Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 1

Abgabetermin: 14. April 2000

1. Bestimme die ersten Koeffizienten a_0, a_1, a_2 der Potenzreihenentwicklung $\sum a_k x^k$ der Funktionen

$$\sin(xe^x),\ e^{\cos x},\ \frac{x^2}{1+\sin x},\ \log\left(4+x^2\right).$$

2. Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}x^k,\ \sum_{n=0}^{\infty}(\sin n)\,x^n,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(4k^3+3k^4\right)x^k,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^k+1\right)^2 x^k,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right)x^k,$$

3. Zeige: Die für $s > 1$ durch $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ definierte Riemannsche Zetafunktion ist differenzierbar.

4. Zeige: Die Funktionenfolge $g_n(x) = \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}$ konvergiert auf $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ gleichmäßig gegen konstant Null, aber

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} g_n(x)dx = 1.$$

5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) = x/\left(n(1+nx^2)\right)$. Zeige: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und definiert eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion ϕ.

(*) 6. Zeige: Für die oben definierte Funktion ϕ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} x\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Webpage: `http://www.math.unibas.ch/~winkel/infini2.html`