I 6a): ökonomisch sinnvolle Nutzungsdauer[1] (einmalige Durchführung) [Ex ante]

	t	0	1	2	3	4
(1)	Auszahlungen a_t	-8.000,00	-4.000,00	-5.200,00	-6.760,00	-8.788,00
(2)	Einzahlungen b_t		9.000,00	9.000,00	9.000,00	9.000,00
	Saldo c_n (a_t+b_t)	-8.000,00	5.000,00	3.800,00	2.240,00	212,00
(3)	Restwert R_n	8.000,00	5.000,00	2.500,00	600,00	0,00
(4)	$\Delta R=R_t-R_{t-1}$	8.000,00	-3.000,00	-2.500,00	-1.900,00	-600,00
(5)	**C_n**	-8.000,00	1.090,91	1.752,07	**1.819,68**	1.513,69
(6)	Grenzeinzahlungs-überschüsse in t_n		1.200,00	800,00	90,00	-448,00
(7)	**Barwert der Grenzein-zahlungsüberschüsse**		1.090,91	661,16	**67,62**	-305,99

Der Kapitalwert bis n mit Restverkaufserlös errechnet sich nach folgender Formel:
$$\boxed{C_0^n = -a_0 + \sum_{t=1}^{n}\left((b_t - a_t)\cdot(1+i)^{-t}\right) + R_n \cdot (1+i)^{-n}}$$ [Zeile (5)]

Bsp. zu (5): t=3: $C_3 = -8.000 + 5.000\cdot 1{,}1^{-1} + 3.800\cdot 1{,}1^{-2} + 2.240\cdot 1{,}1^{-3} + 600\cdot 1{,}1^{-3} = 1.819{,}68$

Die Grenzeinzahlungsüberschüsse in n errechnen sich wie folgt: $GZÜ = C_0^n - C_0^{n-1}$

Alternativ läßt sich auch berechnen: $\boxed{GZÜ : c' = c_n + (R_n - R_{n-1}) - i\cdot R_{n-1}}$ [Zeile (7)]

Bsp. zu (7): t=3: $GZÜ = (2.240 - 1.900 - 0{,}1\cdot 2.500)\cdot 1{,}1^{-3} = 90{,}00\cdot 1{,}1^{-3} = 67{,}62$

Anmerkung: in t=0 ist $a_0 = R_n$

Die ökonomisch sinnvolle Nutzungsdauer ist dann erreicht, wenn die Grenzeinzahlungsüberschüsse (auch als Grenzgewinn bezeichnet) kleiner null werden, oder wenn der Kapitalwert C_n mit Restverkaufserlös sein Maximum erreicht hat.

→ Der Gabelstapler soll also 3 Perioden genutzt werden. ($n_{opt}=3$)

Der Kapitalwert bei einmaliger Durchführung ist: $C = 1.819{,}68$

b) ökonomisch sinnvolle Nutzungsdauer (einmalige identische Wiederholung)

Die Kapitalwerte in n der zweiten Investition sind wegen der Identität bereits aus a) bekannt. Ebenso ist bereits die ökonomisch sinnvolle Nutzungsdauer bei einmaliger Durchführung mit $n = 3$ bekannt.

Das damit anwendbare Kriterium lautet: $c_{nA} + (R_{nA} - R_{nA-1}) - R_{nA-1}\cdot i \geq C_B \cdot i$.

Alternativ kann man auch den Grenzgewinn/Grenzeinzahlungsüberschüsse berechnen:
$$\boxed{c' = c_{nA} + (R_{nA} - R_{nA-1}) - R_{nA-1}\cdot i - C_B \cdot i}$$

Dabei werden die Grenzeinzahlungen der ersten Investition dem verzinsten Kapitalwert C_n der zweiten Investition – auf den man ja verzichtet bei weiterbetrieb – gegenübergestellt. $C_B \cdot i$ stellt also die Opportunitätskosten aus der Folgeinvestition dar.

$n_A = 1: 5.000 + (5.000 - 8.000) - 8.000\cdot 0{,}1 - 1.090{,}91\cdot 0{,}1 = 1.090{,}91$

$n_A = 2: 3.800 + (2.500 - 5.000) - 5.000\cdot 0{,}1 - 1.752{,}07\cdot 0{,}1 = 624{,}79$ ←

$n_A = 3: 2.240 + (600 - 2.500) - 2.500\cdot 0{,}1 - 1.819{,}68\cdot 0{,}1 = -91{,}97$

$n_A = 4: 212 + (0 - 600) - 600\cdot 0{,}1 - 1.513{,}69\cdot 0{,}1 = -599{,}37$

[1] Busse v. Colbe/Laßmann, Betriebswirtschaftstheorie Band 3, S. 131 ff.

Ab $n_A = 3$ ist die Bedingung zum Weiterbetrieb nicht mehr erfüllt, die Grenzgewinne sind negativ. Die optimale Nutzungsdauer der ersten Investition beträgt also zwei Perioden (n_{opt}=2). Die Folgeinvestition wird wie oben berechnet drei Perioden genutzt.

Der Kapitalwert der Investitionskette bei einmaliger Wiederholung:

$$C_{0K} = C_{0A} + C_{n_A B} \cdot q^{-n_A} = 1.752{,}07 + 1.819{,}68 \cdot 1{,}1^{-2} = 3.255{,}94$$

$C_{n_A B}$ ist dabei der Kapitalwert für die identische Investition B im Zeitpunkt n_A.

Da die optimale Nutzungsdauer der Folgeinvestition bereits aus I6a) mit n=3 bekannt ist, kann man auch über die Maximierung des Kapitalwertes der Kette zur selben Lösung wie durch das Grenzgewinnkalkül gelangen.

$$n_A = 1: C = 1.090{,}91 + 1.819{,}68 \cdot 1{,}1^{-1} = 2745{,}16$$

$$n_A = 2: C = 1.752{,}07 + 1.819{,}68 \cdot 1{,}1^{-2} = 3.255{,}94 \leftarrow$$

$$n_A = 3: C = 1.819{,}68 + 1.819{,}68 \cdot 1{,}1^{-3} = 3.186{,}83$$

$$n_A = 4: C = 1.513{,}69 + 1.819{,}68 \cdot 1{,}1^{-4} = 2.756{,}56$$

Das Gesetz des Ersatzinvestition besagt, das die Folgeinvestition immer länger genutzt wird, als die vorhergehende. Dies liegt daran, das die Kapitalwerte der Folgeinvestitionen durch den Zinseffekt verloren gehen. Je weiter man aber in der Investitionskette fortgeschritten ist, desto geringer ist der Kapitalwert der noch in der Kette folgenden Investitionen, dementsprechend geringer sind die Zinsverluste. Also kann die Investition länger, ohne Verzichtsverluste betrieben werden. Die wirtschaftliche Nutzungsdauer ist demnach am längsten, wenn eine Investition nicht identisch wiederholt wird, und am kürzesten, wenn sie unendlich oft identisch wiederholt wird.[2]

c) ökonomisch sinnvolle Nutzungsdauer (unendliche identische Wiederholung)

Jede Einzelinvestition der Kette hat nun den selben Kapitalwert und die selbe Nutzungsdauer. Daher läßt sich das Nutzungsdaueroptimum über die Maximierung eines Annuitätenkalküls bestimmen. Gesucht wird der Zeitpunkt, an dem die Annuität des Kapitalwertes von n maximal wird. $\boxed{c^*(n) = \left[-a_0 + \sum_{t=1}^{n} c_t \cdot q^{-t} + R_n \cdot q^{-n}\right] \cdot \frac{i \cdot q^n}{q^n - 1} = C_0(n) \cdot \frac{i \cdot q^n}{q^n - 1}}$

$$n = 1: c^*(1) = 1.090{,}91 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 1{,}1^1}{1{,}1^1 - 1} = 1.200{,}001 \leftarrow$$

$$n = 2: c^*(2) = 1.752{,}07 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 1{,}1^2}{1{,}1^2 - 1} = 1.009{,}526$$

$$n = 3: c^*(3) = 1.819{,}68 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 1{,}1^3}{1{,}1^3 - 1} = 731{,}720$$

$$n = 4: c^*(4) = 1.513{,}69 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 1{,}1^4}{1{,}1^4 - 1} = 477{,}525$$

Die optimale ökonomische Nutzungsdauer beträgt eine Periode, da sich bei n=1 das Maximum der Kapitalwertannuität der Investitionskette befindet (n_{opt}=1).
Selbes Ergebnis würde auch eine Maximierung des Kapitalwertes der Kette bringen, da sich dieser hier jedoch aus der Annuität berechnet, verzichte ich auf diese Berechnung.

$$C_{0K} = \frac{c^*(n)}{i} = \frac{1.200{,}001}{0{,}1} = 12.000{,}01$$ (Herleitung: analog Barwert d. ewig. Rente [S. 141 BvC/L])

[2] Busse v. Colbe/Laßmann, Betriebswirtschaftslehre Band 3, S. 143 (Mitte)

I7: Ex post Bestimmung des optimalen Ersatzzeitpunktes[3]

In Aufgabenstellung gegeben:

$\text{ALT}: R_{0,\text{alt}} = 10.000; R_{3,\text{alt}} = 1.000; a_{0,.\text{alt}} = 50.000; n = 10 \text{ Jahre}; a_{n,\text{alt}} (\text{Instandhaltung}) = 30.000;$

$\text{NEU}: R_{0,\text{neu}} = a_{0,\text{neu}} = 100.000; R_{8,\text{neu}} = 5.000; n = 8 \text{ Jahre}; a_{n,\text{neu}} (\text{Instandhaltung}) = 50.000$

Gleiche Produktion, also gleiche Einzahlungen → $b_{t,alt} = b_{t,neu}$ // $i = 10\%$

Da nur untersucht werden soll, ob die Anlage sofort, oder am Ende ihrer Nutzungszeit in t=3 ersetzt werden soll, genügt eine Betrachtung von t_0 und t_3.
Wenn sich die Einzahlungen b_t durch die Ersatzanlage nicht verändern, reicht es, nur Auszahlungen a zu betrachten.
Das Ziel ist, den *absoluten Kapitalwert der Auszahlungen zu minimieren.*
Da man den vollständigen Zahlungsstrom der ersten Investition nicht kennt, kann man hier aber nicht mit dem Kapitalwert argumentieren. Dagegen spricht auch, das bei der ersten Investition nur die Diskontierten Auszahlungen von den letzten drei Perioden den Auszahlungen über acht Perioden der zweiten Investition gegenüber gestellt wären.

T	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
I		A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B
II		B	B	B	B	B	B	B	B			

Als Vergleichskriterium kann man daher, um dieses Problem der unterschiedlichen Nutzungsdauer der Investitionen zu umgehen, die Annuitäten der einzelnen Auszahlungskomponenten berechnen, um die finanzielle Belastung durch jede Anlage je Periode darzustellen.
1. Variante (direkte Berechnung der Annuität)
Die Instandhaltungsausgaben bleiben über die Nutzungsdauer gleich, also kann a für die Annuität angesetzt werden.
Die Anschaffungsauszahlung (Restwert) wird annuitätisch mit dem Kapitalwiedergewinnungsfaktor (KWF) über die (Rest-) Nutzungsdauer verteilt.
Ein Restwerterlös am Ende der Nutzung wird vom Kalkül abgezogen, muß aber zuvor, da der Restwerterlös einen Endwert einer Zahlungsreihe darstellt annuitätisch mit dem Rückwärtsverteilungsfaktor über die (Rest-) Nutzungsdauer verteilt werden.
Daraus läßt sich folgendes Kalkül ableiten:

$$\left(a_{alt} + R_{0,alt} \cdot KWF_i^{n_{alt}} - R_{n_{alt},alt} \cdot RVF_i^{n_{alt}}\right) - \left(a_{neu} + R_{0,neu} \cdot KWF_i^{n_{neu}} - R_{n_{neu},neu} \cdot RVF_i^{n_{neu}}\right) < 0$$

Ist diese Bedingung erfüllt, ist der Weiterbetrieb der alten Anlage günstiger als der Abbruch und die Investition in eine neue.
Die linke Klammer stellt die Kosten des Weiterbetriebs der alten Anlage in jeder Periode dar, die Rechte die Kosten der neuen Anlage. Die Alternative mit den geringeren Kosten wird weiterbetrieben, bzw. angeschafft.
A Alt:

$$30.000 + 10.000 \cdot KWF_{i=10\%}^{n=3} - 1.000 \cdot RVF_{i=10\%}^{n=3} = 30.000 + 10.000 \cdot \frac{1{,}1^3 \cdot 0{,}1}{1{,}1^3 - 1} - 1.000 \cdot \frac{0{,}1}{1{,}1^3 - 1} = 33.719{,}03$$

A Neu:

$$50.000 + 100.000 \cdot KWF_{i=10\%}^{n=8} - 5.000 \cdot RVF_{i=10\%}^{n=8} = 50.000 + 100.000 \cdot \frac{1{,}1^8 \cdot 0{,}1}{1{,}1^8 - 1} - 5.000 \cdot \frac{0{,}1}{1{,}1^8 - 1} = 68.307{,}18$$

Da $33.719{,}03 - 68.307{,}18 < 0$ sollte Anlage A weiterbetrieben und erst in t= 3 ersetzt werden.

[3] Busse v. Colbe/Laßmann, Betriebswirtschaftslehre Band 3, S. 143-148, (*allerdings von meinem Weg abweichend!*)

2. Variante (indirekte Berechnung der Annuität über den Kapitalwert [vgl. Davarnejad])
Zunächst wird der Kapitalwert der Auszahlungen beider Investitionen berechnet:

$$C_{alt} = -R_{0,alt} - a_{n,alt} \cdot RBF_{i=10\%}^{n=3} + R_{3,alt} \cdot q^{-3} = -10.000 - 30.000 \cdot \frac{1{,}1^3 - 1}{1{,}1^3 \cdot 0{,}1} + 1.000 \cdot 1{,}1^{-3} = -83.854{,}24$$

$$C_{neu} = -a_{0,neu} - a_{n,neu} \cdot RBF_{i=10\%}^{n=8} + R_{8,neu} \cdot q^{-8} = -100.000 - 50.000 \cdot \frac{1{,}1^8 - 1}{1{,}1^8 \cdot 0{,}1} + 5.000 \cdot 1{,}1^{-8} = -364.413{,}77$$

Diese Kapitalwerte der Auszahlungen werden dann annuitätisch über die (verbleibende) Nutzungsdauer verteilt. Somit ist der unterschied der Nutzungsdauer durch die periodisierte Betrachtung der Auszahlungen aufgehoben.

$$c_{alt}^{*} = -83.854{,}24 \cdot KWF_{i=10\%}^{n=3} = -83.854{,}24 \cdot \frac{1{,}1^3 \cdot 0{,}1}{1{,}1^3 - 1} = -33.719{,}03 \leftarrow$$

$$c_{neu}^{*} = -364.413{,}77 \cdot KWF_{i=10\%}^{n=8} = -364.413{,}77 \cdot \frac{1{,}1^8 \cdot 0{,}1}{1{,}1^8 - 1} = -68307{,}18$$

Hier kommt man zum selben Ergebnis. Die annuitätisch verteilten Kosten der alten Anlage sind geringer als die der neuen, also sollte die alte Anlage erst in t=3 ausgetauscht werden.

Zusammenfassung der Methoden zur Vorteilhaftigkeit von Investitionen

Einzelne Investition (ohne Vergleich mit Alternativen)
Kapitalwertmethode ($C_0 > 0$), interner Zinsfuß ($r > i$), modifizierter interner Zinsfuß ($\hat{r} > i$) und Annuitätenmethode ($c^* > 0$) führen zum selben Ergebnis. Vorteilhaftigkeitsvergleich erfolgt nur gegenüber Kalkulationszinsfuß.

Mehrere Investitionen
Kapitalwertmethode ($\max C_0 \,\&\, C_0 > 0$), modifizierter interner Zinsfuß ($\max \hat{r} \,\&\, \hat{r} > i$) und die Annuitätenmethode ($\max c^* \;\&\; c^* > 0$) führen zum selben Ergebnis, der interne Zinsfuß kann wegen der impliziten Wiederanlageprämisse (Wiederanlage und Ergänzungsinvestition zum internern Zinsfuß, nicht zum Kalkulationszins!) andere Ergebnisse liefern.

Ökonomische Nutzungsdauer (Investitionsketten)
Einmalige Durchführung
Kapitalwert ($\max C_0$) oder Grenzgewinn ($c' > 0$) liefern das gleiche Ergebnis.
Einmalige identische Wiederholung
Kapitalwert der Investitionskette ($\max C_{0K}$) oder ein Vergleich des Grenzgewinns ($c' > 0$) liefern das gleiche Ergebnis.
Unendliche identische Wiederholung
Die Annuität auf den Kapitalwert C(n) (Entscheidungskriterium: $\max c^*(n)$) liefert das Ergebnis.

Ersatzzeitpunkt bei nichtidentischen Investitionen
Werden nur Auszahlungen betrachtet, dann liefert die Annuität auf den Kapitalwert der Auszahlungen ($\underline{\min c^*}$) das Ergebnis.
Werden sowohl Auszahlungen als auch Einzahlungen betrachtet, kann die Annuität auf den Kapitalwert (**Achtung:** $\underline{\max c^*}$) ebenfalls herangezogen werden.