

2. Arbeitsgemeinschaft (11.11.2002)

2. Fisher-Separation

Das Fisher-Separationstheorem sagt aus, daß unter bestimmten Annahmen heutiger und morgiger Konsum substituierbar sind. Investitions- und Finanzierungsentscheidungen können somit getrennt betrachtet werden.

Ferner erreichen die Individuen ein höheres Nutzenniveau durch die Existenz eines Kapitalmarktes und Investitionsentscheidungen können präferenzunabhängig getroffen werden. Es gibt eine volkswirtschaftlich optimale Kombination von Investition und Konsum, die durch Geldaufnahme und Geldanlage am vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt realisiert werden kann.³ Es wird gezeigt, wie beide Investoren präferenzunabhängig ihren Marktwert maximieren.

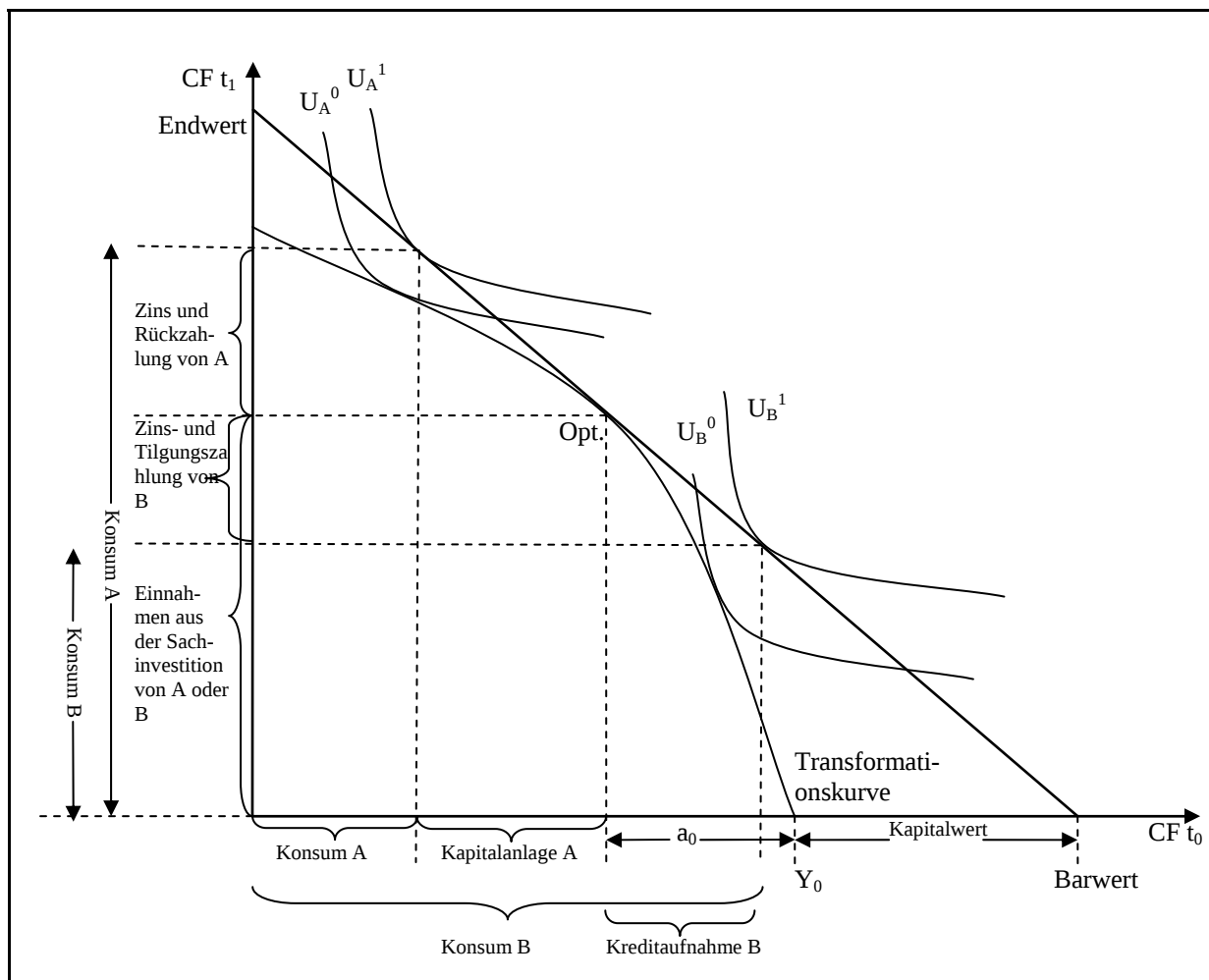


Abb. 2: Gesamtmodell der Fisher-Separation

Die Investoren haben im Zeitpunkt t_0 einen Geldbetrag von Y_0 zur Verfügung. Diesen können sie konsumieren, oder ganz bzw. teilweise über die Transformationskurve, die eine Investition in Sachanlagen darstellt, in die Zukunft t_1 verlagern. Die Stelle, an der die Kurve U_B^0 die Transformationskurve tangiert, gibt das Verhältnis von heutigem und morgigem Konsum des Investors B wieder.

³ In breiterer Form wird die Fisher-Separation auch im allseits aus dem Grundstudium bekannten Buch Busse v. Colbe/Laßmann (1990), Band 3 - Investitionstheorie, S. 3-7 geschildert.

Unterstellt man nun die Existenz eines Kapitalmarktes, so ergibt sich neben der Möglichkeit Einkommen in die Zukunft zu transferieren noch die Möglichkeit Geld zum sicheren Zinssatz anzulegen bzw. zu entleihen. Daher läßt sich die Kapitalmarktgerade einzeichnen, ihre Steigung ist durch den Kapitalmarktzins gegeben. Alle auf ihr möglichen Kombinationen von Konsum in t_0 und t_1 haben den gleichen Bar- bzw. Endwert, daher sagt man auch Isobarwertlinie.

Im Punkt Opt. tangiert die Kapitalmarktgerade die Transformationskurve. Dieser Punkt bestimmt die gesamtwirtschaftlich effiziente Kombination aus Konsum und Investition in Sachanlagen.

Unabhängig von ihren individuellen Konsumpräferenzen realisieren beide Investoren die Sachanlage. Die Differenz zu ihrer Konsumpräferenz wird durch Kapitalanlage bzw. -aufnahme am Kapitalmarkt gedeckt.

Investor A hat eine geringe Zeitpräferenz und konsumiert daher nur wenig in t_0 . Nach Investition in die Sachanlage a_0 wird die Differenz am Kapitalmarkt zu i angelegt. In t_1 erhält A einmal die Einnahmen aus der Sachanlage, zusätzlich erhält er noch sein am Kapitalmarkt angelegtes Kapital nebst Zinsen.

B mit seiner hohen Zeitpräferenz konsumiert fast sein gesamtes Einkommen. Er muß daher Kapital aufnehmen, um in die Sachanlage zu investieren. B erhält deshalb wie A den Ertrag aus der Sachanlage in t_1 , muß aber wegen der Kreditaufnahme Zinsen zahlen und den Kredit tilgen.

Die Einnahmen aus der Sachinvestition in t_1 abgezinst um eine Periode mit dem Kapitalmarktzins (Bildung des Barwerts) weisen dann auf eine vorteilhafte Investition hin, wenn sie die Anschaffungsauszahlung a_0 übersteigen. Daraus resultiert dann ein positiver Kapitalwert.

$$\text{Formel 1: } C_0 = -a_0 + b_1 \cdot (1+i)^{-1}$$

Zuletzt noch kurz die Prämissen des Modells.

Es werden nur eine Periode und zwei Investoren betrachtet. Die Investoren sind mit dem gleichen Einkommen Y_0 ausgestattet und für beide gilt die gleiche Transformationskurve. Es gibt kein investitions- oder kapitalmarktunabhängiges Einkommen (wie z.B. monatl. Gehalt o.ä.). Dann wird noch ein vollkommener und vollständiger Kapitalmarkt vorausgesetzt. Ferner ein gleicher Zins für Kapitalaufnahme und -anlage, sichere Erwartungen, eine abnehmende Grenzproduktivität des Kapitals und konvexe Nutzenindifferenzkurven der Investoren.

3. Kennzahlen der deskriptiven Statistik

A	5	4	6	3	2
B	5	2	3	4	1

Tab. 3: Zeitreihe

3.1 Erwartungswert

Der Erwartungswert ist die Summe aller Realisationen multipliziert mit ihren Wahrscheinlichkeiten.

$$\text{Formel 2: } \mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

Erwartungswert für A:

$$\mu_A = \frac{1}{5} \cdot (5 + 4 + 6 + 3 + 2) = \frac{20}{5} = 4$$

Erwartungswert für B:

$$\mu_B = \frac{1}{5} \cdot (5 + 2 + 3 + 4 + 1) = \frac{15}{5} = 3$$

3.2 Varianz und Standardabweichung

Gemessen wird die durchschnittliche Abweichung der einzelnen Realisationen von ihrem Erwartungswert.

$$\text{Formel 3: } \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2 \text{ (Varianz)}$$

$$\text{Formel 4: } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2} \text{ (Standardabweichung)}$$

Varianz und Standardabweichung für A:

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{5} \cdot (5^2 + 4^2 + 6^2 + 3^2 + 2^2) - 4^2 = 18 - 16 = 2$$
$$\sigma_A = \sqrt{2} \approx 1,4142$$

Varianz und Standardabweichung für B:

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{5} \cdot (5^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2) - 3^2 = 11 - 9 = 2$$
$$\sigma_B = \sqrt{2} \approx 1,4142$$

3.3 Kovarianz und Korrelationskoeffizient

Die Kovarianz ist ein Maß für die Richtung und das Ausmaß mit dem sich zwei Wertreihen entwickeln.

$$\text{Formel 5: } \text{COV} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - (\bar{x} \cdot \bar{y}) = \rho \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B = \sigma_{A,B}$$

$$\text{COV} = \frac{1}{5} \cdot (25 + 8 + 18 + 12 + 2) - 4 \cdot 3 = 13 - 12 = 1 = 0,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

Der Korrelationskoeffizient gibt nur die Richtung an, sein Wertebereich ist daher: $-1 \leq \rho \leq 1$.

$$\text{Formel 6: } \rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sigma_{A,B}}{\sigma_A \cdot \sigma_B}$$
$$\rho = \frac{2 + 0 + 0 - 1 + 4}{\sqrt{(1 + 0 + 4 + 1 + 4) \cdot (4 + 1 + 0 + 1 + 4)}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

4. Dominanz von Investitionen

Investitionsalternativen	Erwartungswert der Renditen % (μ)	Risiko (σ)
A	9	10
B	15	15
C	9	20
D	15	30
E	20	30

Tab. 4: Investitionsalternativen

A dominiert C, da bei gleicher Rendite weniger Risiko in Kauf zu nehmen ist.

B dominiert D, da ebenfalls bei gleicher Rendite weniger Risiko in Kauf zu nehmen ist.

E dominiert D, da bei gleichem Risiko der Erwartungswert der Rendite größer ist.

Die dominierten Investitionen können gestrichen werden.

5. Effizienzlinie

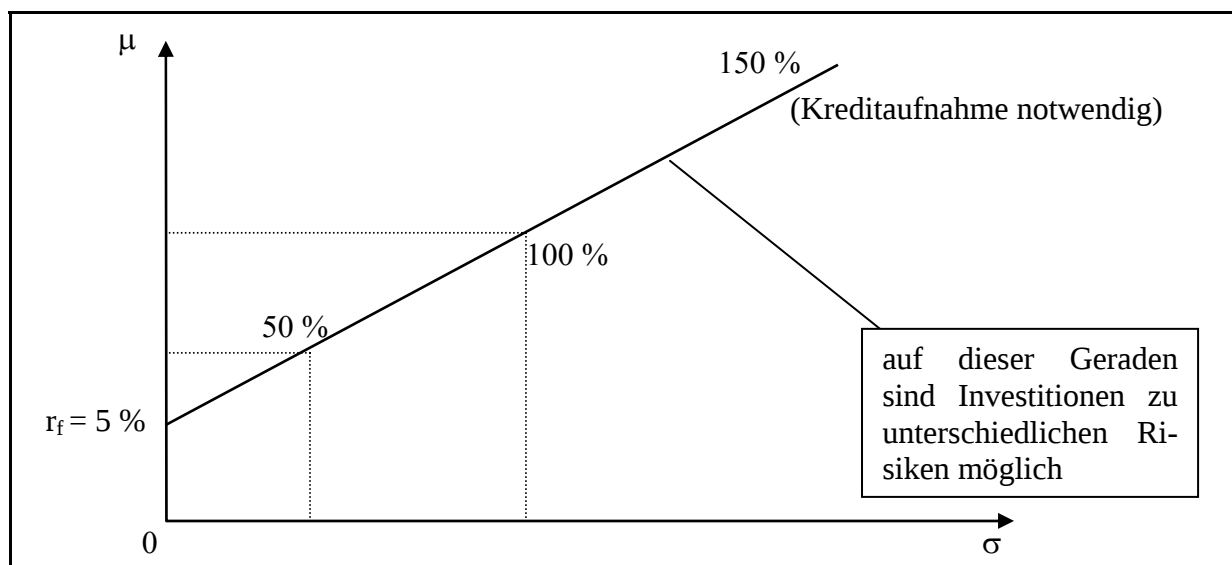


Abb. 3: Investition im μ - σ -Raum

Die Investition in ein Portfolio wie in Abb. 3 dargestellt setzt sich zusammen aus einer risikolosen und einer risikobehafteten Anlage. Auf der Effizienzlinie kann man sich dann entsprechend der eigenen Risikopräferenz ein Portfolio zusammenstellen. Man kann z. B. nicht voll in die unsichere Investition (100 %) investieren, sondern die Hälfte zum risikolosen Zins r_f anlegen (50 %). Die Verringerung des Risikos erfolgt allerdings zu lasten der Rendite, die dadurch nun sinkt.

x	sei der Anteil der risikobehafteten Anlage
x - 1	sei der Anteil der risikolosen Anlage

Es wird nun eine Gerade unterstellt. Hierfür lässt sich eine Geradengleichung formulieren.

$$y = m \cdot x + z$$

speziell für den μ - σ -Raum:

$$\mu = m \cdot \sigma + z$$

Die Steigung der Geraden lässt sich nun wie folgt bestimmen

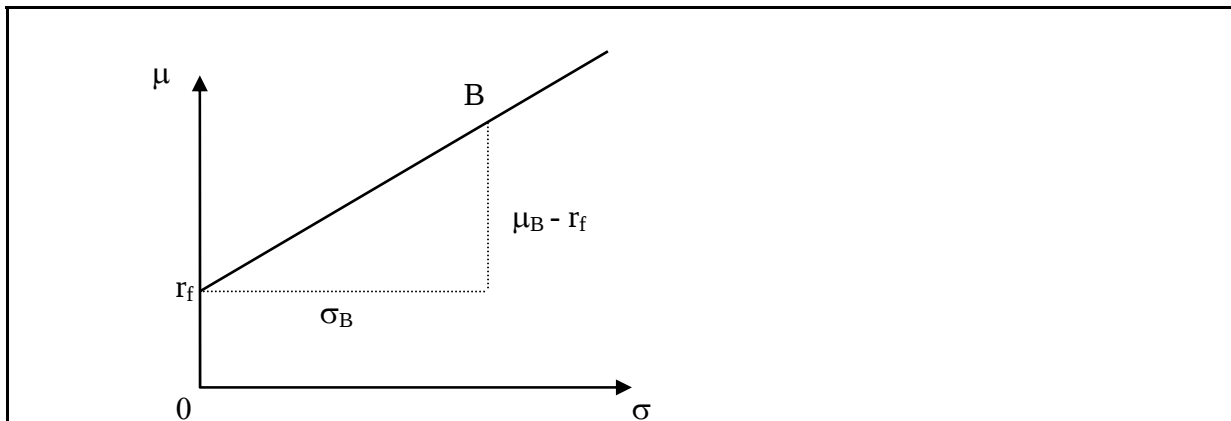


Abb. 4: Bestimmung der Steigung

Obige Abbildung verdeutlicht, daß sich die Gerade aus dem Achsenabschnitt r_f und der Steigung der Geraden, bestimmt durch das Steigungsdreieck, zusammensetzt. Es läßt sich somit festhalten:

$$\mu = r_f + \frac{\mu_B - r_f}{\sigma_B} \cdot \sigma$$

als Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_f \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \sigma_B \\ \mu_B \end{pmatrix}$$

Graphisch lassen sich die möglichen Anteile der risikolosen und der risikobehafteten Anteile wie folgt darstellen.

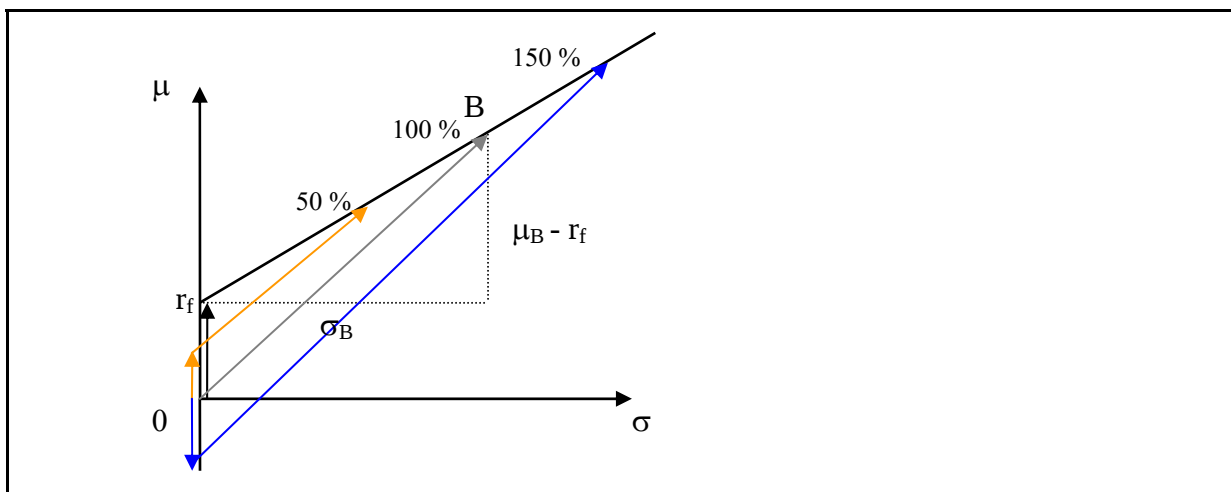


Abb. 5: Kombinationen risikoloser und -behafteter Anlagen

In vorstehender Abbildung werden einige mögliche Kombinationen von risikoloser und risikobehafteter Anlage dargestellt.

gesucht: $\vec{y} = \begin{pmatrix} \sigma \\ \mu \end{pmatrix}$

Lösungsweg:

$$\bar{y} = (1-x) \cdot \bar{a} + x \cdot \bar{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma \\ \mu \end{pmatrix} = (1-x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r_f \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} \sigma_B \\ \mu_B \end{pmatrix}$$

$$\text{I: } \sigma = (1-x) \cdot 0 + x \cdot \sigma_B \Leftrightarrow \sigma = x \cdot \sigma_B \Leftrightarrow x = \frac{\sigma}{\sigma_B}$$

$$\text{II: } \mu = (1-x) \cdot r_f + x \cdot \mu_B \Leftrightarrow \mu = r_f + x \cdot (\mu_B - r_f)$$

$$\text{I in II: } \mu = r_f + \frac{\mu_B - r_f}{\sigma_B} \cdot \sigma \quad \text{q.e.d.}$$

Durch die Wahl eines bestimmten Risikos ergibt sich über einen linearen funktionalen Zusammenhang auch die Rendite.

Ein $x > 1$ lässt sich ökonomisch als Kreditaufnahme interpretieren. Abb. 5 zeigt dies durch die blauen Vektoren.

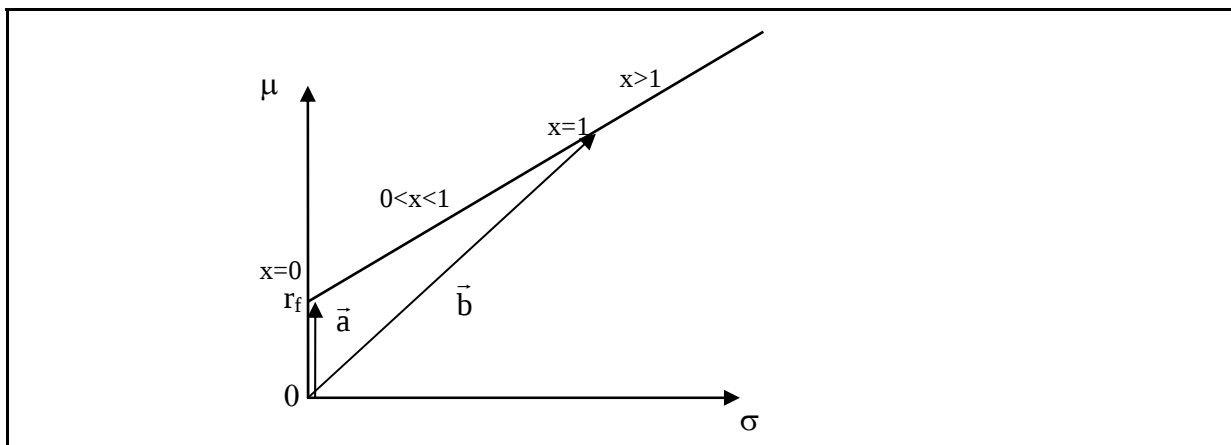


Abb. 6: Portfoliokombinationen