Wann und wieso dürfen wir $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ als Bruch behandeln?

In manchen Rechnungen erscheint es uns so selbstverständlich, Differentiale wegzukürzen, dass wir selbst schon vergessen, dass es sich keinesfalls um Brüche handelt und dass wir in diesem Fall die Notation missbrauchen. Wir fragen uns:

Wieso funktioniert diese Vorgehensweise, wenn sie eigentlich nicht erlaubt ist?

Bei der Schreibweise $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ handelt es sich in der Tat nicht um einen Bruch, sondern um die LEIBNIZ-Notation der Ableitung. Ist $y = f(x)$ eine Funktion in x, so gilt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Betrachten wir nun drei wichtige Fälle, in denen diese Schreibweise üblich ist.

Die Kettenregel. Die Ableitung einer Verkettung berechnen wir durch

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Setzt man $u = g(x)$ und $y = f(u)$, hat die Regel in Leibniz-Notation die Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

und es erscheint, als hätten wir einfach den „Bruch“ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ mit $\mathrm{d}u$ „erweitert“.

Integration durch Substitution. Als Folgerung aus der Kettenregel gilt

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\mathrm{d}t \text{ mit } x = g(t),$$

denn ist $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ und wir leiten nach t ab, folgt

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F(g(t))}{\mathrm{d}t} = f(g(t)) \cdot g'(t).$$

Betrachten wir ein Beispiel und berechnen $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ per Substitution $u = \sqrt{x}$. In unserer üblichen, aber leider unsauberen Schreibweise rechnen wir nun

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$$
$$\Longrightarrow \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos u}{u} 2u\,\mathrm{d}u = 2\int \cos u\,\mathrm{d}u = 2\sin u = 2\sin(\sqrt{x}).$$

Dieses Ergebnis ist richtig, aber streng genommen haben wir in der oberen Zeile die Notation missbraucht – $\mathrm{d}u$ und $\mathrm{d}x$ haben alleine keine Bedeutung. In Wirklichkeit haben wir $u = g(x) := \sqrt{x}$ nach x abgeleitet ($\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$) und den Ausdruck so umgeschrieben, dass sich obige Regel anwenden lässt:

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \cos(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \cos(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = 2\int \cos u\,\mathrm{d}u.$$

Wieso diese im Ansatz inkorrekte Rechnung trotzdem das richtige Ergebnis liefert, zeigt sich, wenn wir die Regel mit $x = g(t)$ in Leibniz-Notation schreiben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\mathrm{d}t = \int f(x) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

Uns ist nun klar: formell sauber lautet die obere Zeile unserer Rechnung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; 2\sqrt{x}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \;\Rightarrow\; 2u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$$

und wir ersetzen theoretisch nicht $\mathrm{d}x$ durch $2u\,\mathrm{d}u$, sondern formen wie folgt um:

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos u}{u} \cdot 1\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos u}{u} \cdot 2u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = 2\int \cos u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

und nun dürfen wir die Substitutionsregel anwenden:

$$2\int \cos u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = 2\int \cos u\,\mathrm{d}u,$$

wobei anzumerken ist, dass dies nichts mit Kürzen von Brüchen zu tun hat!

Trennung der Variablen. Lösen wir separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung, so schreiben wir unseren Rechnungsansatz oft wie folgt auf:

$$y' = g(x)h(y) \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y) \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist formell ebenso unsauber wie die vorherigen Beispiele. Besser wäre:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y) \;\Rightarrow\; \frac{1}{h(y)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{h(y)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei nun aus der Substitutionsregel (vgl. obige Formel) der letzte Schritt folgt:

$$\int \frac{1}{h(y)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Betrachten wir dies noch am Beispiel $y' = 2xy$: formell sauber würden wir nicht

$$y' = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x$$

schreiben, zumal Ausdrücke wie $\frac{\mathrm{d}y}{y}$ oder $2x\,\mathrm{d}x$ alleinstehend nicht einmal eine Bedeutung besitzen, sondern wir würden die Rechnung wie folgt notieren:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x \;&\Rightarrow\; \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int 2x\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow\; \ln y = x^2 + C \\ &\Rightarrow\; y = \mathcal{C}e^{x^2}.\end{aligned}$$

Fazit: Auch wenn es intuitiv erscheint, Differentiale wie Brüche zu behandeln, sollten wir nie vergessen, dass es schlicht und einfach keine Brüche sind und dass wir uns die unsauberen Rechen- und Schreibweisen nicht angewöhnen sollten, da sie, wenn man sie auf partielle Ableitungen überträgt, falsche Ergebnisse liefern!