

I 3:

a) Kapitalwert einer Investition

	t	0	1	2	Barwert	i=8%
1	Auszahlungen	-3.380,00	-2.000,00	-6.000,00	-10375,88	
2	Einzahlungen		4.000,00	8.000,00	10562,41	
3	EZÜ's	-3.380,00	2.000,00	2.000,00	186,53	} = C ₀
4	Barwerte	-3.380,00	1.851,85	1.714,68	186,53	

Um den Kapitalwert nach der Formel $C_0 = -a_0 + \sum_{t=1}^n c_t \cdot (1+i)^{-t}$ zu berechnen, kann man entweder die saldierten Ein- und Auszahlungen (Zeile 3) abzinsen (diskontieren) [Zeile 4], z.B. für t_2 : $b_0 = 2.000 \cdot 1,08^{-2}$, alternativ kann man auch den Barwert der Einzahlungen und den Barwert der Auszahlungen bestimmen und die Summe bilden (Zeilen 1+2). Also:

$$C_0 = -3.380 - 2.000 \cdot 1,08^{-1} + 4.000 \cdot 1,08^{-1} - 6.000 \cdot 1,08^{-2} + 8.000 \cdot 1,08^{-2} = 186,53$$

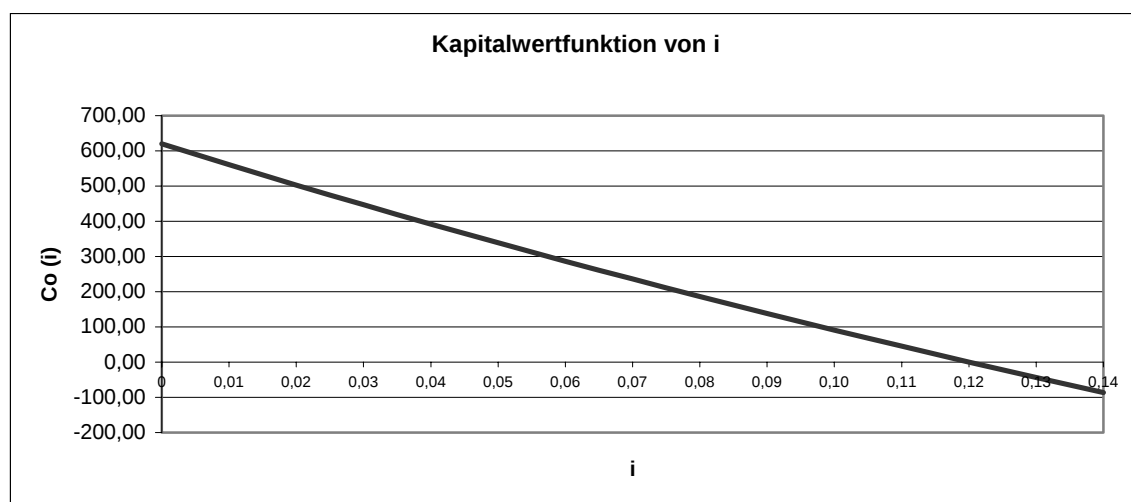
b) Die Investition ist vorteilhaft, da die auf t_0 verdichteten Einzahlungen die auf t_0 verdichteten Auszahlungen übersteigen, also der Kapitalwert größer als null ist.

c) Kapitalwertverlauf bei Kalkulationszinsänderung → interner Zinsfuß

t	0	1	2	C ₀
Cash-Flow	-2.000,00	2.000,00	2.000,00	
0,00	-3.380,00	2.000,00	2.000,00	620,00
0,06	-3.380,00	1.886,79	1.779,99	286,79
0,10	-3.380,00	1.818,18	1.652,89	91,07

$$\text{Für } \infty : \lim_{i \rightarrow \infty} C_0(i) = \lim_{i \rightarrow \infty} -a_0 + \left(\frac{\overset{\rightarrow 0}{\underset{\rightarrow \infty}{2000}}}{(1+i)} \right) + \left(\frac{\overset{\rightarrow 0}{\underset{\rightarrow \infty}{2000}}}{(1+i)^2} \right) = -a_0 = -3.380.$$

Man kann also sagen, **je höher der Kalkulationszinsfuß, desto geringer der Kapitalwert** (nach unten begrenzt durch Anfangsausgabe in t_0)



d) interner Zinsfuß

Die Nullstelle der Funktion $C_0(i)$ bezeichnet man als internen Zinsfuß r . Es ist der Kalkulationszins, bei dem die abgezinsten Einzahlungsüberschüsse gleich der Anschaffungsausgabe sind, also die Mindestverzinsung der Investition.

$$C_0(i) = -3380 + \frac{2000}{(1+i)} + \frac{2000}{(1+i)^2} = 0 \Leftrightarrow -3380 \cdot (1+i)^2 + 2000 \cdot (1+i) + 2000 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^2 - \frac{2000}{3380} \cdot (1+i) - \frac{2000}{3380} = 0 \quad \text{Substitution: } x^2 - \frac{2000}{3380} \cdot x - \frac{2000}{3380} = 0$$

$$\text{Einsetzen in PQ-Formel: } x_{1,2} = \frac{1000}{3380} \pm \sqrt{\left(\frac{1000}{3380}\right)^2 + \frac{3380}{2000}} \approx 1,120023$$

$$1+r = 1,120023 \Leftrightarrow r = 0,120023 \Leftrightarrow r = 12,0023\%$$

e) Kapitalwertannuität

Die Kapitalwert-Annuität verteilt den Kapitalwert über die längste Nutzungsdauer (bei der Betrachtung mehrerer Investitionen) in gleiche Renten (Annuitäten) (c^*) unter Berücksichtigung der Verzinsung.

$$c^* = C_0 \cdot KWF(n; i) = C_0 \cdot \frac{q^n \cdot i}{q^n - 1} = 186,53 \cdot \frac{(1+0,08)^2 \cdot 0,08}{(1+0,08)^2 - 1} = 186,53 \cdot \frac{1,08^2 \cdot 0,08}{1,08^2 - 1} = 186,53 \cdot \frac{0,093312}{0,1664}$$

$$= 186,53 \cdot 0,56076923 \approx 104,60$$

I4:

a) Wahl des Kalkulationszinsfußes:

Als Kalkulationszinsfuß sollte immer eine am Kapitalmarkt sicher zu erzielende Rendite gewählt werden. Sie stellt einen Mindestertragsanspruch. Als risikofreie Anlagemöglichkeiten gelten insbesondere Staatsanleihen, bei denen das Unternehmensrisiko fehlt¹.

Demnach ist als Kalkulationszinsfuß der Zinssatz 6 % der Investition (2) zu wählen.

Alternativ kann auch die Verzinsung einer Alternativinvestition gewählt werden.

→ Die Wahl kann die Vorteilhaftigkeit einer Investition beeinflussen/umdrehen.

ba) Kapitalwertmethode

$$(1) C_0^1 = -60.000 + 15.000 \cdot \frac{1,06^5 - 1}{1,06^5 \cdot 0,06} = -60.000 + 15.000 \cdot 4,212363785 \approx 3185,46$$

Die konstanten Einzahlungen von 15.000,- DM können hier anstatt einzeln über die 5 Perioden abgezinst zu werden mit dem RBF(5;6%) multipliziert werden, um den Barwert der Einzahlungen zu erhalten.

(2) Die ewigen Rentenpapiere werden mit dem Kalkulationszinsfuß verzinst. Gemäß den Prämissen der Kapitalwertmethode ist der Kapitalwert $C_0^2 = 0$.

(3) Die konstanten Einzahlungen von 5.000,- DM können mit dem RBF(6;6%) diskontiert werden. Die Endrate von 40.000,- DM muß noch um 6 Perioden angezinst werden.

$$C_0^3 = -40.000 + 5.000 \frac{1,06^6 - 1}{1,06^6 \cdot 0,06} + 40.000 \cdot 1,06^{-6} \approx -40.000 + 5.000 \cdot 4,9173 + 28.198,42 \approx 12.785,04$$

$$(4) C_0^4 = -50.000 + 150.000 \cdot 1,06^{-10} \approx -50.000 + 83759,22 = 33.759,22$$

→ die Investition (4) ist am vorteilhaftesten, sie hat den höchsten Kapitalwert.

Rangfolge der Vorteilhaftigkeit: $I_4 \succ I_3 \succ I_1 \succ I_2$

¹ Vgl. Busse v. Colbe/Laßmann, Betriebswirtschaftstheorie Band 3, 3. Auflage, S. 54

Kapitalwertmethode vs. Statische Verfahren der Investitionsrechnung

- Die Kapitalbindung wird genau berücksichtigt, bei der Kapitalwertmethode
- Es werden keine Jahresdurchschnitte betrachtet, sondern vollständige Zahlungsströme gehen in die Berechnung ein
- Ein Nachteil der Kapitalwertmethode ist die Wiederanlageprämisse zum internen Zinsfuß, so wird z. B. eine Wiederholung der Investition nicht berücksichtigt

bb) Annuitätenmethode

bezogen auf den Kapitalwert: $c^* = C_0 \cdot KWF(n; i) = C_0 \cdot \frac{q^n \cdot i}{q^n - 1}$

Die Kapitalwert-Annuität verteilt den Kapitalwert über die längste Nutzungsdauer (bei der Betrachtung mehrerer Investitionen) in gleiche Renten (Annuitäten) (c^*) unter Berücksichtigung der Verzinsung.

Sie stellt einen „Übergewinn“ dar, nach Tilgung und Verzinsung der Anschaffungsauszahlung, der jährlich zur Verfügung stehen könnte (nur bei gleichbleibenden Einzahlungsüberschüssen. Investition (4) hat nur einen „großen“ Kapitalrückfluß am Ende der Laufzeit).

$$(1) c_1^* = 3.185,46 \cdot \frac{1,06^{10} \cdot 0,06}{1,06^{10} - 1} = 3.185,46 \cdot 0,135867958 \approx 432,80$$

$$(2) c_2^* = 0 \cdot \frac{1,06^{10} \cdot 0,06}{1,06^{10} - 1} = 0 \cdot 0,135867958 = 0$$

$$(3) c_3^* = 12.785,04 \cdot \frac{1,06^{10} \cdot 0,06}{1,06^{10} - 1} = 12.785,04 \cdot 0,135867958 \approx 1737,08$$

$$(4) c_4^* = 33.759,22 \cdot \frac{1,06^{10} \cdot 0,06}{1,06^{10} - 1} = 33.759,22 \cdot 0,135867958 \approx 4.586,80$$

Die in ba) festgestellte Vorteilhaftigkeit $I_4 \succ I_3 \succ I_1 \succ I_2$ ändert sich nicht.

Annuitätenmethode bezogen auf den Ertragswert:

Ertragswert ist der Barwert der Erwartenden Einzahlungsüberschüsse, also $C_0 + a_0$. Man geht hier von gleicher Nutzungsdauer n und gleicher Anschaffungsauszahlung a_0 aus.

$$(1) b_1^* = 83.185,46 \cdot \frac{1,06^{10} \cdot 0,06}{1,06^{10} - 1} = 83.185,46 \cdot 0,135867958 \approx 11.302,24$$

$$(2) b_2^* = (0 + 80.000) \cdot \frac{1,06^{10} \cdot 0,06}{1,06^{10} - 1} = 80.000 \cdot 0,135867958 \approx 10.869,44$$

$$(3) b_3^* = 92.785,04 \cdot \frac{1,06^{10} \cdot 0,06}{1,06^{10} - 1} = 92.785,04 \cdot 0,135867958 \approx 12.606,51$$

$$(4) b_4^* = 113.759,22 \cdot \frac{1,06^{10} \cdot 0,06}{1,06^{10} - 1} = 113.759,22 \cdot 0,135867958 \approx 15.456,23$$

Die oben festgestellte Vorteilhaftigkeit ändert sich nicht: $I_4 \succ I_3 \succ I_1 \succ I_2$.

bc) Amortisationsdauer

(1) Ohne Verzinsung: $60.000 : 15.000 = 4$ Jahre

Mit Verzinsung: $C_0 = -60.000 + 15.000 \cdot RBF_{i=6\%}^{n=?} \Leftrightarrow RBF_{i=6\%}^{n=?} = 4 \Leftrightarrow \frac{1,06^n - 1}{0,06 \cdot 1,06^n} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{6} - \frac{100}{1,06^n \cdot 6} = \frac{24}{6} \cdot \frac{6}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{1,06^n} = \frac{76}{100} \Leftrightarrow 1,06^n = \frac{100}{76} \Leftrightarrow n \cdot \ln(1,06) = \ln(100) - \ln(76)$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(100) - \ln(76)}{\ln(1,06)} \Leftrightarrow n \approx 4,7098.$$

Das eingesetzte Kapital wird aufgezinst und dem Kapitalrückfluß gegenübergestellt. Da also *mehr Kapital zurückfließen muß, verlängert sich die Amortisationszeit gegenüber der Methode ohne Verzinsung.*

(2) Ohne Verzinsung: Die Zinseinzahlungen pro Jahr betragen 4.800 (6% auf 80.000). Also: 80.000:4.800 = 16.667 Jahre

Mit Verzinsung: $n \rightarrow \infty$, Da die Zinsbezugsgröße sowohl zur Bestimmung des eingesetzten Kapitals als auch für den Zinsrückfluß nicht verändert, das Kapital also mit dem verzinst wird, was es erwirtschaftet, amortisiert sich diese Investition nicht.

(3) Ohne Verzinsung: Nach 6 Jahren ist die Anschaffungsausgabe von 40.000 wieder eingenommen. Aber: rechnerisch: 40.000:5.000 = 8 Jahre.

Mit Verzinsung: Bei einer Verzinsung des Kapitals vergrößert sich die Amortisationszeit nur, dennoch wissen wir aus der Kapitalwertrechnung, daß die Investition einen positivem Kapitalwert hat bei $i=6\%$, somit amortisiert sie sich innerhalb der Nutzungszeit.

(4) Ohne Verzinsung/Mit Verzinsung: n beträgt mit oder ohne Verzinsung (aus der Logik heraus) 10 Jahre, da vorher keine Zahlungen erfolgen.

Die Amortisationsdauer betrachtet nur einen Teil des Zahlungsstroms. Der Vergleich bricht an der Stelle des vollständigen Kapitalrückflusses ab, spätere Gewinne werden nicht berücksichtigt.

Daher weicht hier die Vorteilhaftigkeit von den anderen dynamischen Verfahren deutlich ab:

$$I_1 \succ I_3 \succ I_4 \succ I_2$$

c) interner Zinsfuß, modifizierter interner Zinsfuß

Prämissen für modifizierten Internen Zinsfuß:

Gesamtinvestitionsvolumen 80.000,-

Gesamtnutzungsdauer $n=10$

(1) interner Zinsfuß: $C_0(r) = 60.000 + RBF \cdot 15.000 = 0 \Leftrightarrow RBF = 4$, wir suchen also den Zinssatz, bei dem der Rentenbarwertfaktor den Wert 4 annimmt, wenn $n = 5$:
aus Tab. S. 273 BvC/L: $8\% \rightarrow RBF = 3,9927$; $7\% \rightarrow RBF = 4,1002$. Der interne Zinsfuß liegt also ungefähr bei $r = 8$. (Zur Info: Excel-Zielwertsuche ergibt: $r = 7,931\%$).

Modifizierter interner Zinsfuß:

$$\hat{r} = \sqrt[n]{\frac{\sum_{t=1}^n c_{tA} \cdot q^{n-t} + a_{0X} \cdot q^n}{a_{0A} + a_{0X}}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{15.000 \cdot (1,06^9 + 1,06^8 + 1,06^7 + 1,06^6 + 1,06^5) + 20.000 \cdot 1,06^{10}}{80.000}} - 1$$

Die Einzahlungsüberschüsse werden in n-t mit 6 % verzinst.
(also in t=1: 10-1=9; t=2: 10-2=8;...)

Das Gesamtinvestitionsvolumen beträgt 80.000.

Da nur 60.000 ausgegeben werden, müssen 20.000 über 10 Jahre zu 6 % angelegt werden

$$= \sqrt[10]{\frac{113.155,53 + 35.816,95}{80.000}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{148.972,48}{80.000}} - 1 = 1,06414696 - 1 = 6,415\%$$

Alternative zur Berechnung: $\hat{r} = \sqrt[10]{\frac{15.000 \cdot REF_{i=6\%}^{n=5} \cdot 1,06^5 + 20.000 \cdot 1,06^{10}}{80.000}} - 1 = 6,415\%$

Dabei ist $15.000 \cdot REF_{i=6\%}^{n=5}$ der Endwert in t=5, der dann noch mit $1,06^5$ um 5 Perioden aufgezinst wird.

(2) Aus logischer Überlegung muß der interne, als auch der modifizierte interne Zinsfuß den Wert 6 % annehmen.

interner Zinsfuß: $C_0 = -80.000 + \frac{4.800}{i} = 0 \Leftrightarrow i = 0,06 = 6\%$

Modifizierter interner Zinsfuß: $\hat{r} = \sqrt[10]{\frac{4.800 \cdot REF_{i=6\%}^{n=10} + \frac{4.800}{0,06}}{80.000}} - 1 = 0,06 = 6\%$

(3) interner Zinsfuß: $C_0 = -a_0 + c \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot r} + R_n \cdot \frac{1}{q^n} + a_0 \cdot q^n$

$$a_0 \cdot q^n = c \cdot \frac{q^n - 1}{r} + R_n \mid - R_n \Leftrightarrow a_0 \cdot q^n - R_n = c \cdot \frac{q^n - 1}{r} \mid R_n = a_0 \Leftrightarrow a_0 \cdot q^n - a_0 = c \cdot (q^n - 1) \cdot \frac{1}{r}$$

$$a_0 \cdot (q^n - 1) = c \cdot (q^n - 1) \cdot \frac{1}{r} \mid : (q^n - 1) \Leftrightarrow a_0 = \frac{c}{r} \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{c}{a_0}} \Rightarrow r = \frac{5.000}{40.000} = 0,125 = 12,5\%$$

Modifizierter interner Zinsfuß:

$$\hat{r} = \sqrt[10]{\frac{5.000 \cdot (1,06^9 + 1,06^8 + 1,06^7 + 1,06^6 + 1,06^5 + 1,06^4) + 40.000 \cdot 1,06^4 + 40.000 \cdot 1,06^{10}}{80.000}} - 1 = 7,5833\%$$

(4) interner Zinsfuß: $C_0 = -50.000 + \frac{150.000}{(1+r)^{10}} = 0 \Leftrightarrow 1+r = \sqrt[10]{3} \Leftrightarrow r = 0,1161 = 11,61\%$

Modifizierter interner Zinsfuß: $\hat{r} = \sqrt[10]{\frac{150.000 \cdot 1,06^0 + 30.000 \cdot 1,06^{10}}{80.000}} - 1 = 9,7983\%$

Es ergibt sich hier bei der Methode des *internen Zinsfußes* eine abweichende Vorteilhaftigkeit gegenüber der Kapitalwertmethode: $I_3 \succ I_4 \succ I_1 \succ I_2$

Bei der *modifizierten internen Zinsfußmethode* erhält man wieder die bereits bei der Kapitalwertmethode und der Annuitätenmethode festgestellte Vorteilhaftigkeit: $I_4 \succ I_3 \succ I_1 \succ I_2$