Plasmawellen und -Heizung

Masterstudiengang Physik

Philipp Kempkes

Heinrich Laqua

Organisatorisches

Ort/Zeit: Di. 14:00-16:00 KSRP

Tel. 03834 88 2713
philipp.kempkes@ipp.mpg.de

Folien:

http://homepage.ruhr-uni-bochum.de/philipp.kempkes/

Prüfung (mündlich): im Rahmen der Modulprüfung

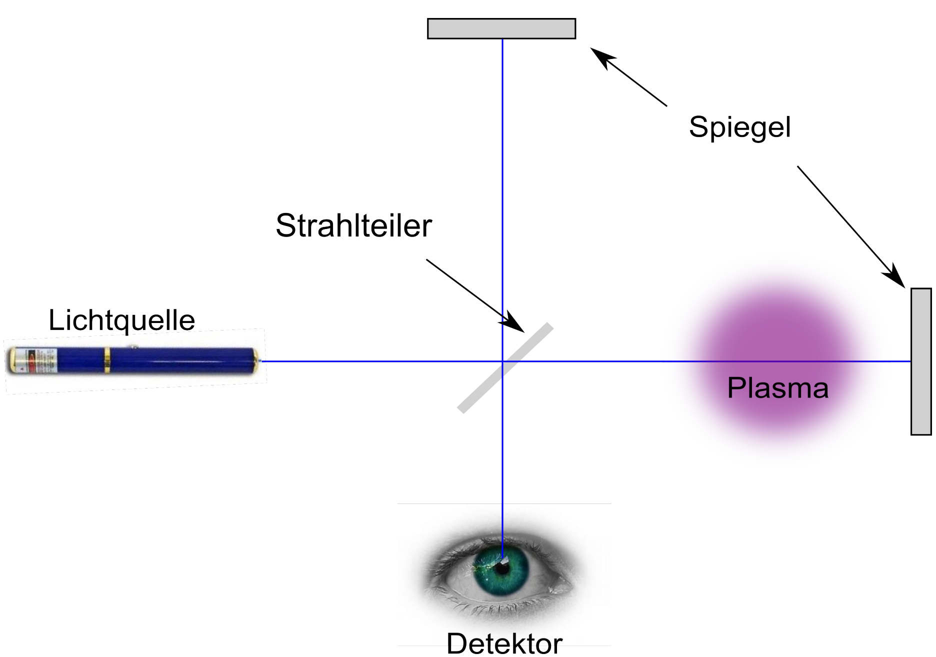
Warum eigentlich?

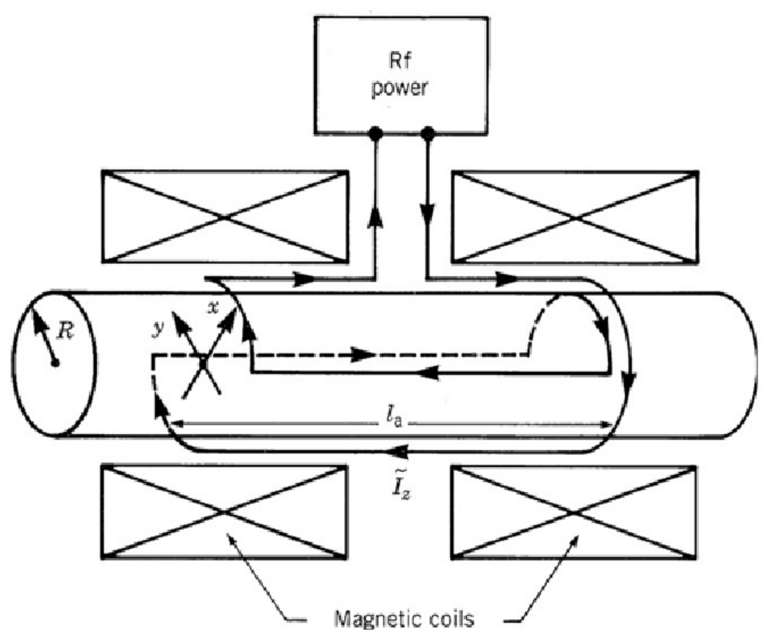
Warum Wellen in Plasmen wichtig sind

- Fundamentale Physik: Turbulenz, Rekonnektion, Instabilitäten, …

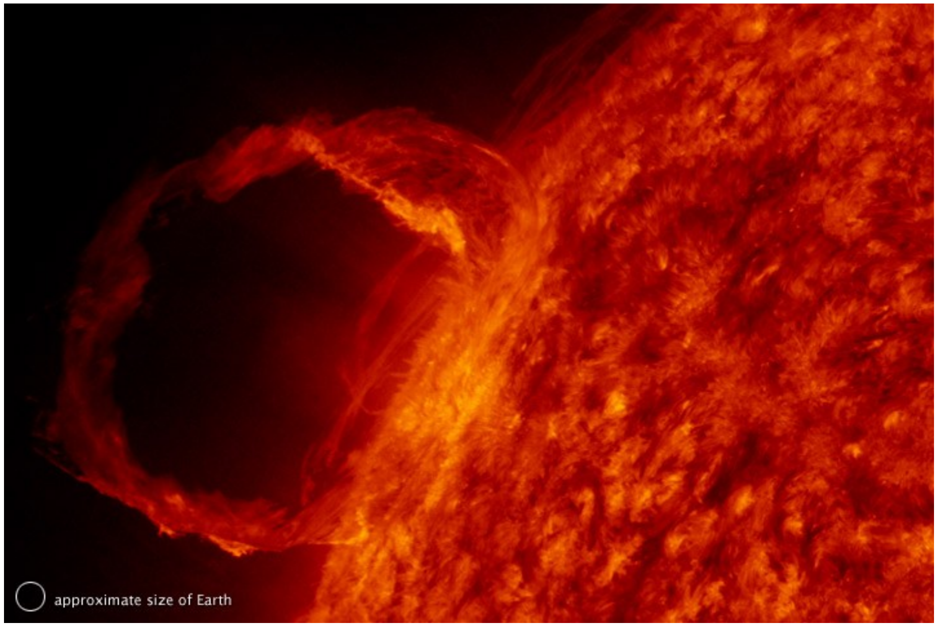
- Plasmaheizung (s. Teil 2 dieser Vorlesung): wegen der großen Vielfalt unterschiedlicher Wellenmoden und deren Existenzbedingungen ist ein gutes Verständnis der Wellenphänomene in Plasmen wichtig.

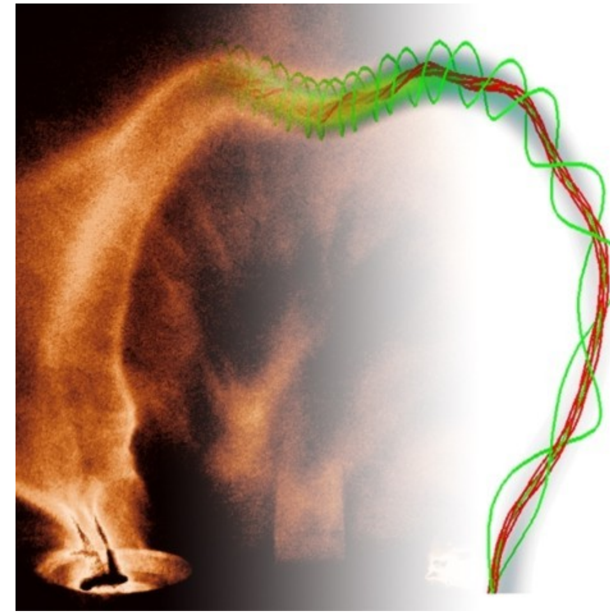
- Diagnostik: Interferometrie/Reflektometrie, Faraday-Rotation, Wellenmischung, ...

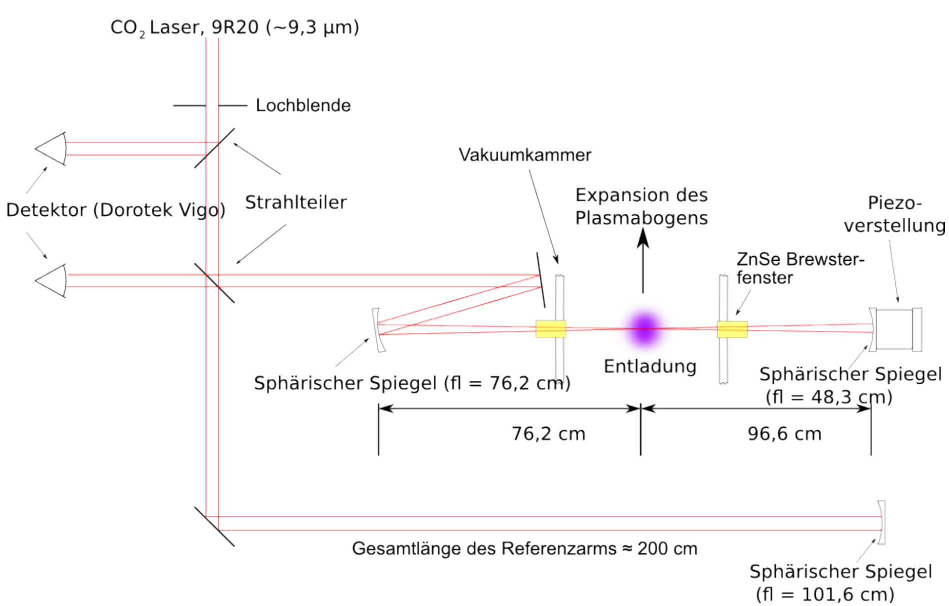


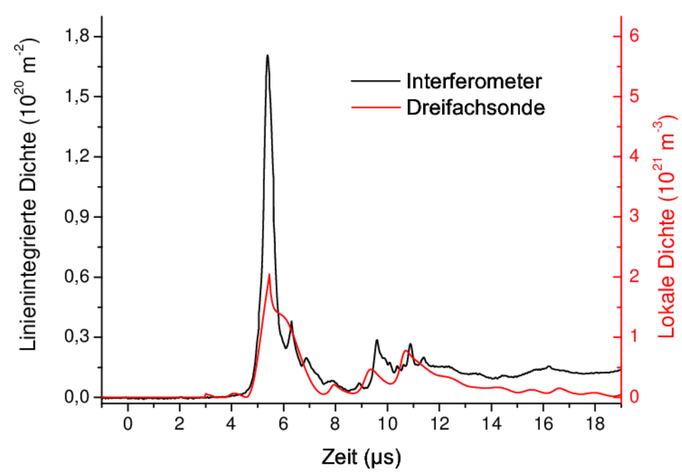


Warum eigentlich?

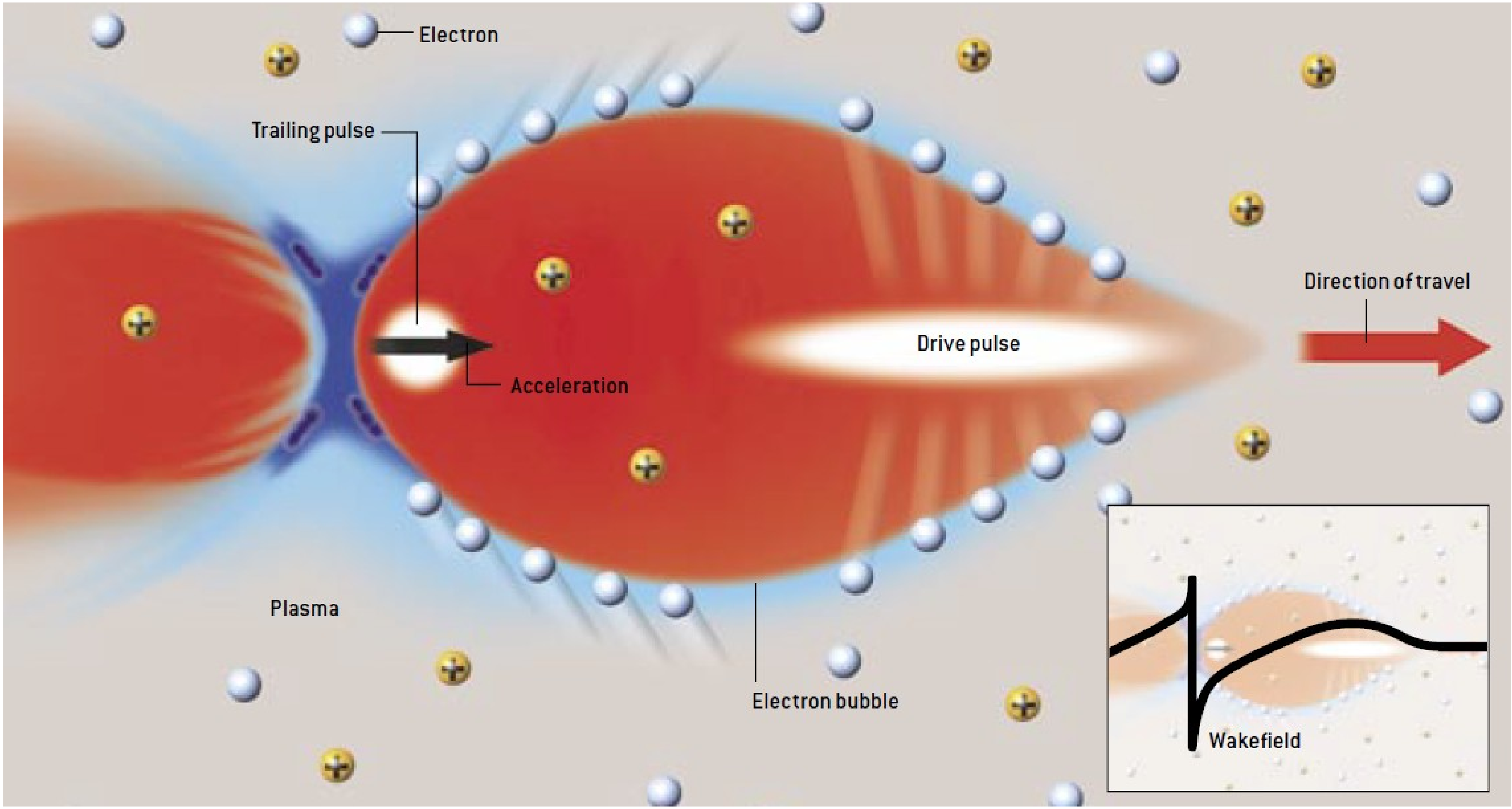






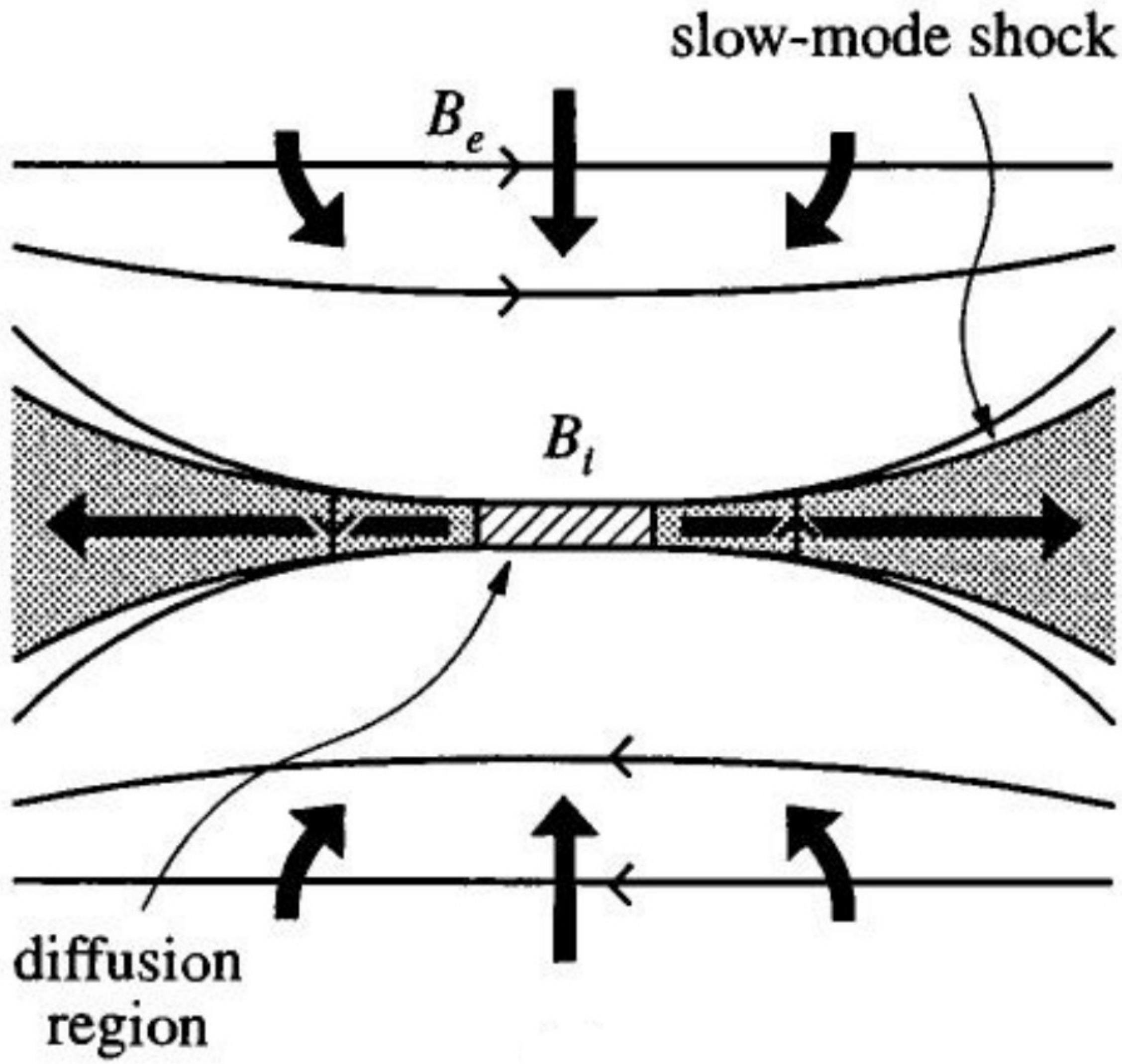


Warum eigentlich?



C. Joshi, Sci. Am. 2006, 41

Warum eigentlich?



Literatur

Allgemeine Einführung:

Chen: Introduction to plasma physics and controlled fusion (Springer)
- sehr gute, physikalisch motivierte Einführung, ideal als Einstieg

Lieberman/Lichtenberg: Priciples of plasma discharges and materials processing (Wiley)
- knappe Einführung zu Grundlegenden Phänomenen, sonst anwendungsorientiert, gute Einführung zu Plasmawellen

Goldston/Rutherford: Introduction to plasma physics (IOP Publishing)
- gute Einführung, etwas theoretischer

Wellen im Speziellen:

Stix: Waves in plasmas (AIP)

Swanson: Plasma waves (IOP Publishing)

Phasen-/Gruppengeschwindigkeit

Wellenartige Größe: $z(x,t)=z_0\cos(kx-\omega t)$

Punkt mit konstanter Phase bewegt sich gemäß: $\frac{d}{dt}(kx-\omega t)=0$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}=v_{ph}$$ Phasengeschwindigkeit

Zwei wellenartige Größen: $z_1(x,t)=z_0\cos((k+\Delta k)x-(\omega+\Delta\omega)t)$

und: $z_2(x,t)=z_0\cos((k-\Delta k)x-(\omega-\Delta\omega)t)$

Superposition: $z_1+z_2=2z_0\cos(\Delta k\,x-\Delta\omega t)\cos(kx-\omega t)$

Einhüllende bewegt sich mit $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ oder

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k}\rightarrow\frac{d\omega}{dk}=v_{gr}$$ Gruppengeschwindigkeit

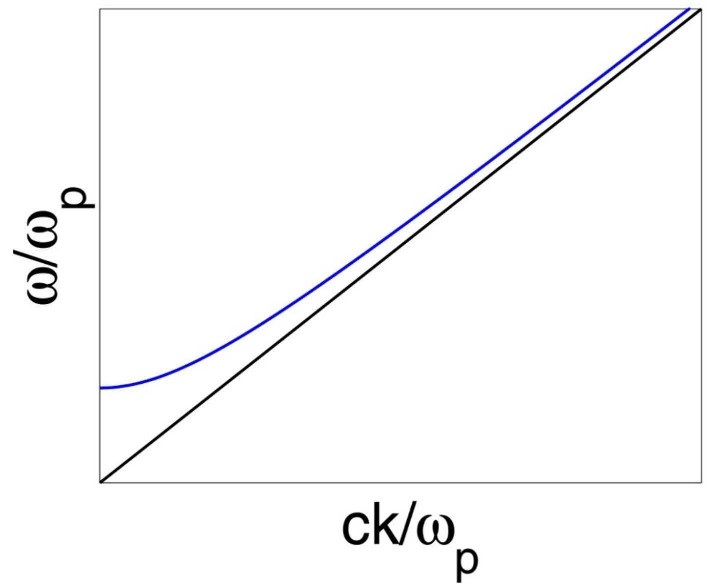
Phasen-/Gruppengeschwindigkeit

Dispersionsrelation allgemein: $D(\omega, k) = 0$

Explizit: $\omega = f(k)$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$

Gruppengeschwindigkeit: $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$



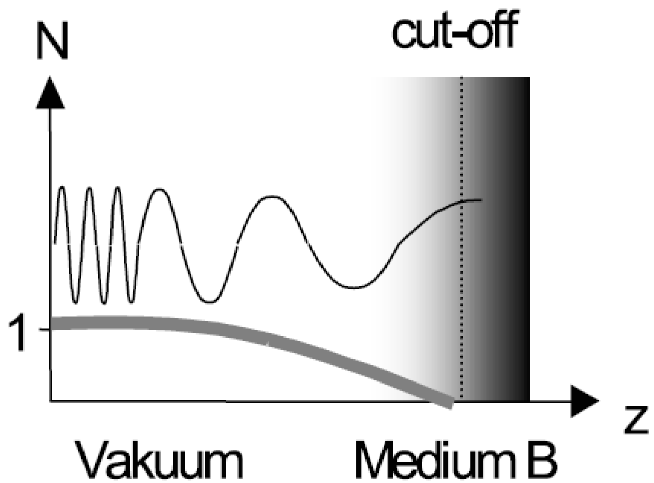
Beispiel: Transversalwelle im unmagnetisierten Plasma: $\omega = kc\sqrt{1 + \omega_p^2/k^2c^2}$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \omega_p^2/k^2c^2}$ Phasengeschwindigkeit > c

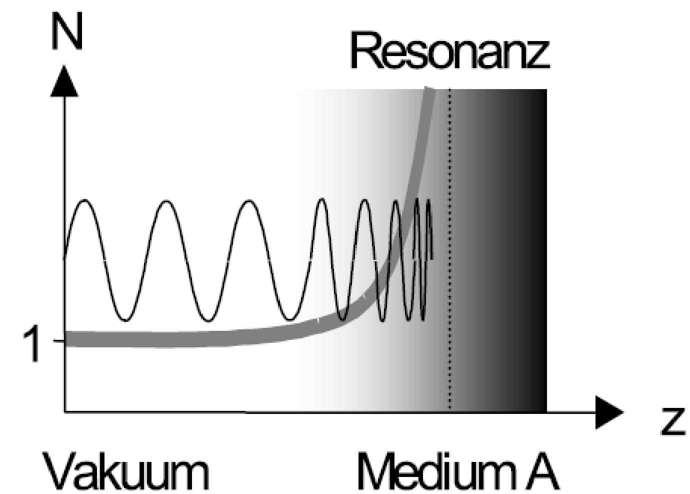
Gruppengeschwindigkeit: $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_p^2/k^2c^2}}$ Gruppengeschwindigkeit < c

Cutoff / Resonanz

$$N=\left|\frac{kc}{\omega}\right|\rightarrow 0,\lambda\rightarrow\infty,v_{ph}\rightarrow\infty$$



$$N=\left|\frac{kc}{\omega}\right|\rightarrow\infty,\lambda\rightarrow 0,v_{ph}\rightarrow 0$$



Beispiel: Transversalwelle im unmagnetisierten Plasma: $\omega=kc\sqrt{1+\omega_p^2/k^2c^2}$

$$N=\frac{kc}{\omega}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega_p^2/k^2c^2}}$$

Cutoff: $N\rightarrow 0\Rightarrow k\rightarrow 0\Rightarrow\omega=\omega_p$

Resonanz: keine.

Plasmaschwingung

„Kaltes“ Plasma, Ionen nur unbeweglicher Hintergrund, leichte Auslenkung der Elektronen in x-Richtung → Ladungsverschiebung erzeugt elektrisches Feld.

1-D-Problem: $\nabla = \partial / \partial_x \hat{e}_x , \quad \vec{E} = E \hat{e}_x , \quad \nabla \times \vec{E} = 0, \quad \vec{E} = -\nabla \Phi$

Kein fluktuierendes Magnetfeld – elektrostatische Schwingung

Beschreibung (Fluidmodell):

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0$$

Kontinuitätsgleichung

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e \right] = -e n_e \vec{E}$$

Impulsbilanz

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} = e (n_i - n_e)$$

Poisson-Gleichung

Plasmaschwingung

Gleichgewichtsgrößen ($\partial_t = 0$): $\nabla n_0 = \vec{E}_0 = \vec{v}_0 = 0$

Linearisierung: $n_e = n_0 + n_1$, $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$, $\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$

Gestörte Größen: $n_1 = \tilde{n}_1 e^{i(kx-\omega t)}$, $\vec{E}_1 = \tilde{E}_1 e^{i(kx-\omega t)} \hat{e}_x = E_1 \hat{e}_x$,

$\vec{v}_1 = \tilde{v}_1 e^{i(kx-\omega t)} \hat{e}_x = v_1 \hat{e}_x$

Mit: $X_1 \cdot Y_1 \ll X_1, Y_1$

Folgt: $\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$ $\quad m_e \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -e \vec{E}_1$ $\quad \epsilon \nabla \cdot \vec{E}_1 = -e n_1$

Plasmaschwingung

Mit: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ und: $\nabla \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik$

Folgt: $-i\omega m v_1 = -eE_1\,,$ $-i\omega n_1 = -n_0 ik v_1\,,$ $ik\epsilon_0 E_1 = -e n_1$

Eliminieren von E_1 und n_1 liefert:

$$-i m\omega v_1 = \frac{e^2}{ik\epsilon_0}\frac{n_0 k}{\omega} v_1 = -i\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 \omega} v_1$$

Oder:

$$\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}}$$ Plasmafrequenz

Dielektrischer Tensor

Vorgehensweise analog zu vorherigem Beispiel:

- Beschreibendes System aufstellen (Beispiel: Fluidmodell + MWG)
- Linearisieren unter der Annahme kleiner Störamplituden
- Fourier-Ansatz (harmonische oszillation der gestörten Größen annehmen) und in linearisiertes System einsetzen
- Gestörte Größen eliminieren → Dispersionsrelation

Beschreibendes System (cold uniform plasma approximation):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

$$m_j \frac{d}{dt} \vec{v}_j = q_j \left(\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B} \right), \qquad \vec{j} = \sum_j n_j q_j \vec{v}_j$$

Dielektrischer Tensor

Annahme: ungestörtes System im Gleichgewicht: $X_0 = 0$

Einzige Ausnahme: wir lassen ein konstantes, homogenes Magnetfeld zu, dieses legt eine Vorzugsrichtung (z-Richtung) fest:

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} + \vec{B}_1 \,, \; mit \;\; B_0 \gg \left|\vec{B}_1\right|$$

Die linearisierte Bewegungsgleichung lautet:

$$m_j \frac{d}{dt} \vec{v}_{1j} = q_j \left(\vec{E}_1 + \vec{v}_{1j} \times \vec{B}_0 \right),$$

Wir nehmen wieder harmonisch variierende Größen an:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)},$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Damit wird $\quad \dfrac{d}{dt} \rightarrow -i\omega$

Dielektrischer Tensor

Damit lässt sich die Bewegungsgleichung algebraisieren:

$$-i\,\omega\, m_j \vec{v}_{1j} = q_j \left(\vec{E}_1 + \vec{v}_{1j} \times \vec{B}_0\right)$$

In Komponenten:

$$v_{xj} = \frac{i q_j}{m\,\omega}\left(E_x + v_{yj} B_0\right) \qquad \text{(x)}$$

$$v_{yj} = \frac{i q_j}{m\,\omega}\left(E_y - v_{xj} B_0\right) \qquad \text{(y)}$$

$$v_{zj} = \frac{i q_j}{m\,\omega} E_z \qquad \text{(z)}$$

Dielektrischer Tensor

In Komponenten:

$$v_{xj} = \frac{iq_j}{m\,\omega_j}\left(E_x + v_{yj} B_0\right) \qquad \text{(x)}$$

$$v_{yj} = \frac{iq_j}{m\,\omega_j}\left(E_y - v_{xj} B_0\right) \qquad \text{(y)}$$

$$v_{zj} = \frac{iq_j}{m\,\omega_j} E_z \qquad \text{(z)}$$

(y) in (x):

$$v_{xj} = \frac{i\,q_j}{m_j\,\omega} E_x - \frac{q_j^2}{m_j^2\,\omega^2} E_y B_0 + \frac{q_j^2 B_0^2}{m_j^2\,\omega^2} v_{xj}$$

Dielektrischer Tensor

(y) in (x):

$$v_{xj} = \frac{i\,q_j}{m_j\,\omega} E_x - \frac{q_j^2}{m_j^2\,\omega^2} E_y B_0 + \frac{q_j^2 B_0^2}{m_j^2\,\omega^2} v_{xj}$$

Sortieren:

$$\left(1 - \frac{q_j^2 B_0^2}{m_j^2\,\omega^2}\right) v_{xj} = \frac{i\,q_j}{m_j\,\omega} E_x - \frac{q_j^2}{m_j^2\,\omega^2} E_y$$

Mit:

$\omega_{cj} = \dfrac{q_j B_0}{m_j}$ (Zyklotronfrequenz), und $\epsilon_j = sign(q_j) = \dfrac{q_j}{|q_j|}$

Ergibt sich:

$$\frac{1}{\omega^2}\left(\omega^2 - \omega_{cj}^2\right) v_{xj} = \frac{1}{\omega^2} \frac{i\,q_j}{m_j} \omega E_x - \frac{1}{\omega^2} \frac{|q_j|}{m_j} \omega_{cj} E_y$$

Dielektrischer Tensor

Und schließlich:

$$v_{xj} = \frac{i\, q_j}{m_j \left(\omega^2 - \omega_{cj}^2\right)} \left(\omega\, E_x + i\, \epsilon_j\, \omega_{cj}\, E_y\right)$$

Analog folgt:

$$v_{yj} = \frac{i\, q_j}{m_j \left(\omega^2 - \omega_{cj}^2\right)} \left(-i\, \epsilon_j\, \omega_{cj}\, E_x + \omega\, E_y\right)$$

Und (trivial):

$$v_{zj} = \frac{i\, q_j}{m_j\, \omega} E_z$$

Zyklische Koordinaten: $v\pm = v_x \pm i\, v_y\,, \qquad E\pm = E_x \pm i\, E_y\,,$

$$\rightarrow v\pm = \frac{i\, q_j}{m_j \left(\omega \mp \epsilon_j\, \omega_{cj}\right)} E\pm$$

Dielektrischer Tensor

Einschub: Teilchenbewegung

$$\int_0^{t'} dt' \, v(t) \rightarrow \frac{1}{-i\omega}$$

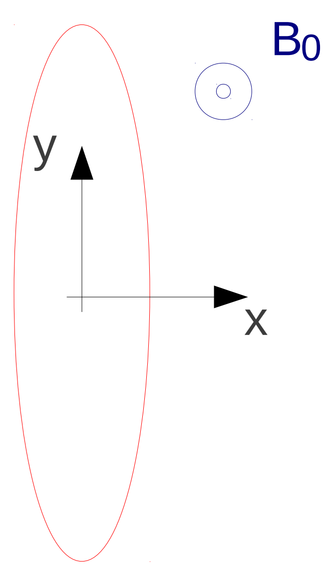
Für $\vec{E} = E_x$:

$$x_j = \frac{-q_j E_x}{m_j(\omega^2 - \omega_{cj}^2)}, \qquad y_j = \frac{-\epsilon_j \omega_{cj}}{i\omega} x_j$$

Generell: Trajektorien elliptisch.

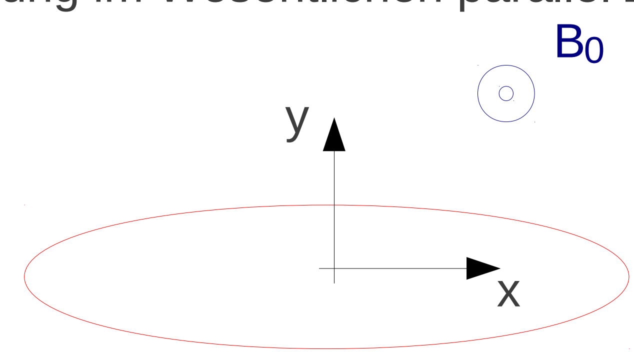
B_0 groß:

- y-Komponente üerwiegt
- Bewegung im Wesent-
  lichen senkrecht
  zu E und B



B_0 klein:

- y-Komponente üerwiegt
- Bewegung im Wesentlichen parallel zu E



Dielektrischer Tensor

Bisher haben wir nur die Bewegungsgleichung betrachtet. Die Verknüpfung mit den MWG geschieht nun über den Strom:

$$\vec{j}=\sum_j n_j q_j \vec{v}_j$$

$$j_\pm = i\epsilon_0 \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega \mp \epsilon_j \omega_{cj}} E_\pm$$

$$j_z = i\epsilon_0 \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} E_z$$

Mit der bereits bekannten Plasmafrequenz $\omega_{pj}=\sqrt{\frac{n_j q_j^2}{\epsilon_0 m_j}}$

Achtung: die Bewegungsgleichung haben wir der Einfachheit halber im Einzelteilchenbild betrachtet. Die Definition der Stromdichte stammt aber aus dem Fluidbild. Dies gilt nur unter der (anfänglich angenommenen) Homogenität (Dichte konstant).

Dielektrischer Tensor

Einsetzen der Ausdrücke für den Strom (hier in Kartesischen Koordinaten) in das Durchflutungsgesetz:

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\mu_0\left(\vec{j}-i\omega\epsilon_0\vec{E}\right)$$

$$=-i\omega\mu_0\epsilon_0\sum_j\left(\begin{array}{l}-\dfrac{\omega_{pj}^2}{\omega^2-\omega_{cj}^2}\left(E_x+i\epsilon_j\dfrac{\omega_{cj}}{\omega}E_y\right)+E_x\\ -\dfrac{\omega_{pj}^2}{\omega^2-\omega_{cj}^2}\left(-i\epsilon_j\dfrac{\omega_{cj}}{\omega}E_x+E_y\right)+E_y\\ -\dfrac{\omega_{pj}^2}{\omega^2}E_z+E_z\end{array}\right)$$

Dielektrischer Tensor

Dies lässt sich als Tensorgleichung ausdrücken:

$$\vec{j} - i\,\omega\,\epsilon_0\,\vec{E} \equiv -i\,\omega\,\epsilon_0\,K \cdot \vec{E}$$

Mit dem Dielektrischen Tensor

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 \\ -K_2 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ -iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich ergibt die Elemente

$$K_1 = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \omega_{cj}^2} = S = \frac{1}{2}(R + L)$$

$$iK_2 = 1 - \sum_j \frac{\epsilon_j\,\omega_{cj}\,\omega_{pj}^2}{\omega\left(\omega^2 - \omega_{cj}^2\right)} = D = \frac{1}{2}(R - L)$$

Dielektrischer Tensor

$$K_3 = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} = P$$

S, D und P stehen hier für Sum, Difference und Plasma, R und L für Right und Left, mit:

$$R = K_1 + iK_2 = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega\left(\omega + \epsilon_j \omega_{cj}\right)}$$

$$L = K_1 - iK_2 = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega\left(\omega - \epsilon_j \omega_{cj}\right)}$$

Diese Bezeichnungen sind Historisch begründet (Ableitung von Stix) und finden teilweise noch heute Verwendung (Stix-Parameter).

Dispersionsrelation

Letzter Schritt zur Dispersionsrelation: B mit Hilfe des Faraday'schen Gesetzes aus dem Durchlutungsgesetz eliminieren. Da wir für alle Größen X

$$\vec{X} \propto e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Wird $\nabla\times \rightarrow i\vec{k}\times$

Und:

$$i\vec{k}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}-i\omega\epsilon_0\vec{E}\right)=-i\omega\mu_0\epsilon_0 K\cdot\vec{E}$$

Analog wird das Faraday'sche Gesetz:

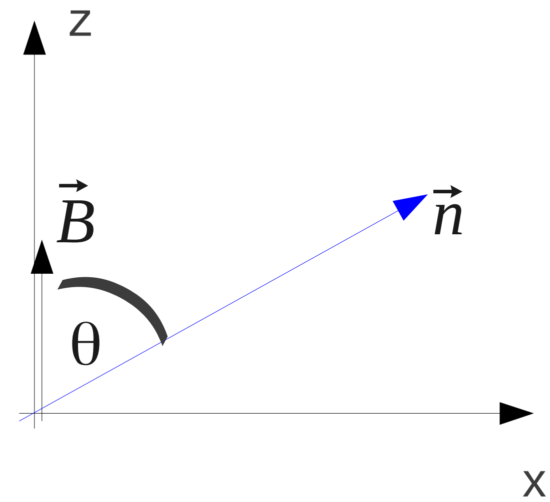
$$i\vec{k}\times\vec{E}=i\omega\vec{B}$$

Einsetzen liefert die Wellengleichung

$$\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{E}\right)+K\cdot\vec{E}=0 \quad \text{mit} \quad \vec{n}=\frac{\vec{k}c}{\omega}$$

Dispersionsrelation

$$\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{E})+K\cdot\vec{E}=0 \qquad \text{mit} \qquad \vec{n}=\frac{\vec{k}\,c}{\omega}$$



$\vec{n}$ ist der (vektorielle) Brechungsindex.

OBDA können wir nun noch $\vec{n}$ in die x-z-Ebene legen.
Mit dem Winkel θ zwischen $\vec{n}$ und der z-(Magnetfeld-) Richtung lässt sich die Wellengleichung folgendermaßen formulieren:

$$\begin{pmatrix} S-n^2\cos^2\theta & -iD & n^2\cos\theta\sin\theta \\ iD & S-n^2 & 0 \\ n^2\cos\theta\sin\theta & 0 & P-n^2\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0$$

Dispersionsrelation

$$\begin{pmatrix} S-n^2\cos^2\theta & -iD & n^2\cos\theta\sin\theta \\ iD & S-n^2 & 0 \\ n^2\cos\theta\sin\theta & 0 & P-n^2\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0$$

Für eine nichttriviale Lösung muss die Koeffizientendeterminante verschwinden. Dies ist die gesuchte Dispersionsrelation:

$$A n^4 - B n^2 + C = 0$$

Mit

$$A = S\sin^2\theta + P\cos^2\theta$$

$$B = \left(-S^2 + D^2\right)\sin^2\theta + PS\left(1+\cos^2\theta\right) = RL\sin^2\theta + PS\left(1+\cos^2\theta\right)$$

$$C = \left(S^2 - D^2\right)P = \left(\frac{1}{4}(R+L)^2 + \frac{1}{4}(R-L)^2\right)P = 4RL\frac{P}{4} = PRL$$