Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 8

Abgabetermin: 17. Dezember 1999

1. Sei
$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$
und
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$
Zeige $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ konvergieren, nicht aber $\sum_n c_n$.

2. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

   Zeige: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

3. Berechne $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

4. Sei $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \to U$ stetig, $a \in U$ und x_n eine Folge in U sodass $\lim x_n = a$ und $x_{n+1} = f(x_n)$.

   Zeige: $f(a) = a$.

5. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

(∗) 6. Für $x \in \mathbb{Q}$ sei $q(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : nx \in \mathbb{Z}\}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch
$$f(x) = \begin{cases} 1/q(x) & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
definiert.

   Zeige, dass f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn $x \notin \mathbb{Q}$.