MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BAYREUTH
Prof. J. Winkelmann, M. Seehafer

WS 07/08
-Blatt 12-
15.01.08

Gewöhnliche Differentialgleichungen

46. (HA, 2 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man zeige: A ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn für jede Lösung φ der Differentialgleichung $y' = Ay$ gilt $\|\varphi(x)\| = const$ (unabhängig von x).

47. (HA, 6 Punkte) Gegeben sei das System

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} y. \tag{1}$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem an.

(b) Lösen Sie (1) mit der Anfangsbedingung $y(0) = (0, 4, 0, 7)^t$.

48. (ÜA) Betrachten Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = 4y(1 - y^2). \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie eine stetig differenzierbare Funktion $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: Für jede (auf einem Intervall I definierte) Lösung y von (2) ist $t \mapsto H(y(t), y'(t))$ auf I konstant.

(b) Finden Sie die Gleichgewichtspunkte (d.h. die stationären Lösungen der Gleichung). Zeigen Sie weiter, dass in den den Gleichgewichtpunkten entsprechenden Punkten des Phasenraumes der Gradient von H verschwindet. Prüfen Sie, ob es sich um Extrema handelt und klassifizieren Sie. Können Sie etwas über das Verhalten von Lösungen mit Anfangswerten nahe den Gleichgewichtspunkten sagen?

Hinweis zu a): Sie können H finden, indem Sie beide Seiten von (2) mit y' multiplizieren.

49. (ÜA) Es sei $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Betrachtet werde das autonome System $\dot{x} = f(x)$ mit der Flussabbildung φ und die in Aufgabe 39 definierten ω-Grenzmengen $L_\omega(\xi)$. Nehmen Sie an, dass $\xi \in G$ vorgelegt ist mit der Eigenschaft, dass $O^+(\xi) := \{\varphi(t,\xi) : t \in [0, I^+_{max}(\xi)[\}$ beschränkt ist und $\overline{O^+(\xi)} \subset G$. Zeigen Sie, dass $L_\omega(\xi)$ zusammenhängend ist und dass

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t,\xi), L_\omega(\xi)) = 0.$$

Zu bearbeiten bis: 22.01.08