g	1,45 EUR
Maxibrief	L: 100-353 mm B: 70-250 mm H: bis 50 mm	bis 1.000 g	2,20 EUR

$P: \{B \mid B \text{ Brief}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$B \longmapsto \text{Porto von } B$

eigentlich zusammengesetzte Funktion (siehe unten) $\{(L, B, H, G)\}$

Verknüpfung von Abbildungen



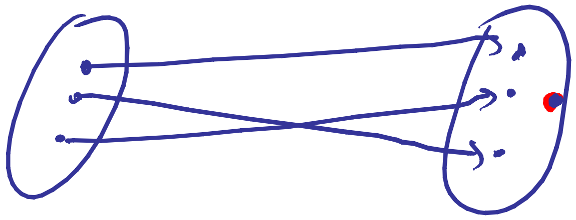
$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

<u>Beispiel</u>

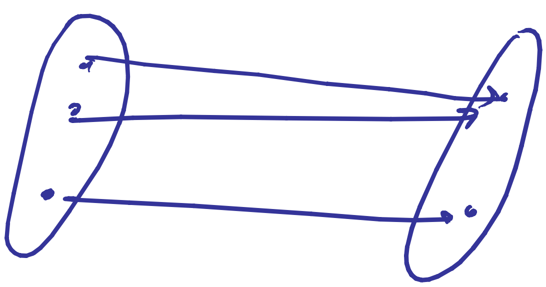
$$\left.\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} & g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 - 1 & x \mapsto \sqrt[3]{x} \end{array}\right\} \; g \circ f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 1}$$

<u>Eigenschaften von Abbildungen</u>.

$f: A \to B$ heißt injektiv, falls verschiedene Argumente auf verschiedene Bilder abgebildet werden



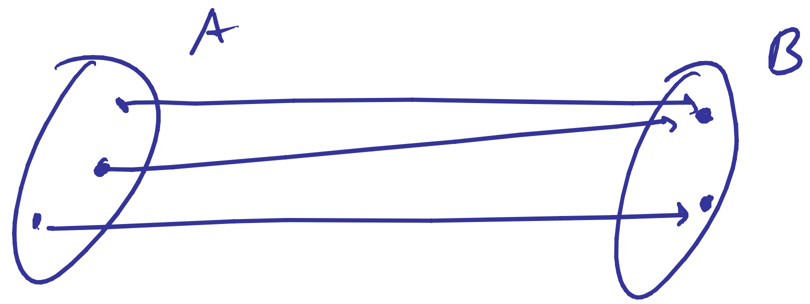
injektiv



nicht injektiv

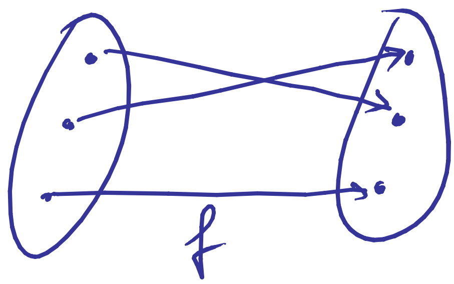
f heißt **surjektiv**, falls jedes Element von B im Bild liegt

$$f(A) = \{ b \in B \mid b = f(a) \text{ für ein } a \in A \}$$

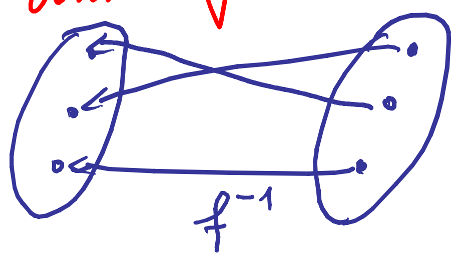


surjektiv

f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv



Umkehrfunktion



<u>Beispiel</u>

$$f: \mathbb{R}\setminus\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\}$$
$$x \longmapsto y = \frac{2x+1}{x-3} \qquad \Big| \cdot (x-3)$$

bestimme f^{-1}:

$$yx - 3y = 2x + 1 \qquad \Big| -2x + 3y$$
$$\underbrace{yx - 2x}_{(y-2)\cdot x} = 3y + 1 \qquad \Big| : (y-2)$$
$$x = \frac{3y+1}{y-2} = f^{-1}(y)$$

Umkehrfkt:

$$f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{3\}$$
$$y \longmapsto \frac{3y+1}{y-2}$$

1.2 Die reellen Zahlen

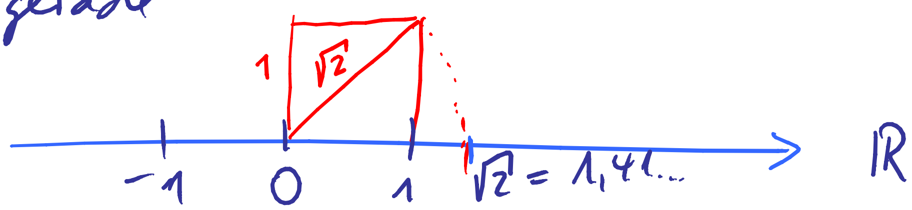
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$	NATÜRLICHE ZAHLEN
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}\setminus\{0\}$	
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	GANZE ZAHLEN
$\mathbb{Q} = \{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$	RATIONALE ZAHLEN
$\mathbb{R}$	REELLE ZAHLEN = rationale + irrationale
$\mathbb{C}$	

↳ Dezimalbrüche

$\sqrt{2}, e, \pi \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}$ = pos. Lösung von $x^2 = 2$

Zahlengerade



reelle Zahlen sind angeordnet

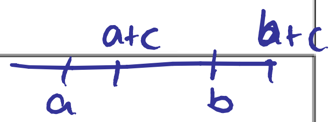
$4 > \pi > \sqrt{2} > 1$

Ungleichungen

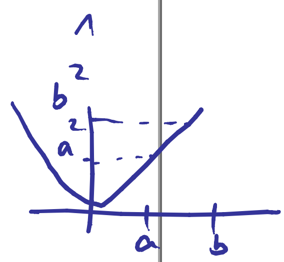
$a < b$	a ist kleiner als b
$a = b$	a ist gleich b
$a > b$	a ist größer als b

Rechenregeln

$a < b$ und $b < c$	$\Longrightarrow a < c$
$a < b$ und $c \in \mathbb{R}$	$\Longrightarrow a + c < b + c$



$a < b$ und $c > 0$	$\Longrightarrow ac < bc$
$a < b$ und $c < d$	$\Longrightarrow a + c < b + d$
$a < b$ und $c < 0$	$\Longrightarrow bc < ac$
$a \neq 0$	$\Longrightarrow a^2 > 0$
$a > 0$	$\Longrightarrow \frac{1}{a} > 0$
$b > a > 0$	$\Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
$0 < a < b$	$\Longrightarrow 0 < a^n < b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$
$0 < a < b$	$\Longrightarrow 0 < a^{1/n} < b^{1/n}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$
$1 < a$	$\Longrightarrow 0 < a^m < a^n$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n$.



$a \leq b \iff a < b$ oder $a = b$	
$a \geq b \iff a > b$ oder $a = b$	

(gleiche Rechenregeln)