

## XIV Gewöhnliche Differentialgleichungen

**Definition 14.1 :** *Gewöhnliche DGL n-ter Ordnung*

Sei  $n \in \mathbb{N}$  ,  $F : D(F) \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ .

a)  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  heißt *gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) n-ter Ordnung*. Läßt sich  $F = 0$  nach  $y^{(n)}$  auflösen, d.h.: existiert  $f : D(f) \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  , so heißt diese DGL eine *explizite* (sonst *implizite*) DGL n-ter Ordnung.

b) Eine Funktion  $y \in C^n(I)$  (d.h.: n-mal stetig differenzierbar in  $I \subset \mathbb{R}$ ) heißt *Lösung* der DGL in  $I$ , wenn  $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))^T \in D(F)$  und  $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$ .

c) Sind zusätzlich zur DGL noch *Anfangsbedingungen*

$y(\xi) = \eta_0$  ,  $y'(\xi) = \eta_1$  , ... ,  $y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$  mit  $\xi \in I$  und  $\eta_i \in \mathbb{R}$  gegeben, und erfüllt  $y$  als Lösung auch diese Anfangsbedingungen, so heißt  $y$  Lösung der *Anfangswertaufgabe (AWA)*.

Wir wollen uns zunächst mit expliziten DGL 1. Ordnung beschäftigen. Hierbei werden wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die DGL 1. Ordnung mit zusätzlicher Anfangsbedingung  $y(\xi) = \eta$  lösbar bzw. eindeutig lösbar ist.

### Explizite DGL 1. Ordnung mit Anfangsbedingung

Gegeben: AWA 1. Ordnung

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(\xi) = \eta$$

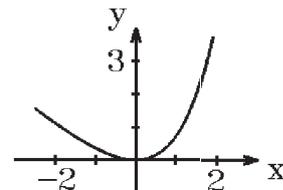
*Geometrische Anschauung*

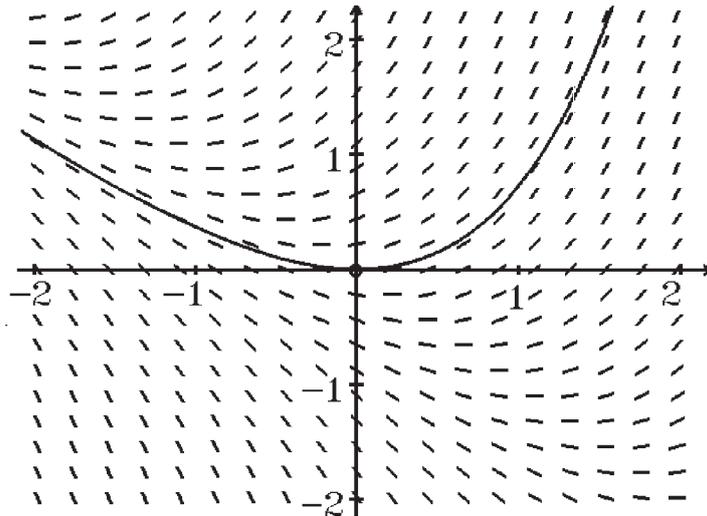
*Richtungsfeld*

Ist  $y$  Lösung der DGL, so muß ja gelten:  $y'(x) = f(x, y(x))$ , also ist die Steigung von  $y(x)$  an der Stelle  $x$  gleich  $f(x, y(x))$ . Zeichnet man also in möglichst vielen Punkten  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ein Stück Tangente mit der Steigung  $y' = f(x, y)$  ein, so erhält man ein *Richtungsfeld*, aus dem man den ungefähren Verlauf der Lösungskurve der AWA ablesen kann, wenn man bei  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  beginnt.

**Beispiel**  $y' = x + y$  ,  $y(0) = 0$

Exakte Lösung:  $y(x) = e^x - 1 - x$  .

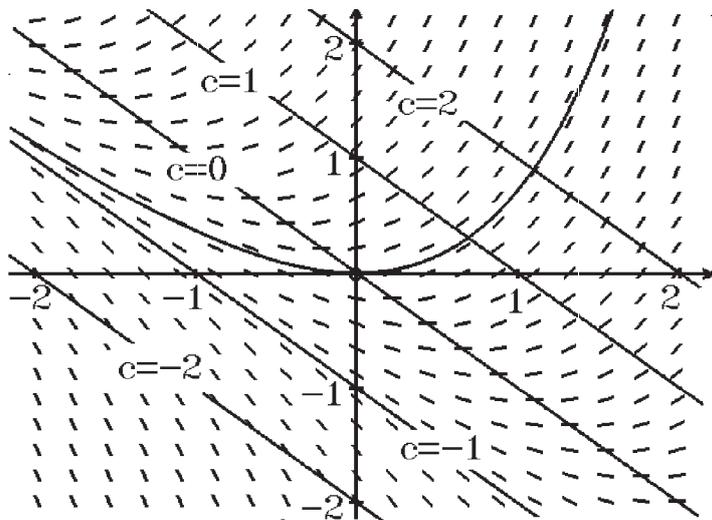




Richtungsfeld für die AWA  $y' = x + y$ ,  $y(0) = 0$

### Isoklinen

Eine Hilfe, das Richtungsfeld schneller zeichnen zu können, bilden die *Isoklinen*. Das sind Kurven *gleicher Steigung*, also  $K_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : f(x, y) = c \right\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .



Isoklinen für die AWA  $y' = x + y$ ,  $y(0) = 0$

Die Isoklinen bei diesem Beispiel sind:  $x + y = c \Rightarrow y = c - x \Rightarrow$  Geraden mit der Steigung  $(-1)$ .

Wir werden nun untersuchen, unter welchen Voraussetzungen eine AWA 1. Ordnung lösbar bzw. eindeutig lösbar ist. Eine Bedingung, die dabei eine wichtige Rolle spielt, ist die *Lipschitzbedingung*.

**Definition 14.2 :** Lipschitzbedingung

Sei  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f$  genügt auf  $D$  einer Lipschitzbedingung bzgl.  $y \Leftrightarrow \exists M > 0$  mit

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq M|y - \tilde{y}| \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \in D$$

**Bemerkung 14.3 :**

Existiert in  $D \subset \mathbb{R}^2$  die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial y}$  und ist  $\frac{\partial f}{\partial y}$  in  $D$  stetig und beschränkt mit  $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq M \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Rightarrow f$  genügt auf  $D$  einer Lipschitzbedingung bzgl.  $y$ .

*Beweis :* Dies folgt sofort aus dem Mittelwertsatz.

**Beispiel**

$$f(x, y) = h(x)g(y) \quad \text{auf } D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \right\}$$

mit  $h$  stetig in  $[a, b]$  und  $g$  stetig differenzierbar in  $[c, d]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| &= |h(x)||g(y) - g(\tilde{y})| \leq \max_{x \in [a, b]} |h(x)| \cdot \max_{y \in [c, d]} |g'(y)||y - \tilde{y}| \\ &\leq M|y - \tilde{y}| \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \in D \\ \Rightarrow f &\text{ genügt auf } D \text{ einer Lipschitzbedingung bzgl. } y. \end{aligned}$$

**Satz 14.4 :** Existenz- und Eindeigkeitsatz von Picard-Lindelöf

Sei  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  und  $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : |x - \xi| \leq \alpha, |y - \eta| \leq \beta \right\}$ .

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $I$ ;  $f$  genüge auf  $I$  einer Lipschitzbedingung bzgl.  $y$ .

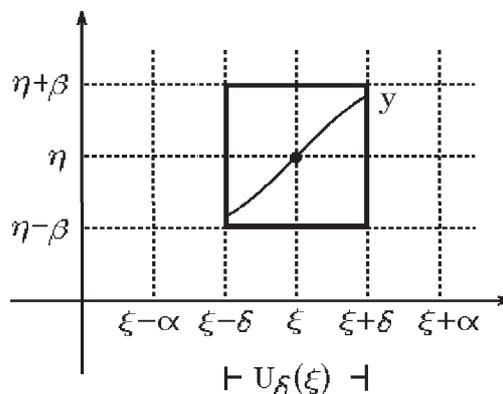
Sei  $K = \max_{(x, y)^T \in I} |f(x, y)|$ ,  $\delta = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{K}\right\}$ .

Dann existiert in

$$U_\delta(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta\}$$

genau eine Lösung  $y$  der

$$\text{AWA } y' = f(x, y) \quad \text{mit } y(\xi) = \eta.$$



**Bemerkung :**

Der Satz gilt auch, wenn  $\beta = \infty$  ist. Dann ist  $\delta = \alpha$ , und die eindeutige Lösung  $y$  existiert in  $U_\alpha(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \alpha\}$ .

*Beweisidee:*

Es gilt:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(\xi) = \eta \quad \forall x \in U_\delta(\xi)$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t)) dt \quad \forall x \in U_\delta(\xi),$$

$$\text{denn: } y(x) - y(\xi) = y(x) - \eta = \int_\xi^x y'(t) dt = \int_\xi^x f(t, y(t)) dt .$$

Auf  $U_\delta(\xi)$  wird nun eine Folge von Funktionen  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgendermaßen definiert:  
*Verfahren von Picard-Lindelöf*

$$y_0(x) \equiv \eta, \quad y_n(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in U_\delta(\xi)$$

Von dieser Funktionenfolge wird nun gezeigt:

$y_n \rightarrow y$  gleichmäßig auf  $U_\delta(\xi)$ .

Da  $y_n$  stetig in  $U_\delta(\xi) \Rightarrow y$  stetig in  $U_\delta(\xi)$ .

Da  $|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \leq M|y_n(x) - y(x)| \quad \forall x \in U_\delta(\xi)$

$\Rightarrow f(x, y_n(x)) \rightarrow f(x, y(x))$  gleichmäßig auf  $U_\delta(\xi)$

$$\Rightarrow \int_\xi^x f(t, y_n(t)) dt \rightarrow \int_\xi^x f(t, y(t)) dt \Rightarrow y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t)) dt \text{ auf } U_\delta(\xi).$$

Nun muß noch gezeigt werden, daß  $y$  einzige Lösung in  $U_\delta(\xi)$  ist.

(ausführlicher Beweis siehe Literatur).

**Bemerkung :**

Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis zum Fixpunktsatz (vgl. [S.346](#)). Dort hatten wir es mit Zahlenfolgen zu tun, hier mit Funktionenfolgen. Auch dort war die Lipschitzbedingung (mit  $L < 1$ ) wesentliche Voraussetzung.

**Bemerkung :**

Satz 14.4 sichert also die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung in einer Umgebung der Anfangsstelle  $\xi$ . Der Beweis (konstruktiver Beweis) liefert gleichzeitig ein Verfahren, mit dem die gesuchte Lösung angenähert werden kann. Dieses Verfahren ist aber für die Praxis nicht besonders gut geeignet (man erhält nur sehr grobe Annäherungen, und in jedem Schritt muß ein Integral berechnet werden). Wir werden später Näherungsverfahren behandeln, die für die Praxis besser geeignet sind.

**Beispiel für Verfahren von Picard-Lindelöf**

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0.$$

Da für  $f(x, y) = x + y$  gilt:  $f$  stetig in  $\mathbb{R}^2$  und  $f_y = 1$  stetig und beschränkt in  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  Lipschitzbedingung bzgl.  $y$  erfüllt in  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  Voraussetzungen des Satzes 14.4 erfüllt für  $\alpha = \beta = \infty \Rightarrow$  existiert eindeutig Lösung in  $\mathbb{R}$ .

Verfahren von Picard-Lindelöf:  $y_0(x) \equiv 0$ ,

$$y_n(x) = 0 + \int_0^x (t + y_{n-1}(t)) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ also}$$

$$y_1(x) = \int_0^x (t + 0) dt = \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = \int_0^x (t + \frac{t^2}{2}) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!},$$

$$y_3(x) = \int_0^x (t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Behauptung:  $y_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!}.$

Beweis per Induktion:  $n = 1$  (klar)

$$n \rightarrow n + 1: \quad y_{n+1}(x) = \int_0^x \left( t + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^k}{k!} \right) dt = \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow y_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \rightarrow y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 - x$$

$\Rightarrow y(x) = e^x - 1 - x$  ist einzige Lösung der AWA  $y' = x + y$ ,  $y(0) = 0$  in  $\mathbb{R}$ .

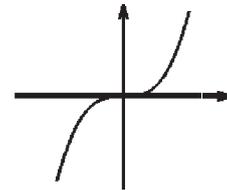
**Beispiel:** keine Eindeutigkeit

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0 \quad (\text{vgl. S.232}).$$

Lösungen:  $y(x) \equiv 0$

$$y(x) = x^3$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , \text{falls } x < 0 \\ x^3 & , \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$



Hier ist  $f(x, y) = 3y^{2/3}$ , also existiert  $f_y$  in  $(0)$  nicht.

$f$  genügt nicht der Lipschitzbedingung bzgl.  $y$  in  $U((0))$ .

Es gilt aber:  $f$  ist stetig in  $U((0))$ . Aus dem nächsten Satz folgt dann die Existenz der Lösung in  $U_\delta(0)$ , aber nicht die Eindeutigkeit.

**Satz 14.5 :** Existenzsatz von Peano

Sei  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  und  $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : |x - \xi| \leq \alpha, |y - \eta| \leq \beta \right\}$ .

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $I$ , sei  $K = \max_{(x,y)^T \in I} |f(x, y)|$ ,  $\delta = \min\{\alpha, \frac{\beta}{K}\}$ .

Dann existiert in  $U_\delta(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta\}$

mindestens eine Lösung  $y$  der AWA  $y' = f(x, y)$  mit  $y(\xi) = \eta$ .

*Beweis :* siehe Literatur, z.B.: Stepanow: Lehrbuch der DGL.

Wir werden nun einige spezielle DGL 1. Ordnung behandeln, die sich exakt lösen lassen.

1. *Trennung der Variablen* (vgl. S.231)

$$y' = f(x)g(y) \quad , \quad y(\xi) = \eta$$

Ist  $f$  stetig in  $[a, b]$  mit  $\xi \in [a, b]$  und  $g$  stetig differenzierbar in  $[c, d]$  mit  $\eta \in [c, d] \Rightarrow$  die AWA ist eindeutig lösbar in  $U_\delta(\xi)$  (nach Satz 14.4 und Beispiel S.481).

a) Sonderfall: Ist für ein  $y$   $g(y) = 0$ , so untersuche man, ob  $y$  Lösung der AWA.

b) Sei  $g(y) \neq 0 \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$  ergibt Lösungen der DGL. Anfangsbedingung einsetzen ergibt die gesuchte Lösung.

2.

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) \quad , \quad y(\xi) = \eta$$

Sind  $f$  und  $f_y$  stetig in  $\bar{U}(\frac{\xi}{\eta}) \Rightarrow$  AWA ist eindeutig lösbar (nach Satz 14.4 und Bem. 14.3).

*Fallunterscheidungen*

a)  $b = 0, \beta = 0$  (d.h.:  $f$  ist nur von  $x$  abhängig)

$\Rightarrow y' = \tilde{f}(x) \Rightarrow y$  ist Stammfunktion von  $\tilde{f}$ .

b)  $\alpha = \beta = 0, b \neq 0$

$\Rightarrow y' = \tilde{f}(ax + by + c) \Rightarrow u' = a + b\tilde{f}(u)$  (lösbar mit Trennung der Variablen),

denn: Substitution  $u(x) = ax + by + c \Rightarrow u' = a + by' = a + b\tilde{f}(u)$ .

c)  $a = c = \beta = \gamma = 0$

$\Rightarrow y' = \tilde{f}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}(\tilde{f}(u) - u)$  (lösbar mit Trennung der Variablen),

denn: Substitution  $u(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow u' = \frac{xy'(x) - y(x)}{x^2} = \frac{1}{x}(y'(x) - \frac{y(x)}{x})$

$\Rightarrow u' = \frac{1}{x}(\tilde{f}(u) - u)$ .

d)  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0, \beta \neq 0$  ( $\beta = 0 \Rightarrow \alpha b = 0 \Rightarrow$  Fall a) oder b))

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  linear abhängig  $\Rightarrow \exists \lambda$  mit  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .

$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) \Rightarrow u' = \alpha + \beta f\left(\frac{\lambda u - \lambda \gamma + c}{u}\right) = \tilde{f}(u)$  (lösbar mit Trennung der Variablen),

denn: Substitution  $u(x) = \alpha x + \beta y + \gamma \Rightarrow u' = \alpha + \beta y'$   
 $\Rightarrow u'(x) = \alpha + \beta f\left(\frac{\alpha x + \beta y + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) = \alpha + \beta f\left(\frac{\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma) - \lambda\gamma + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$   
 $= \alpha + \beta f\left(\frac{\lambda u - \lambda\gamma + c}{u}\right) = \tilde{f}(u).$

e)  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  mit  $\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -\gamma \end{pmatrix}.$

$y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) \Rightarrow v' = f\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{\alpha + \beta\frac{v}{u}}\right) = \tilde{f}\left(\frac{v}{u}\right)$  (lösbar nach c),

denn: Substitution  $u = x - x_0, v(u) = y(x) - y_0 \Rightarrow v'(u) = y'(x)$   
 $\Rightarrow v'(u) = y'(x) = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + c - \alpha x_0 - \beta y_0 - c}{\alpha x + \beta y + \gamma - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma}\right) = f\left(\frac{a(x - x_0) + b(y - y_0)}{\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)}\right)$   
 $= f\left(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{\alpha + \beta\frac{v}{u}}\right) = \tilde{f}\left(\frac{v}{u}\right).$

### Beispiele

zu b)  $y' = (x + y)^2, y(0) = 0.$

Für  $f(x, y) = (x + y)^2$  gilt:

$f, f_y$  sind stetig in  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  AWA ist eindeutig lösbar in  $U(0)$ .

Substitution:  $u(x) = x + y(x) \Rightarrow u' = 1 + y' = 1 + u^2 \Rightarrow u' = 1 + u^2$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1 + u^2} du = \int dx \Rightarrow \arctan u = x + c \Rightarrow u(x) = \tan(x + c)$

$\Rightarrow y(x) = \tan(x + c) - x, c \in \mathbb{R}$  (allgemeine Lösung).

$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = \tan c = 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow y(x) = \tan x - x$  ist Lösung der AWA in  $U(0) = \{x : |x| < \pi/2\}.$

zu c)  $y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}, y(2) = -8/3.$

Für  $f(x, y) = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$  gilt:  $f, f_y$  sind stetig in  $\bar{U}((-2/8/3)) \Rightarrow$  AWA ist eindeutig lösbar in  $U(2)$ .

$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) = u^2 + 2u = \tilde{f}(u)$  mit  $u = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow u' = \frac{1}{x}(\tilde{f}(u) - u) = \frac{1}{x}(u^2 + 2u - u) = \frac{u^2 + u}{x}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{u(1+u)} du = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u+1} du = \ln|x| + c_1$

$\Rightarrow \ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + c_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = \ln|x| + c_1$

$\Rightarrow \frac{u}{u+1} = cx \Rightarrow u = cx(u+1) \Rightarrow u(1-cx) = cx$

$\Rightarrow u(x) = \frac{cx}{1-cx}$  oder  $u \equiv 0$  oder  $u \equiv -1$  (Sonderfälle)

$\Rightarrow y(x) = \frac{cx^2}{1-cx}$  oder  $y \equiv 0$  oder  $y(x) = -x$  (Sonderfälle) sind alle Lösungen der DGL.

$y(2) = -8/3 \Rightarrow y \equiv 0$  und  $y(x) = -x$  erfüllen die Anfangsbedingung nicht, aber

$$y(2) = \frac{4c}{1-2c} = -\frac{8}{3} \Rightarrow c = 2,$$

$y(x) = \frac{2x^2}{1-2x}$  ist Lösung der AWA in  $U(2) = (\frac{1}{2}, \infty)$ .

zu d)  $y' = \frac{4x-2y-2}{2x-y+3}$ ,  $y(0) = 0$ .

Für  $f(x, y) = \frac{4x-2y-2}{2x-y+3}$  gilt:  $f, f_y$  sind stetig in  $\bar{U}(\binom{0}{0}) \Rightarrow$  AWA ist eindeutig lösbar in  $U(0)$ .

$$\det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 2.$$

Substitution:  $u(x) = 2x - y + 3 \Rightarrow u' = 2 - y' = 2 - \frac{2(2x - y + 3) - 6 - 2}{2x - y + 3}$

$$\Rightarrow u' = 2 - \frac{2u - 8}{u} = \frac{8}{u}$$

$$\Rightarrow \int u \, du = 8 \int dx \Rightarrow \frac{u^2}{2} = 8x + c_1 \Rightarrow u^2 = 16x + c$$

$$\Rightarrow y(x) = 3 + 2x \pm \sqrt{16x + c}.$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = 3 \pm \sqrt{c} = 0 \Rightarrow c = 9 \text{ und } (-)\text{-Zeichen}$$

$$\Rightarrow y(x) = 3 + 2x - \sqrt{16x + 9} \text{ ist die Lösung der AWA in } U(0) = (-\frac{9}{16}, \infty).$$

zu e)  $y' = \frac{x-y+3}{x+y+1}$ ,  $y(0) = 0$ .

Für  $f(x, y) = \frac{x-y+3}{x+y+1}$  gilt:  $f, f_y$  sind stetig in  $\bar{U}(\binom{0}{0}) \Rightarrow$  AWA ist eindeutig lösbar in  $U(0)$ .

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Substitution:  $u = x + 2, v = y - 1$

$$\Rightarrow v' = y' = \frac{(x+2) - (y-1)}{(x+2) + (y-1)} = \frac{u-v}{u+v} = \frac{1 - \frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}} = \tilde{f}\left(\frac{v}{u}\right).$$

Weitere Substitution:  $w(u) = \frac{v(u)}{u}$

$$\Rightarrow w' = \frac{1}{u}(\tilde{f}(w) - w) = \frac{1}{u}\left(\frac{1-w}{1+w} - w\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1-2w-w^2}{1+w}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+w}{1-2w-w^2} \, dw = \int \frac{1}{u} \, du \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln |w^2 + 2w - 1| = \ln |u| + c_1$$

$$\Rightarrow \ln |w^2 + 2w - 1| = \ln(u^{-2}) + c_2 \Rightarrow w^2 + 2w - 1 = \frac{c}{u^2}$$

(Sonderfall  $w^2 + 2w - 1 = 0$  für  $c = 0$  enthalten).

$$\text{Mit } w = \frac{v}{u} \Rightarrow \frac{v^2}{u^2} + \frac{2v}{u} - 1 = \frac{c}{u^2} \Rightarrow v^2 + 2uv - u^2 = c$$

$$\Rightarrow v(u) = -u \pm \sqrt{c + 2u^2} .$$

$$\text{Mit } u = x + 2 \text{ und } v = y - 1 \Rightarrow y(x) = 1 - (x + 2) \pm \sqrt{c + 2(x + 2)^2} .$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = -1 \pm \sqrt{c + 8} = 0 \Rightarrow c = -7 \text{ und (+)-Zeichen}$$

$\Rightarrow y(x) = -1 - x + \sqrt{2(x + 2)^2 - 7}$  ist die Lösung der AWA für  $x + 2 > \sqrt{7/2}$ , also in  $U(0) = (\sqrt{7/2} - 2, \infty)$ .

### 3. Lineare DGL 1. Ordnung (vgl. S.236)

$$y' = f(x)y + g(x) \quad , \quad y(\xi) = \eta$$

Sind  $f, g$  stetig in  $[a, b] = [\xi - \alpha, \xi + \alpha] \Rightarrow$  die AWA ist eindeutig lösbar in  $(a, b)$ .

Denn: Für  $F(x, y) = f(x)y + g(x)$  gilt:  $F$  und  $F_y = f(x)$  sind stetig und  $F_y$  beschränkt in  $[a, b] \times \mathbb{R}$ . Sind  $f, g$  stetig in  $\mathbb{R} \Rightarrow \alpha = \beta = \infty$  (vgl. Satz 14.4)  $\Rightarrow$  die AWA ist eindeutig lösbar in  $\mathbb{R}$ .

Da die DGL linear ist, setzt sich die allgemeine Lösung aus der allgemeinen Lösung  $y_h$  der zugehörigen homogenen DGL  $y' = f(x)y$  und einer partikulären Lösung  $y_0$  der inhomogenen DGL  $y' = f(x)y + g(x)$  zusammen, also  $y = y_h + y_0$  (vgl. S.236).

homogen:

$$y' = f(x)y \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int f(x) dx \Rightarrow \text{(mit } x_0 \in [a, b])$$

$$y_h(x) = c e^{\int_{x_0}^x f(t) dt} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL  $y' = f(x)y$

(Sonderfall  $y \equiv 0$  für  $c = 0$  enthalten).

partikuläre Lösung: Variation der Konstanten

$$\text{Ansatz: } y_0(x) = c(x)y_1(x) \text{ mit } y_1(x) = e^{\int_{x_0}^x f(t) dt} .$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\Rightarrow y_0'(x) = c'(x)y_1(x) + c(x)y_1'(x) = f(x)c(x)y_1(x) + g(x) \quad (\text{da } y_1'(x) = f(x)y_1(x))$$

$$\Rightarrow c'(x) = \frac{g(x)}{y_1(x)} \quad , \text{ falls } y_1(x) \neq 0 \Rightarrow c(x) = \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_1(t)} dt \Rightarrow$$

$$y_0(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_1(t)} dt$$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL  $y' = f(x)y + g(x)$ .

Also gilt (mit  $x_0 \in [a, b]$ )

$$y(x) = cy_1(x) + y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_1(t)} dt, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } y_1(x) = e^{\int_{x_0}^x f(t) dt}$$

ist allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen DGL  $y' = f(x)y + g(x)$ .

Ist die Anfangsbedingung  $y(\xi) = \eta$  gegeben  $\Rightarrow x_0 = \xi$ ,  $c = \eta$  ergibt die eindeutig bestimmte Lösung.

### Beispiele

a)  $y' = (-\sin x)y + 2 \sin x$ ,  $y(0) = 0$ .

$f(x) = -\sin x$ ,  $g(x) = 2 \sin x$  sind stetig in  $\mathbb{R} \Rightarrow$  AWA ist eindeutig lösbar in  $\mathbb{R}$ .

homogen:

$$y_1(x) = e^{\int (-\sin x) dx} = e^{\cos x} \Rightarrow y_h(x) = ce^{\cos x} \text{ ist allgemeine Lösung der homogenen DGL.}$$

partikuläre Lösung:

$$c(x) = \int \frac{2 \sin x}{e^{\cos x}} dx = \int 2 \sin x e^{-\cos x} dx = 2e^{-\cos x}$$

$\Rightarrow y_0(x) = e^{\cos x} \cdot 2e^{-\cos x} = 2$  ist partikuläre Lösung (diese partikuläre Lösung hätte man auch sofort sehen können)

$\Rightarrow y(x) = ce^{\cos x} + 2$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der DGL.

$$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = ce + 2 = 0 \Rightarrow c = -2/e \Rightarrow$$

$y(x) = (-2/e)e^{\cos x} + 2$  ist Lösung der AWA in  $\mathbb{R}$ .

b)  $y' = -\frac{1}{x}y + 1 + x$ ,  $y(1) = 0$ .

$f(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $g(x) = 1 + x$  sind stetig in  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$  AWA eindeutig lösbar in  $(0, \infty)$ .

homogen:

$$y_1(x) = e^{\int -(1/x) dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow y_h(x) = \frac{c}{x}$  ist allgemeine Lösung der homogenen DGL.

partikuläre Lösung:

$$c(x) = \int \frac{1+x}{\frac{1}{x}} dx = \int (x + x^2) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$\Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$  ist partikuläre Lösung

$\Rightarrow y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der DGL in  $(0, \infty)$ .

$$y(1) = 0 \Rightarrow y(1) = c + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow c = -\frac{5}{6}.$$

#### 4. Bernoullische DGL

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha, \quad y(\xi) = \eta, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$f, g$  stetig in  $[a, b]$  mit  $\xi \in [a, b]$ .

(Für  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = 1$  erhalten wir eine lineare DGL).

$y(x) \equiv 0$  ist Lösung der DGL für  $\alpha > 0$  (Sonderfall).

Die Substitution  $u(x) = y^{1-\alpha}(x)$  führt auf die lineare DGL für  $u$

$$u' = (1 - \alpha)f(x)u + (1 - \alpha)g(x)$$

Denn:  $u' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}(fy + gy^\alpha) = (1 - \alpha)fy^{1-\alpha} + (1 - \alpha)g$   
 $\Rightarrow u' = (1 - \alpha)fu + (1 - \alpha)g$ .

#### Beispiel

$$y' = -2xy - x^3y^3, \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3.$$

Für  $F(x, y) = -2xy - x^3y^3$  gilt:  $F, F_y$  sind stetig in  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  AWA eindeutig lösbar in  $U(0)$ .

$y(x) \equiv 0$  ist Lösung der DGL (erfüllt nicht die Anfangsbedingung).

Substitution  $u = y^{1-\alpha} = y^{-2}$  führt auf

$$u' = -2(-2xu) + (-2)(-x^3) = 4xu + 2x^3 \quad (\text{lineare DGL für } u),$$

$$\text{homogen: } u_h(x) = c e^{\int 4x \, dx} = c e^{2x^2},$$

$$\text{partikulär: } u_0(x) = e^{2x^2} \int \frac{2x^3}{e^{2x^2}} \, dx = e^{2x^2} \left( -\frac{1}{4}(2x^2 + 1)e^{-2x^2} \right) = -\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow u(x) = c e^{2x^2} - \frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Da } y^2(x) = \frac{1}{u(x)} \Rightarrow$$

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{c e^{2x^2} - \frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}}} \quad \text{oder } y(x) \equiv 0 \quad \text{sind alle Lösungen der DGL.}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = \pm \frac{1}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}} = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{4} \quad \text{und (+)-Zeichen} \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{5e^{2x^2} - 1 - 2x^2}} \quad (5e^{2x^2} > 1 + 2x^2 \text{ erfüllt } \forall x \in \mathbb{R})$$

ist eindeutig bestimmte Lösung der AWA in  $\mathbb{R}$ .

(Die Anfangsbedingung  $y(0) = 0$  würde die Lösung  $y(x) \equiv 0$  ergeben).

#### 5. Riccatische DGL

$$y' = f(x)y + g(x)y^2 + h(x), \quad y(\xi) = \eta$$

$f, g, h$  stetig in  $[a, b]$  mit  $\xi \in [a, b]$ .

Die allgemeine Lösung der Riccatischen DGL kann bestimmt werden, wenn eine Lösung  $y_0$  bekannt ist. Sei also  $y_0$  eine Lösung der gegebenen DGL, dann führt der Ansatz:  $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{u(x)}$  auf weitere Lösungen der DGL.

Für die unbekannte Funktion  $u$  erhält man die lineare DGL

$$u' = -(f(x) + 2g(x)y_0(x))u - g(x)$$

Denn:  $y' = y_0' - \frac{1}{u^2}u' = f \cdot (y_0 + \frac{1}{u}) + g \cdot (y_0 + \frac{1}{u})^2 + h = fy_0 + \frac{f}{u} + gy_0^2 + \frac{2gy_0}{u} + \frac{g}{u^2} + h.$

Da  $y_0' = fy_0 + gy_0^2 + h \Rightarrow -\frac{1}{u^2}u' = \frac{f + 2gy_0}{u} + \frac{g}{u^2}.$

Multiplikation mit  $-u^2$  ergibt  $u' = -(f + 2gy_0)u - g.$

### Beispiel

$y' = -(2x + 1)y + y^2 + (1 + x + x^2), \quad y(0) = 1/2.$

$f(x) = -(2x + 1), \quad g(x) = 1, \quad h(x) = 1 + x + x^2$  sind stetig in  $\mathbb{R}.$

Für  $F(x, y) = -(2x + 1)y + y^2 + (1 + x + x^2)$  gilt:  $F, F_y$  sind stetig in  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  AWA ist eindeutig lösbar in  $U(0).$

$y_0(x) = x$  ist eine Lösung der DGL (erfüllt nicht die Anfangsbedingung).

$y = y_0 + \frac{1}{u}$  führt auf die lineare DGL für  $u$

$u' = -(-(2x + 1) + 2x)u - 1 \Rightarrow u' = u - 1 \Rightarrow u' - u = -1$  (lineare DGL mit konstanten Koeffizienten),

homogen: charakteristisches Polynom:  $\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow u_h(x) = ce^x,$

partikulär:  $u_0(x) = 1$

$\Rightarrow u(x) = ce^x + 1 \Rightarrow$  (mit  $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{u(x)}$ )

$y(x) = x + \frac{1}{ce^x + 1}$  oder  $y(x) = x$  sind alle Lösungen der gegebenen DGL.

$y(0) = 1/2 \Rightarrow y(0) = \frac{1}{c + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$

$y(x) = x + \frac{1}{e^x + 1}$  ist die einzige Lösung der AWA in  $\mathbb{R}.$

(Die Anfangsbedingung  $y(0) = 0$  würde die Lösung  $y(x) = x$  ergeben).

### 6. Exakte DGL

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0 \quad \text{mit} \quad f_y = g_x \quad \text{in} \quad M \subset \mathbb{R}^2$$

Hierbei muß  $M$  ein *einfach zusammenhängendes Gebiet* sein und  $f, g \in C^1(M).$

Unter der obigen Voraussetzung  $f_y = g_x$  in  $M$  gilt für das Vektorfeld  $\vec{V} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}:$

Die *Integrabilitätsbedingung*  $V_{2x} = V_{1y}$  ist in  $M$  erfüllt.

$M$  ist einfach zusammenhängendes Gebiet, also existiert in  $M$  ein *Potential*  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u_x = f$  und  $u_y = g$ .

Damit ergibt die Gleichung

$$u(x, y(x)) = c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine (implizite) Lösung der exakten DGL.

Denn: Für  $u(x, y(x)) = c$  erhält man durch Differentiation nach  $x$ :

$$\frac{d}{dx}(u(x, y(x))) = u_x(x, y) + u_y(x, y)y' = f(x, y) + g(x, y)y' = 0 .$$

Gelingt es, die Gleichung  $u(x, y) = c$  nach  $y$  aufzulösen, so erhält man die Lösungen  $y$  in expliziter Form.

### Beispiel

$$(1 + y^2 + 3x^2y) + (2xy + x^3 - 1)y' = 0 .$$

Mit  $f(x, y) = 1 + y^2 + 3x^2y$  und  $g(x, y) = 2xy + x^3 - 1$  gilt in  $\mathbb{R}^2$ :

$f_y(x, y) = 2y + 3x^2 = g_x(x, y)$ . Da  $\mathbb{R}^2$  einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Rightarrow$  die gegebene DGL ist exakt, und es existiert ein Potential  $u$  in  $\mathbb{R}^2$ .

$$u_x = f \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int (1 + y^2 + 3x^2y) dx + h_1(y) = x + xy^2 + x^3y + h_1(y) ,$$

$$u_y = g \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int (2xy + x^3 - 1) dy + h_2(x) = xy^2 + x^3y - y + h_2(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(x, y) = x - y + xy^2 + x^3y \text{ ist Potential in } \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow \quad u(x, y) = x - y + xy^2 + x^3y = c$  ist die allgemeine Lösung der gegebenen DGL in impliziter Form. Lösen wir diese Gleichung nach  $y$  auf, so erhalten wir die Lösungen in expliziter Form.

### 7. Exakte DGL durch integrierenden Faktor

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0 \quad \text{mit} \quad f_y \neq g_x$$

Diese DGL ist nicht exakt. Man kann aber versuchen, durch Multiplikation mit einem Faktor  $\mu(x, y)$  (*integrierender Faktor*) diese DGL zu einer exakten DGL zu machen:

$$\mu(x, y)f(x, y) + \mu(x, y)g(x, y)y' = 0 .$$

Damit diese DGL exakt ist, muß gelten:

$$(\mu f)_y = (\mu g)_x \quad \Leftrightarrow \quad \mu_y f + \mu f_y = \mu_x g + \mu g_x \quad \Leftrightarrow$$

$$g\mu_x - f\mu_y = (f_y - g_x)\mu$$

Dies ist eine *partielle* DGL 1. Ordnung für den integrierenden Faktor  $\mu$ . Diese partiellen DGL behandeln wir später. Zunächst können wir diese partielle DGL nur für zwei *Spezialfälle* lösen:

a)  $\mu(x)$ : d.h.:  $\mu$  ist nur von  $x$  abhängig

$$\Rightarrow g\mu'(x) = (f_y - g_x)\mu(x) \Rightarrow$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{f_y - g_x}{g} dx}$$

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn  $\frac{f_y - g_x}{g}$  unabhängig von  $y$  ist.

b)  $\mu(y)$ : d.h.:  $\mu$  ist nur von  $y$  abhängig

$$\Rightarrow f\mu'(y) = (g_x - f_y)\mu(y) \Rightarrow$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{g_x - f_y}{f} dy}$$

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn  $\frac{g_x - f_y}{f}$  unabhängig von  $x$  ist.

### Beispiel

$$(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0, \quad y(1) = 0.$$

$$\text{Mit } f(x, y) = 1 - xy \text{ und } g(x, y) = xy - x^2 \text{ gilt: } y' = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}.$$

Für  $F(x, y) = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$  gilt:  $F, F_y$  sind stetig in  $\bar{U}(\binom{1}{0})$  (da Nenner dort  $\neq 0$ )  $\Rightarrow$

AWA ist eindeutig lösbar in  $U(1)$ .

Da  $f_y - g_x = -x - (y - 2x) = x - y \neq 0 \Rightarrow$  DGL ist nicht exakt.

$$\frac{f_y - g_x}{g} = \frac{x - y}{x(y - x)} = -\frac{1}{x} \text{ ist unabhängig von } y \Rightarrow$$

$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$  (für  $x > 0$ ) ist integrierender Faktor. Also ist die folgende DGL exakt:

$$\frac{1}{x}(1 - xy) + \frac{1}{x}(xy - x^2)y' = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} - y\right) + (y - x)y' = 0 \quad (x \neq 0).$$

$$u(x, y) = \int \left(\frac{1}{x} - y\right) dx + h_1(y) = \ln|x| - xy + h_1(y),$$

$$u(x, y) = \int (y - x) dy + h_2(x) = \frac{y^2}{2} - xy + h_2(x)$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{y^2}{2} - xy + \ln|x| \text{ ist Potential}$$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} - xy + \ln|x| = c_1 \Rightarrow y^2 - 2xy + \ln x^2 = c$  ist allgemeine implizite Lösung der gegebenen DGL für  $x \neq 0$ . Auflösung nach  $y$  ergibt:

$$y(x) = x \pm \sqrt{c - \ln x^2 + x^2} \text{ ist allgemeine Lösung der DGL mit } x^2 > \ln x^2 - c.$$

Die Anfangsbedingung  $y(1) = 0$  ergibt:

$$y(1) = 1 \pm \sqrt{c+1} = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ und } (-)\text{-Zeichen, also}$$

$y(x) = x - \sqrt{x^2 - \ln x^2}$  ist (eindeutige) Lösung der AWA in  $(0, \infty)$   
 $(x^2 > \ln x^2 \text{ ist für alle } x > 0 \text{ erfüllt}).$

Nun behandeln wir noch eine spezielle *implizite* DGL 1. Ordnung:

### 8. Clairautsche DGL

$$y = xy' + g(y') \quad \text{mit } g \in C^2(I), I = (a, b) \subset \mathbb{R}$$

Die Lösungen dieser Clairautschen DGL sind

a)  $y(x) = cx + g(c), c \in I,$

b)  $x(t) = -g'(t), y(t) = g(t) - tg'(t), t \in I.$

b) ist eine Kurve (Lösungskurve der DGL) in Parameterform,

a) sind die *Tangenten* an die Kurve b).

b) ist also die *Einhüllende* der Geradenschar a).

Denn:

a)  $y' = c \Rightarrow y = cx + g(c)$  erfüllt die DGL.

b) Für  $y(x(t)) = g(t) - tg'(t)$  gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{g'(t) - g'(t) - tg''(t)}{-g''(t)} = t \Rightarrow y'(x) = t.$$

Einsetzen in die rechte Seite der DGL ergibt

$$x(t)t + g(t) = -tg'(t) + g(t) = y(t) \Rightarrow \text{b) ist Lösungskurve der DGL.}$$

Daß a) die Tangenten der Kurve b) sind, sieht man folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g''(t) \\ -tg''(t) \end{pmatrix} = -g''(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Also ist die Richtung der Tangente im Punkt  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ :  $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$

Damit lautet die Tangente im Punkt  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Koordinatenweise erhalten wir dann

$$x = x(t) + \lambda, y = y(t) + \lambda t \Rightarrow \lambda = x - x(t), y = y(t) + t(x - x(t)) = tx + y(t) - tx(t) \\ \Rightarrow y = tx + g(t) - tg'(t) + tg'(t) = tx + g(t).$$

### Beispiel

$$y = xy' + y'^3 \Rightarrow g(t) = t^3.$$

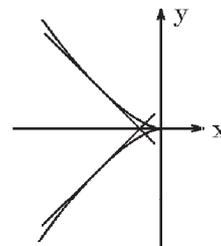
Lösungen:

a)  $y(x) = cx + c^3, c \in \mathbb{R},$

b)  $x(t) = -3t^2, y(t) = t^3 - 3t^3 = -2t^3$

$$\Rightarrow 27y^2 = -4x^3 \text{ (Neilsche Parabel).}$$

a) sind die Tangenten an die Neilsche Parabel.



## Lineare DGL $n$ -ter Ordnung

Bei DGL höherer Ordnung behandeln wir nur noch *lineare DGL*.  
In *Normalform* haben sie die Gestalt

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

mit  $a_i, f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $(a, b) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1$ .

$L[y] = 0$  heißt zugehörige *homogene DGL*,  $L[y] = f$  *inhomogene DGL* (falls  $f \neq 0$ ).

Aus Kapitel VII (ab **S.233**) sind folgende Aussagen bekannt:

a) Die *allgemeine Lösung* der linearen, inhomogenen DGL  $L[y] = f$  setzt sich zusammen aus der *allgemeinen Lösung*  $y_h$  der zugehörigen *homogenen DGL*  $L[y] = 0$  und einer *partikulären Lösung*  $y_0$  der inhomogenen DGL  $L[y] = f$ , also  $y = y_h + y_0$ .

b) Die *allgemeine Lösung*  $y_h$  der linearen, homogenen DGL  $n$ -ter Ordnung ist eine Linearkombination aus  $n$  linear unabhängigen Lösungen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (*Fundamentalsystem*), also  $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ .

c) Sind zusätzlich an der Stelle  $\xi \in (a, b)$   $n$  Anfangsbedingungen  $y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$  gegeben, so existiert *genau eine* Lösung der linearen, inhomogenen DGL  $n$ -ter Ordnung, die diese Anfangsbedingungen erfüllt (falls alle Koeffizientenfunktionen  $a_i(x)$  und die rechte Seite  $f(x)$  stetig in  $(a, b)$  sind). (Diesen Existenz- und Eindeutigkeitssatz werden wir später beweisen).

Um also die allgemeine Lösung einer linearen, inhomogenen DGL  $n$ -ter Ordnung zu finden, benötigen wir

a) ein *Fundamentalsystem*  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  von  $n$  in  $(a, b)$  linear unabhängigen Lösungen der homogenen DGL  $L[y] = 0$  und

b) eine *partikuläre Lösung*  $y_0$  der inhomogenen DGL  $L[y] = f$ .

*Spezialfall: konstante Koeffizienten* (vgl. ab **S.238**)

Sind alle Koeffizientenfunktionen  $a_i(x) = \text{konst}$ , so kann man ein Fundamentalsystem mit Hilfe der Nullstellen des zugehörigen *charakteristischen Polynoms* bestimmen.

Bei rechten Seiten der Form  $f(x) = p(x)e^{\alpha x} \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases}$  erhält man in diesem Fall eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes (vgl. ab **S.243**).

Wir behandeln nun lineare DGL mit *nichtkonstanten Koeffizienten*:

Hat man  $n$  Lösungen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  der *homogenen DGL* gefunden, so stellt sich die Frage, ob diese Lösungen in  $(a, b)$  ein *Fundamentalsystem* bilden (also linear unabhängig sind).

Diese Frage kann mit Hilfe der *Wronski-Determinante* einfach beantwortet werden:

**Definition 14.6 :** Seien  $y_i \in C^{(n-1)}(a, b)$ ,  $(1 \leq i \leq n)$ , so heißt

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

die *Wronski-Determinante* der Funktionen  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

**Satz 14.7 :** Sind  $y_1, y_2, \dots, y_n$  Lösungen der linearen, homogenen DGL  $n$ -ter Ordnung  $L[y] = 0$  in  $(a, b)$ , so gilt

a)  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sind *linear unabhängig* in  $(a, b) \Leftrightarrow W(x_0) \neq 0$  für ein  $x_0 \in (a, b)$ .  
In diesem Fall ist  $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .

b) Es gilt

$$W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x) \quad , \quad W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt} \quad \forall x \in (a, b)$$

*Beweis :*

a) "  $\Leftarrow$  " *Annahme:*  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sind linear abhängig in  $(a, b)$

$\Rightarrow$  es existieren  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  (nicht alle gleich 0) mit

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\Rightarrow c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_n y_n'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$\vdots$

$$\Rightarrow c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Also

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Koeffizientendeterminante  $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  das GLS ist eindeutig lösbar

$\Rightarrow$  die triviale Lösung ist die einzige Lösung  $\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

$\Rightarrow$  Widerspruch zur Annahme.

"  $\Rightarrow$  " *Annahme:*  $W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow$  das GLS ist nichttrivial lösbar, d.h.: es existieren  $c_1, c_2, \dots, c_n$  (nicht alle gleich 0) mit

$$c_1 y_1^{(k)}(x_0) + c_2 y_2^{(k)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(k)}(x_0) = 0 \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad \text{für ein } x_0 \in (a, b).$$

Für die Funktion  $y$  mit  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$  gilt dann

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0. \quad \text{Da } L[y_i] = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow L[y] = 0.$$

Also ist  $y$  Lösung der DGL  $L[y] = 0$  mit den Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt  $y \equiv 0 \Rightarrow$  Widerspruch zu "linear unabhängig"  $\Rightarrow W(x_0) \neq 0$  für ein  $x_0 \in (a, b)$ .

b)

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \\ + \dots + \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}.$$

Bis auf die letzte Determinante haben alle Determinanten 2 gleiche Zeilen, sind also gleich 0. Setzt man in der letzten Determinante jeweils für  $y_i^{(n)}$  die DGL ein, also

$$y_i^{(n)} = -a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)} - \underbrace{a_{n-2}(x)y_i^{(n-2)} - \dots - a_0(x)y_i}_{\text{Kombination der ersten } (n-1) \text{ Zeilen}},$$

und zieht dann aus der letzten Zeile den Faktor  $a_{n-1}(x)$  heraus, so erhält man

$$W'(x) = -a_{n-1}(x) \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = -a_{n-1}(x)W(x).$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL ist

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt}, \quad x_0 \in (a, b).$$

Ist  $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , da  $e$ -Funktion  $\neq 0$ .

## Beispiele

1.  $y'' + \omega^2 y = 0$ , ( $\omega > 0$ ).

Charakteristisches Polynom:  $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ,

$$e^{\pm i\omega x} = \cos \omega x \pm i \sin \omega x$$

$\Rightarrow y_1(x) = \cos \omega x$ ,  $y_2(x) = \sin \omega x$  sind Lösungen der gegebenen DGL.

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{pmatrix} = \omega \neq 0 \text{ in } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y_1, y_2$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}$ .

2.  $y'' - \omega^2 y = 0$ , ( $\omega > 0$ ).

Charakteristisches Polynom:  $\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \omega$

$\Rightarrow y_1(x) = e^{\omega x}$ ,  $y_2(x) = e^{-\omega x}$  sind Lösungen der gegebenen DGL.

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\omega x} & e^{-\omega x} \\ \omega e^{\omega x} & -\omega e^{-\omega x} \end{pmatrix} = -2\omega \neq 0 \text{ in } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y_1, y_2$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}$ .

Hat man ein *Fundamentalsystem* der linearen, homogenen DGL gefunden, so ist noch eine *partikuläre Lösung* der inhomogenen DGL zu bestimmen:

*Bestimmung einer partikulären Lösung mittels Variation der Konstanten*

**Satz 14.8 :** *Variation der Konstanten*

Bilden die Funktionen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  in  $(a, b)$  ein *Fundamentalsystem* der linearen, homogenen DGL  $n$ -ter Ordnung  $L[y] = 0$ , so ist

$$y_0(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int_{x_0}^x \frac{W_i(t, f)}{W(t)} dt \quad , \quad (x_0 \in (a, b) \text{ beliebig})$$

eine *partikuläre Lösung* der inhomogenen DGL  $L[y] = f$ .

Hierbei ist  $W(x)$  die *Wronski-Determinante* von  $y_1, y_2, \dots, y_n$  und  $W_i(x, f)$  die Determinante der Matrix, die entsteht, wenn man in der Matrix von  $W(x)$  die  $i$ -te Spalte durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \text{ ersetzt, also } W_i(x, f) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & 0 & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & 0 & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & f(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} .$$

*Beweis :*

Wie bei der linearen DGL 1. Ordnung führen wir auch hier eine *Variation der Konstanten* durch, d.h.: wir machen für eine partikuläre Lösung den Ansatz:

$$y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) .$$

Diesen Ansatz  $y_0$  differenzieren wir  $n$ -mal und stellen nach jeder Differentiation eine Forderung:

$$y_0'(x) = c_1(x)y_1'(x) + \dots + c_n(x)y_n'(x) + \underbrace{(c_1'(x)y_1(x) + \dots + c_n'(x)y_n(x))}_{1. \text{ Forderung: } =0}$$

$$y_0''(x) = c_1(x)y_1''(x) + \dots + c_n(x)y_n''(x) + \underbrace{(c_1'(x)y_1'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x))}_{2. \text{ Forderung: } =0}$$

$\vdots$

$$y_0^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + \underbrace{(c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x))}_{(n-1). \text{ Forderung: } =0}$$

$$y_0^{(n)}(x) = c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) + \underbrace{(c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x))}_{n. \text{ Forderung: } =f(x)}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen jeweils mit dem Faktor  $a_i(x)$  (die letzte Gleichung mit dem Faktor 1) und addieren dann alle Gleichungen, so erhalten wir

$$L[y_0] = c_1 L[y_1] + \dots + c_n L[y_n] + f(x) \Rightarrow L[y_0] = f(x) \quad (\text{da } L[y_i] = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n).$$

Also ist  $y_0$  Lösung der inhomogenen DGL, falls die obigen  $n$  Forderungen erfüllt sind. Es muß also  $\forall x \in (a, b)$  gelten:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientendeterminante ist die Wronski-Determinante  $W(x)$ .

Da  $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , existiert für jedes  $x \in (a, b)$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $(c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x))^T$ , die mit Hilfe der *Cramer-Regel* folgendermaßen berechnet werden kann:

$$c_i'(x) = \frac{W_i(x, f)}{W(x)} \Rightarrow c_i(x) = \int_{x_0}^x \frac{W_i(t, f)}{W(t)} dt \quad \text{mit } x_0 \in (a, b) \text{ beliebig.}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int_{x_0}^x \frac{W_i(t, f)}{W(t)} dt \quad \text{ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.}$$

### Bemerkung :

Die Berechnung von  $y_0$  nach diesem Satz ist nicht immer sehr einfach, da die zu berechnenden Integrale unangenehm sein können. Wenn man einen speziellen Ansatz für  $y_0$  machen kann (z.B. bei linearen DGL mit *konstanten* Koeffizienten und rechten Seiten der Form  $f(x) = p(x)e^{\alpha x} \left\{ \begin{matrix} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{matrix} \right\}$ ) oder eine partikuläre Lösung einfach "sieht", so sollte man auf die Variation der Konstanten verzichten.

### Beispiel

$$y''' - y' = e^{2x}.$$

*homogen:* Charakteristisches Polynom:  $\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

$\Rightarrow y_1(x) = 1, y_2(x) = e^x, y_3(x) = e^{-x}$  sind Lösungen der homogenen DGL in  $\mathbb{R}$ .

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \Rightarrow y_1, y_2, y_3 \text{ sind linear unabhängig}$$

in  $\mathbb{R}$ , bilden also ein Fundamentalsystem in  $\mathbb{R}$ .

*partikuläre Lösung: Variation der Konstanten*

$$W_1(x, f) = \det \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ e^{2x} & e^x & e^{-x} \end{pmatrix} = e^{2x} \cdot (-2) = -2e^{2x},$$

$$W_2(x, f) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & e^{2x} & e^{-x} \end{pmatrix} = e^x, \quad W_3(x, f) = \det \begin{pmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & e^{2x} \end{pmatrix} = e^{3x},$$

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x, f)}{W(x)} dx = \int (-e^{2x}) dx = -\frac{1}{2}e^{2x},$$

$$c_2(x) = \int \frac{W_2(x, f)}{W(x)} dx = \int \frac{1}{2}e^x dx = \frac{1}{2}e^x,$$

$$c_3(x) = \int \frac{W_3(x, f)}{W(x)} dx = \int \frac{1}{2}e^{3x} dx = \frac{1}{6}e^{3x}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = 1 \cdot \frac{-1}{2}e^{2x} + e^x \cdot \frac{1}{2}e^x + e^{-x} \cdot \frac{1}{6}e^{3x} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)e^{2x} = \frac{1}{6}e^{2x}$$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

(Hier wäre ein Ansatz der Form  $y_0(x) = ae^{2x}$  viel einfacher gewesen)

$\Rightarrow y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der gegebenen DGL.

Wir behandeln nun *lineare* DGL, die man mit Hilfe *spezieller Methoden* auf einfachere lineare DGL (z.B.: auf lineare DGL mit *konstanten Koeffizienten*) zurückführen kann.

Gegeben: Lineare DGL in *Normalform*:

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

mit  $a_i$ ,  $(0 \leq i \leq n-1)$  und  $f$  stetig in  $(a, b)$ .

## 1. Reduktion der Ordnung

*Gegeben:* Eine Lösung  $y_1$  der zugehörigen *homogenen* DGL, also  $L[y_1] = 0$ .

*Gesucht:* Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

*Ansatz:*

$$y(x) = v(x)y_1(x)$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion  $v(x)$ .

Dieser Ansatz  $y(x) = v(x)y_1(x)$  führt auf eine lineare DGL  $(n-1)$ -ter Ordnung für  $v'$ .

Denn:  $y = vy_1 \Rightarrow y' = v'y_1 + vy_1'$ ,  $y'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$ ,

allgemein:

$$y^{(k)} = v^{(k)}y_1 + kv^{(k-1)}y_1' + \binom{k}{2}v^{(k-2)}y_1'' + \dots + vy_1^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}v^{(k-j)}y_1^{(j)}.$$

Multiplikation dieser Gleichungen mit  $a_k(x)$  (bei  $y^{(n)}$  Multiplikation mit 1) und anschließende Summation ergibt

$$L[y] = y_1v^{(n)} + \tilde{a}_{n-1}(x)v^{(n-1)} + \dots + \tilde{a}_1(x)v' + vL[y_1] = f(x).$$

$$\text{Da } L[y_1] = 0 \Rightarrow y_1v^{(n)} + \tilde{a}_{n-1}(x)v^{(n-1)} + \dots + \tilde{a}_1(x)v' = f(x).$$

Das ist eine lineare DGL  $(n-1)$ -ter Ordnung für  $v'$ .

Kann man diese DGL allgemein lösen, und ist  $v(x)$  die allgemeine Lösung dieser DGL, so ist  $y(x) = v(x)y_1(x)$  die allgemeine Lösung der ursprünglichen linearen DGL  $n$ -ter Ordnung.

**Beispiel**  $n = 3$ :

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + (6x - x^3) y' + (x^2 - 6) y = x^4 e^x .$$

Normalform:

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6 - x^2}{x^2} y' + \frac{x^2 - 6}{x^3} y = x e^x .$$

Alle Koeffizientenfunktionen und die rechte Seite sind stetig in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , also existieren Lösungen in  $(-\infty, 0)$  und in  $(0, \infty)$ .

$y_1(x) = x$  ist Lösung der homogenen DGL.

Der Ansatz  $y(x) = xv(x)$  führt auf:

$$y'(x) = v(x) + xv'(x) , \quad y''(x) = 2v'(x) + xv''(x) , \quad y'''(x) = 3v''(x) + xv'''(x) ,$$

einsetzen in die DGL:

$$x^3(3v'' + xv''') - 3x^2(2v' + xv'') + (6x - x^3)(v + xv') + (x^2 - 6)xv = x^4 e^x ,$$

sortieren nach  $v$ -Ableitungen:

$$x^4 v''' + (3x^3 - 3x^3)v'' + (-6x^2 + 6x^2 - x^4)v' + (6x - x^3 + x^3 - 6x)v = x^4 e^x$$

$$\Rightarrow x^4 v''' - x^4 v' = x^4 e^x \Rightarrow v''' - v' = e^x , \quad (x \neq 0).$$

Dies ist eine lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für  $v'$ . Man kann diese DGL aber auch direkt als lineare DGL 3. Ordnung für  $v$  lösen:

*homogen:*

$$\text{Charakteristisches Polynom: } \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1 \Rightarrow$$

$$v_h(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} , \quad c_i \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeine Lösung der homogenen DGL,}$$

*partikuläre Lösung:*

$$\text{Ansatz: } v_0(x) = axe^x \text{ (einfache Resonanz) führt auf } v_0(x) = \frac{x}{2} e^x$$

$$\Rightarrow v(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x , \quad c_i \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeine Lösung der } v\text{-DGL}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2 x e^x + c_3 x e^{-x} + \frac{x^2}{2} e^x , \quad c_i \in \mathbb{R},$$

ist allgemeine Lösung der gegebenen DGL in  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel**  $n = 2$ :

Gegeben: Lineare DGL 2. Ordnung in Normalform

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)}$$

mit  $p, q, r$  stetig in  $(a, b)$ .

Sei  $y_1$  bekannt als Lösung der zugehörigen homogenen DGL, also  $L[y_1] = 0$ .

Ansatz: *Reduktion der Ordnung*

$$y = v y_1 , \quad y' = v' y_1 + v y_1' , \quad y'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' ,$$

einsetzen in die DGL:

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(v'y_1 + vy_1') + qvy_1 = r,$$

sortieren nach  $v$ -Ableitungen:

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = r.$$

Da  $L[y_1] = 0 \Rightarrow y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \Rightarrow$  der Faktor von  $v$  ist gleich 0.

In Normalform erhalten wir dann die folgende lineare DGL 1. Ordnung für  $v'$

$$\boxed{v'' + \left(2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right)v' = \frac{r(x)}{y_1(x)}} \quad (\text{falls } y_1(x) \neq 0).$$

Lösen wir diese DGL, so erhalten wir für die allgemeine Lösung der *homogenen* DGL (vgl. S.487)

$$v_h'(x) = c_1 e^{-\int (2\frac{y_1'}{y_1} + p) dx} = c_1 e^{-2\ln|y_1| - \int p(x) dx}, \text{ also}$$

$$\boxed{v_h'(x) = \frac{c_1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x) dx}}$$

Sei  $v_0'(x)$  eine partikuläre Lösung (kann mit Hilfe der "Variation der Konstanten" berechnet werden (vgl. S.487)), dann gilt

$v'(x) = v_h'(x) + v_0'(x)$  ist die allgemeine Lösung der  $v'$ -DGL.

Integration ergibt dann die gesuchte Funktion  $v(x)$

$\Rightarrow y(x) = v(x)y_1(x)$  ist allgemeine Lösung der gegebenen DGL.

### Beispiel hierzu

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2, \quad y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = \frac{2}{1-x^2} \quad (\text{Normalform}).$$

Für  $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ ,  $q(x) = \frac{2}{1-x^2}$ ,  $r(x) = \frac{2}{1-x^2}$  gilt:  $p, q, r$  sind stetig in  $(-1, 1)$  mit  $0 \in (-1, 1)$ .

$y_1(x) = x$  ist Lösung der homogenen DGL.

Ansatz:  $y(x) = v(x) \cdot x$  führt auf

$$v'' + \left(2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)v' = \frac{2}{x(1-x^2)}.$$

homogen:

$$v_h'(x) = \frac{c_1}{x^2} e^{-\int \left(-\frac{2x}{1-x^2}\right) dx} = \frac{c_1}{x^2} e^{-\ln(1-x^2)} = \frac{c_1}{x^2(1-x^2)},$$

partikulär:

$$v_0'(x) = \frac{c(x)}{x^2(1-x^2)} \text{ führt auf } c(x) = \int \frac{\frac{2}{x(1-x^2)}}{\frac{1}{x^2(1-x^2)}} dx = \int 2x dx = x^2$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v_0'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow v'(x) = \frac{c_1}{x^2(1-x^2)} + \frac{1}{1-x^2} \\
\Rightarrow v(x) &= c_1 \int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx + \int \frac{1}{1-x^2} dx + c_2 \\
&= c_1 \left( \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1-x^2} dx \right) + \int \frac{1}{1-x^2} dx + c_2 \\
&= c_1 \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + c_2 \\
\Rightarrow y(x) &= xv(x) = c_2x + c_1 \left( x \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 \right) + x \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\
\Rightarrow y(x) &= c_2x + \tilde{c}_1 \left( x \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 \right) + 1, \quad \tilde{c}_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\
&\text{ist allgemeine Lösung in } (-1, 1). \\
y(0) = 0 &\Rightarrow y(0) = -\tilde{c}_1 + 1 = 0 \Rightarrow \tilde{c}_1 = 1, \quad c_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

In diesem Beispiel wäre es einfacher gewesen, zunächst nur die homogene DGL zu lösen, da man hier sofort eine partikuläre Lösung "sehen" kann, nämlich  $y_0(x) \equiv 1$ .

### Lineare, homogene DGL 2. Ordnung: Reduktion der Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

mit  $p, q$  stetig in  $(a, b)$ .

Eine Lösung  $y_1 \neq 0$  sei bekannt, dann führt der Ansatz  $y_2(x) = v(x)y_1(x)$  auf

$$v'' + \left( 2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x) \right) v' = 0 \quad (\text{falls } y_1(x) \neq 0)$$

mit der Lösung  $v'(x) = \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x) dx}$ .

Damit erhalten wir eine zweite Lösung  $y_2$  mit

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx$$

$y_1, y_2$  sind linear unabhängig in  $(a, b)$ , denn:

$$\begin{aligned}
W(x) &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \\
&= y_1(x)(v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x)) - y_1'(x)v(x)y_1(x) = v'(x)y_1^2(x) \\
&= e^{-\int p(x) dx} \neq 0 \quad (\text{da } e\text{-Funktion } \neq 0).
\end{aligned}$$

Also bilden  $\{y_1, y_2\}$  ein Fundamentalsystem in  $(a, b)$

$\Rightarrow y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL in  $(a, b)$ .

### Beispiel hierzu

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0 \quad , \quad (p, q \text{ stetig in } (-1, 1)).$$

$y_1(x) = x$  ist Lösung dieser homogenen DGL. Der Ansatz  $y_2(x) = xv(x)$  führt auf

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\int -\frac{2x}{1-x^2} dx} = \frac{1}{x^2} e^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{x^2(1-x^2)} \quad , \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow v(x) = \int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1-x^2} dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$\Rightarrow y_2(x) = -1 + x \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$  ist zweite (von  $y_1(x) = x$  linear unabhängige) Lösung in  $(-1, 1)$  (Die Stelle  $x = 0$  muß nur für den Lösungsweg ausgeschlossen werden,  $y_2$  ist auch Lösung an der Stelle  $x = 0$ , also in  $(-1, 1)$ ).

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 x + c_2 \left( x \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 \right) \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

## 2. Eulersche DGL

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$  konstant,  $a_n \neq 0$ .

Durch die Substitution:

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \quad , \quad \text{falls } x > 0, \quad \text{oder}$$

$$x = -e^t \Rightarrow t = \ln(-x) \quad , \quad \text{falls } x < 0, \quad \text{also allgemein: } t = \ln|x| \quad \text{für } x \neq 0,$$

geht die Eulersche DGL über in eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten für  $u(t) = y(x)$ .

Denn:  $y(x) = u(t) = u(\ln|x|)$  ,  $x \neq 0$  ,

Differentiation ergibt:

$$y'(x) = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = u'(t) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow xy'(x) = u'(t) \quad ,$$

$$y''(x) = u''(t) \cdot \frac{1}{x^2} - u'(t) \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 y''(x) = u''(t) - u'(t) \quad ,$$

$$y'''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{u'' - u'}{x^2} \right) = \frac{u''' - u''}{x^3} - \frac{2(u'' - u')}{x^3} \Rightarrow x^3 y''' = u''' - 3u'' + 2u' \quad ,$$

$$y^{(4)}(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{u''' - 3u'' + 2u'}{x^3} \right) = \frac{u^{(4)} - 3u'''' + 2u''}{x^4} - \frac{3(u''' - 3u'' + 2u')}{x^4}$$

$$\Rightarrow x^4 y^{(4)} = u^{(4)} - 6u'''' + 11u''' - 6u'' \quad , \quad \text{usw.}$$

Es treten also nur noch konstante Koeffizienten für die Ableitungen von  $u$  auf. Also müssen in der Eulerschen DGL die Ausdrücke  $x^k y^{(k)}$  durch die folgenden Ausdrücke ersetzt werden:  $(t = \ln|x|)$

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(t) \\
xy'(x) &= u'(t) \\
x^2y''(x) &= u''(t) - u'(t) \\
x^3y'''(x) &= u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t) \\
x^4y^{(4)}(x) &= u^{(4)}(t) - 6u'''(t) + 11u''(t) - 6u'(t) \quad , \text{ usw}
\end{aligned}$$

Ist nun eine Eulersche DGL zu lösen, so gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Durchführung der Substitution  $t = \ln|x|$ : Man ersetzt die Ausdrücke  $x^k y^{(k)}$  durch die obigen Ausdrücke und substituiert die rechte Seite der DGL. Dann löst man die lineare DGL mit konstanten Koeffizienten für  $u(t)$  und macht anschließend die Substitution wieder rückgängig.

b) Für die homogene DGL führt man den Ansatz  $y(x) = x^\lambda$ , ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ), durch (das entspricht dem Ansatz  $u(t) = e^{\lambda t}$  für die substituierte DGL mit konstanten Koeffizienten). Dieser Ansatz führt auf das gleiche charakteristische Polynom wie bei der substituierten DGL. Um eine partikuläre Lösung zu bestimmen, kann man bei vielen rechten Seiten einen speziellen Ansatz wählen. Falls dies nicht möglich ist, muß man "Variation der Konstanten" durchführen.

### Beispiele

1.  $x^2y'' + xy' + 4y = x^2$  .

a) Substitution durchführen:

$$(u'' - u') + u' + 4u = e^{2t} \Rightarrow u'' + 4u = e^{2t} .$$

$$\begin{aligned}
\text{homogen: } \lambda^2 + 4 = 0 &\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i \\
\Rightarrow u_h(t) &= c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

partikuläre Lösung: Ansatz  $u_0(t) = ae^{2t}$  führt auf

$$4a + 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8} \Rightarrow u_0(t) = \frac{1}{8}e^{2t}$$

$$\Rightarrow u(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{8}e^{2t} \quad , \quad c_i \in \mathbb{R},$$

$\Rightarrow y(x) = c_1 \cos(2 \ln|x|) + c_2 \sin(2 \ln|x|) + \frac{x^2}{8}$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung für  $x \neq 0$ .

b) Direkter Ansatz:

$$\text{homogen: Ansatz } y(x) = x^\lambda \quad , \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow y' = \lambda x^{\lambda-1} \quad , \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \quad ,$$

einsetzen ergibt:

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + \lambda x^\lambda + 4x^\lambda = (\lambda^2 + 4)x^\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

$\Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow y(x) = x^{\pm 2i} = e^{\pm 2i \ln x} = \cos(2 \ln x) \pm i \sin(2 \ln x)$  sind komplexe Lösungen für  $x > 0$

$\Rightarrow y_h(x) = c_1 \cos(2 \ln |x|) + c_2 \sin(2 \ln |x|)$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine (reelle) Lösung der homogenen DGL für  $x \neq 0$ .

*partikuläre Lösung:* Rechte Seite:  $f(x) = x^2$   
 $x^2 \quad \longrightarrow \quad e^{2t} \quad \longrightarrow \quad ae^{2t} \quad \longrightarrow \quad ax^2$   
 Substitution      Ansatz, keine Resonanz      Substitution rückgängig

$\Rightarrow$  Ansatz  $y_0(x) = ax^2 \Rightarrow y_0'(x) = 2ax$  ,  $y_0''(x) = 2a$   
 einsetzen  $\Rightarrow 2ax^2 + 2ax^2 + 4ax^2 = 8ax^2 = x^2 \Rightarrow a = \frac{1}{8} \Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{8}x^2$

$\Rightarrow y(x) = c_1 \cos(2 \ln |x|) + c_2 \sin(2 \ln |x|) + \frac{1}{8}x^2$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung für  $x \neq 0$ .

2.  $x^2 y'' - xy' + y = x$  , ( $x > 0$ ).

*homogen:* Ansatz  $y = x^\lambda$  führt auf  
 $\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$  ist doppelte Nullstelle  
 $\Rightarrow y_h(x) = c_1 x + c_2 x \ln x$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der homogenen DGL.

*Denn:*

Bei der substituierten DGL mit konstanten Koeffizienten wären  $u_1(t) = e^t$  und  $u_2(t) = te^t$  Fundamentallösungen, also sind hier  $y_1(x) = x$  und  $y_2(x) = x \ln x$  Fundamentallösungen.

*partikuläre Lösung:* Rechte Seite:  $f(x) = x$   
 $x \quad \longrightarrow \quad e^t \quad \longrightarrow \quad at^2 e^t \quad \longrightarrow \quad a(\ln x)^2 x$   
 Substitution      Ansatz, doppelte Resonanz      Substitution rückgängig

$\Rightarrow$  Ansatz  $y_0(x) = ax(\ln x)^2 \Rightarrow y_0'(x) = a((\ln x)^2 + 2 \ln x)$ ,  
 $y_0''(x) = a\left(2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x}\right)$  ,

einsetzen  $\Rightarrow a\left[2(\ln x)x + 2x - ((\ln x)^2 x + 2(\ln x)x) + x(\ln x)^2\right] = 2ax = x \Rightarrow a = \frac{1}{2}$   
 $\Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{2}x(\ln x)^2$  ,

$y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung in  $(0, \infty)$ .

Wir werden nun noch zwei Methoden behandeln, mit denen man gewisse lineare DGL in einfachere lineare DGL (z.B. lineare DGL mit konstanten Koeffizienten oder Eulersche DGL) umwandeln kann. Bei beiden Methoden müssen die gegebenen DGL gewisse Bedingungen erfüllen.

*Gegeben:* Normalform einer linearen DGL 2. Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

mit  $p, q, r$  stetig in  $(a, b)$  und  $p \in C^1(a, b)$ .

3. **Ansatz**  $y(x) = u(x)v(x)$  mit zwei zu bestimmenden Funktionen  $u, v$ .

Gilt

$$4q(x) - p^2(x) - 2p'(x) = \text{konst} \quad \left( \text{bzw.} = \frac{\text{konst}}{x^2} \right)$$

so führt der Ansatz  $y(x) = u(x)v(x)$  mit

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$$

auf die lineare DGL mit *konstanten Koeffizienten* (bzw. auf die *Eulersche DGL*) für  $v$

$$v'' + \frac{\text{konst}}{4}v = \frac{r(x)}{u(x)} \quad \left( \text{bzw.} \quad x^2v'' + \frac{\text{konst}}{4}v = \frac{x^2r(x)}{u(x)} \right)$$

Denn:

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ ,  $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$ , einsetzen ergibt:  
 $(u''v + 2u'v' + uv'') + p(u'v + uv') + quv = r$ , sortieren nach  $v$ -Ableitungen:  
 $uv'' + (2u' + pu)v' + (u'' + pu' + qu)v = r$ .

Ist der Faktor von  $v$  gleich 0, so erhalten wir "Reduktion der Ordnung" (vgl. S.499).

Ist der Faktor von  $v'$  gleich 0, also  $2u' + pu = 0$  mit  $u \neq 0$ , so erhalten wir die lineare DGL (in Normalform)

$$v'' + \left( \frac{u''}{u} + p\frac{u'}{u} + q \right)v = \frac{r}{u}.$$

$$\begin{aligned} \text{Da } 2u' + pu = 0 &\Rightarrow u' = -\frac{p}{2}u \Rightarrow u'' = -\frac{p'}{2}u - \frac{p}{2}u' = -\frac{p'}{2}u + \frac{p^2}{4}u \\ \Rightarrow \frac{u''}{u} + p\frac{u'}{u} + q &= -\frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = \frac{1}{4}(4q - p^2 - 2p') = \frac{\text{konst}}{4} \quad \left( \text{bzw.} = \frac{\text{konst}}{4x^2} \right) \\ \Rightarrow v'' + \frac{\text{konst}}{4}v &= \frac{r(x)}{u(x)} \quad \left( \text{bzw.} \quad x^2v'' + \frac{\text{konst}}{4}v = \frac{x^2r(x)}{u(x)} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Da } u' = -\frac{p}{2}u \Rightarrow u(x) = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}.$$

**Beispiel**

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}, \quad (x > 0).$$

$$\text{Normalform: } y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Für  $p(x) = \frac{1}{x}$ ,  $q(x) = 1 - \frac{1}{4x^2}$ ,  $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  gilt:  $p, q, r$  sind stetig in  $(0, \infty)$  und  $p \in C^1(0, \infty)$ .

Prüfen, ob  $4q - p^2 - 2p' = \text{konst}$  bzw.  $= \frac{\text{konst}}{x^2}$  :

$$4q - p^2 - 2p' = 4 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4 = \text{konst.}$$

$$u \text{ berechnen: } u(x) = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx} = e^{-\frac{1}{2} \ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{DGL für } v \text{ lösen: } v'' + \frac{4}{4}v = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \Rightarrow v'' + v = 1.$$

$$\text{homogen: } v_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

$$\text{partikuläre Lösung: } v_0(x) = 1$$

$\Rightarrow v(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1$  ist allgemeine Lösung der  $v$ -DGL

$\Rightarrow y(x) = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der gegebenen DGL in  $(0, \infty)$ .

Die homogene DGL  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$  dieses Beispiels ist eine *Besselsche DGL* für  $\lambda = \frac{1}{2}$  (vgl. später, S.515).

Die Fundamentallösungen

$$y_1(x) = J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2(x) = J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

heißen *Besselfunktionen* für  $\lambda = \frac{1}{2}$  (vgl. später).

#### 4. Substitution $t = \varphi(x)$ mit $\varphi \in C^2(a, b)$ , $\varphi' \neq 0$ in $(a, b)$ .

Die *Substitution*  $t = \varphi(x)$  führt die lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

(mit  $p, q, r$  stetig in  $(a, b)$ ) über in die substituierte DGL für  $u(t) = y(x)$

$$u'' + \frac{\varphi'' + p\varphi'}{\varphi'^2} u' + \frac{q}{\varphi'^2} u = \frac{r}{\varphi'^2}$$

Bei  $p, q, r, \varphi', \varphi''$  muß die Substitution  $x = \varphi^{-1}(t)$  eingesetzt werden.

Denn:

$$y(x) = u(t) = u(\varphi(x)) \Rightarrow y'(x) = u'(t)\varphi'(x),$$

$$y''(x) = u''(t)\varphi'^2(x) + u'(t)\varphi''(x),$$

einsetzen ergibt:

$$u''\varphi'^2 + u'\varphi'' + pu'\varphi' + qu = r \Rightarrow (\text{Normalform})$$

$$u'' + \frac{\varphi'' + p\varphi'}{\varphi'^2} u' + \frac{q}{\varphi'^2} u = \frac{r}{\varphi'^2} .$$

Diese substituierte DGL ist einfach zu lösen, falls die neuen Koeffizienten konstant sind, also falls

$$\varphi'^2(x) = cq(x) \quad \text{und} \quad \frac{\varphi'' + p\varphi'}{cq} = \text{konst.}$$

Wählen wir also  $t = \varphi(x)$  mit

$$\varphi'^2(x) = cq(x)$$

(z.B.  $c = 1$ , falls  $q > 0$  oder  $c = -1$ , falls  $q < 0$ ), und gilt dann:

$$\frac{\varphi'' + p\varphi'}{cq} = \text{konst}$$

so führt die Substitution  $t = \varphi(x)$  auf die substituierte DGL für  $u(t) = y(x)$

$$u'' + (\text{konst})u' + \frac{1}{c}u = \frac{r(\varphi^{-1}(t))}{cq(\varphi^{-1}(t))}$$

### Beispiel

$$y'' + \left(4x - \frac{1}{x}\right)y' + 4x^2y = 3xe^{-x^2} \quad , \quad (x > 0).$$

Für  $p(x) = 4x - \frac{1}{x}$ ,  $q(x) = 4x^2$ ,  $r(x) = 3xe^{-x^2}$  gilt:  $p, q, r$  sind stetig in  $(0, \infty)$ .

Wähle Substitution:  $\varphi'^2(x) = 4x^2$ , ( $c = 1$ )  $\Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow \underline{t = \varphi(x) = x^2}$ .

$$\text{Prüfe: } \frac{\varphi'' + p\varphi'}{cq} = \frac{2 + \left(4x - \frac{1}{x}\right)2x}{4x^2} = 2 = \text{konst.}$$

$$\text{Löse DGL für } u: \quad u'' + 2u' + u = \frac{3xe^{-x^2}}{4x^2} = \frac{3e^{-x^2}}{4x} = \frac{3e^{-t}}{4\sqrt{t}}$$

(Substitution auf der rechten Seite einsetzen)

$$\Rightarrow u'' + 2u' + u = \frac{3e^{-t}}{4\sqrt{t}} .$$

homogen:  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$  doppelte Nullstelle,  
 $u_h(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$  ist allgemeine Lösung der homogenen DGL.

partikuläre Lösung: Variation der Konstanten

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix} = (1-t)e^{-2t} + te^{-2t} = e^{-2t} ,$$

$$W_1(t, f) = \det \begin{pmatrix} 0 & te^{-t} \\ \frac{3e^{-t}}{4\sqrt{t}} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\sqrt{t}e^{-2t} ,$$

$$W_2(t, f) = \det \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & \frac{3e^{-t}}{4\sqrt{t}} \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-2t} ,$$

$$c_1(t) = \int \frac{W_1(t, f)}{W(t)} dt = -\frac{3}{4} \int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{2}t^{3/2},$$

$$c_2(t) = \int \frac{W_2(t, f)}{W(t)} dt = \frac{3}{4} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{3}{2}t^{1/2},$$

$$u_0(t) = -\frac{1}{2}t^{3/2}e^{-t} + \frac{3}{2}t^{1/2} \cdot te^{-t} = t^{3/2}e^{-t},$$

$u(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + t^{3/2}e^{-t}$  ist allgemeine Lösung der  $u$ -DGL.

*Substitution rückgängig machen:*

$y(x) = c_1e^{-x^2} + c_2x^2e^{-x^2} + x^3e^{-x^2}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der gegebenen DGL in  $(0, \infty)$ .

Versagen alle bisher behandelten Methoden, so bleibt noch die Möglichkeit, Lösungen mittels eines *Potenzreihenansatzes* oder eines *verallgemeinerten Potenzreihenansatzes* zu bestimmen. Das geht natürlich nur dann, wenn sich die Lösung in eine solche Reihe entwickeln läßt, was wir i.f. annehmen wollen.

## 5. Potenzreihenansatz

*Gegeben:* Normalform einer linearen DGL 2. Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

*Voraussetzung:*  $p, q, r$  lassen sich um  $x_0 = 0$  in eine *Potenzreihe* entwickeln, also:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n.$$

Alle Reihen seien konvergent in  $U_R(0)$ .

$$\text{Ansatz für die Lösung: } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

(da der erste Summand = 0)

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

(da die ersten beiden Summanden = 0)

*Einsetzen in die DGL:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) + \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

$(n \rightarrow n+2) \qquad (n \rightarrow n+1)$

(Eine Indexverschiebung wird durchgeführt, damit überall die gleiche  $x$ -Potenz auftritt).

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n .$$

Multiplikation mittels des *Cauchy-Produkts*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right\} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \quad \forall x \in U_R(0).$$

*Koeffizientenvergleich*:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} = r_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dies ist eine *Rekursionsformel* zur Berechnung der Koeffizienten  $a_n$ .

a) Sind *Anfangsbedingungen*  $y(0) = \eta_0$  ,  $y'(0) = \eta_1$  gegeben, so gilt wegen des Ansatzes  $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  ,  $y'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots$  ,

$$a_0 = \eta_0 \quad , \quad a_1 = \eta_1$$

Alle anderen Koeffizienten  $a_n$  lassen sich dann mittels der Rekursionsformel berechnen.

b) Ist die allgemeine Lösung der DGL gesucht, so kann man  $a_0 = c_1$  ,  $a_1 = c_2$  mit  $c_i \in \mathbb{R}$  (also beliebig) wählen. Dann erhält man mittels der Rekursionsformel die anderen Koeffizienten  $a_n$  in Abhängigkeit von  $c_1, c_2$  und damit die allgemeine Lösung.

Ist der Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite  $r(x)$  schwierig oder kann man eine partikuläre Lösung auf einfachem Wege erhalten, so ist es besser, zunächst nur die *homogene* DGL zu lösen, also zwei Fundamentallösungen der homogenen DGL zu bestimmen:

Zu diesem Zweck wählt man:

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\ a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = x + \tilde{a}_2x^2 + \tilde{a}_3x^3 + \dots$$

$y_1$  und  $y_2$  sind damit linear unabhängig in  $U_R(0)$ , bilden also ein Fundamentalsystem der homogenen DGL, also ist

$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

Die Frage, die noch beantwortet werden muß, lautet:

Konvergiert die so berechnete Reihe  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  in  $U_R(0)$  ? Diese Frage kann unter den oben gemachten Voraussetzungen mit "ja" beantwortet werden, denn es gilt der folgende Satz:

**Satz 14.9 :**

Sind  $p, q, r$  in  $U_R(0)$  in eine Potenzreihe um  $x_0 = 0$  entwickelbar, so konvergiert die Reihe  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  bei beliebiger Wahl von  $a_0, a_1$  in  $U_R(0)$ .

*Beweis :*

Mit Hilfe der Rekursionsformel zeigt man, daß für  $0 < \varrho < R$  gilt:

$$|a_{n+2}| \varrho^{n+2} \leq n + K, \quad (K \in \mathbb{R}), \quad \forall n \geq N \Rightarrow |a_n| \varrho^n \leq 2n \quad \forall n \geq \tilde{N}.$$

Ist nun  $|x| < \varrho$ , so gilt:

$$|a_n| |x|^n \leq \left| \frac{x}{\varrho} \right|^n \varrho^n |a_n| \leq 2n \left| \frac{x}{\varrho} \right|^n \quad \forall n \geq \tilde{N}.$$

Da die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n \left| \frac{x}{\varrho} \right|^n$  konvergiert, konvergiert auch die Reihe  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

**Bemerkung :**

a) Sind  $p, q, r$  *Polynome*, so konvergiert die Reihe  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  in ganz  $\mathbb{R}$ .

b) Oft kann man mit Hilfe der Rekursionsformel den Konvergenzradius der Reihe  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  direkt bestimmen, denn falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = c$ , so erhält man für den Konvergenzradius der Lösungsreihe:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{c} & , \text{falls } c \neq 0, \infty \\ 0 & , \text{falls } c = \infty \\ \infty & , \text{falls } c = 0. \end{cases}$$

Denn: Für  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  erhält man mit Hilfe des Quotientenkriteriums:

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| \rightarrow c|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{c}, \text{ falls } c \neq 0, \infty.$$

**Beispiele**1. *Hermiteische DGL*

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

Da  $p(x) = -2x$ ,  $q(x) = \lambda$ ,  $r(x) = 0$  Polynome  $\Rightarrow$  die Lösungsreihe

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konvergiert in ganz  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Ansatz: } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2},$$

einsetzen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0,$$

(n → n + 2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2n-\lambda)a_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2)a_{n+2} - (2n-\lambda)a_n \right\} x^n = 0.$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{Rekursionsformel}).$$

Wähle  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ :

$$\Rightarrow a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

$$a_2 = \frac{-\lambda}{1 \cdot 2}, \quad a_4 = \frac{4-\lambda}{3 \cdot 4} \cdot \frac{-\lambda}{1 \cdot 2} = \frac{-\lambda(4-\lambda)}{4!},$$

$$a_6 = \frac{8-\lambda}{5 \cdot 6} \cdot \frac{-\lambda(4-\lambda)}{4!} = \frac{-\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6!}.$$

$$\text{Vermutung: } a_{2n} = \frac{-\lambda(4-\lambda)(8-\lambda) \dots (4n-4-\lambda)}{(2n)!}, \quad (n \geq 1).$$

Beweis per Induktion:  $n = 1$ :  $a_2 = \frac{-\lambda}{2!}$  (klar).

$$n \rightarrow n+1: \quad a_{2(n+1)} = \frac{2 \cdot 2n - \lambda}{(2n+1)(2n+2)} a_{2n} = \frac{-\lambda(4-\lambda) \dots (4(n+1)-4-\lambda)}{(2n+2)!},$$

$$\Rightarrow y_1(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda) \dots (4n-4-\lambda)}{(2n)!} x^{2n}$$

ist eine Fundamentallösung der Hermiteschen DGL.

Wähle  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ :

$$\Rightarrow a_{2n} = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

$$a_3 = \frac{2-\lambda}{2 \cdot 3}, \quad a_5 = \frac{6-\lambda}{4 \cdot 5} \cdot \frac{2-\lambda}{2 \cdot 3} = \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{5!},$$

$$a_7 = \frac{10-\lambda}{6 \cdot 7} \cdot \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{5!} = \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)}{7!}.$$

$$\text{Vermutung: } a_{2n+1} = \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda) \dots (4n-2-\lambda)}{(2n+1)!}, \quad (n \geq 1).$$

(Beweis per Induktion wie oben)

$$\Rightarrow y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda) \dots (4n-2-\lambda)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ist zweite Fundamentallösung der Hermiteschen DGL.

Da  $p, q, r$  Polynome  $\Rightarrow$  Die Potenzreihen von  $y_1$  und  $y_2$  konvergieren in ganz  $\mathbb{R}$ .

Dies könnte man auch mit Hilfe der Rekursionsformel sehen. Denn es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} \right| = 0, \quad \text{also ist der Konvergenzradius der Potenzreihen von } y_1 \text{ und } y_2: \quad R = \infty.$$

$y_1, y_2$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}$  (per Wahl der Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$ ).

Also lautet die allgemeine Lösung der Hermiteschen DGL in  $\mathbb{R}$ :

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

*Spezialfall:*  $\lambda = 2n \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$ .

In diesem Spezialfall ist jeweils eine Fundamentallösung ein Polynom, denn dann sind die Koeffizienten  $a_k$  ab einer bestimmten Stelle gleich 0:

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Rightarrow y_1(x) = 1 \quad , & \lambda = 2 &\Rightarrow y_2(x) = x \quad , \\ \lambda = 4 &\Rightarrow y_1(x) = 1 - 2x^2 \quad , & \lambda = 6 &\Rightarrow y_2(x) = x - \frac{2}{3}x^3 \quad , \\ \lambda = 8 &\Rightarrow y_1(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 \quad , \text{ usw.} \end{aligned}$$

Normiert man diese Polynome so, daß jeweils der höchste Koeffizient gleich  $2^n$  ist, so erhält man die *Hermiteschen Polynome*:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \quad , \quad H_1(x) = 2x \quad , \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad , \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad , \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad , \text{ usw.} \end{aligned}$$

Diese Polynome genügen der folgenden Beziehung:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad .$$

Sie sind orthogonal bzgl. des Skalarprodukts:  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x) dx$ ,

also gilt

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x) dx = 0 \quad \text{für } n \neq m.$$

## Beispiel

### 2. Legendresche DGL

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

In Normalform lautet die DGL:  $y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2}y = 0$  .

Die Koeffizientenfunktionen  $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$  und  $q(x) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2}$  lassen sich um  $x_0 = 0$  in Potenzreihen entwickeln mit Konvergenzradius  $R = 1$ . Also konvergiert

auch die Lösungsreihe  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  für  $|x| < 1$ .

$$\text{Ansatz: } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ,$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad ,$$

einsetzen in die gegebene DGL (nicht in die Normalform):

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(\lambda+1)a_n x^n = 0, \\ (n \rightarrow n+2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \{n(n-1) + 2n - \lambda(\lambda+1)\} a_n x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2 + n - \lambda^2 - \lambda)a_n\} x^n = 0.$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + n - \lambda^2 - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad (n \geq 0), \quad (\text{Rekursionsformel}).$$

$$\text{Da } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+1)(n+2)} \right| = 1 \Rightarrow R = 1 \quad (\text{Konvergenzradius}).$$

Wähle  $a_0 = 1, a_1 = 0$ :

$$\Rightarrow a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

$$a_2 = \frac{-\lambda(\lambda+1)}{1 \cdot 2}, \quad a_4 = \frac{(2-\lambda)(\lambda+3)}{3 \cdot 4} \cdot \frac{-\lambda(\lambda+1)}{1 \cdot 2} = \frac{-\lambda(2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3)}{4!}.$$

$$\text{Vermutung: } a_{2n} = \frac{-\lambda(2-\lambda) \dots (2n-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3) \dots (\lambda+2n-1)}{(2n)!}.$$

Beweis per Induktion: (analog wie in Beispiel 1.)

$$\Rightarrow y_1(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(2-\lambda) \dots (2n-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3) \dots (\lambda+2n-1)}{(2n)!} x^{2n}$$

ist eine Fundamentallösung der Legendreschen DGL.

Wähle  $a_0 = 0, a_1 = 1$ :

$$\Rightarrow a_{2n} = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

$$a_3 = \frac{(1-\lambda)(\lambda+2)}{2 \cdot 3},$$

$$a_5 = \frac{(3-\lambda)(\lambda+4)}{4 \cdot 5} \cdot \frac{(1-\lambda)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} = \frac{(1-\lambda)(3-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+4)}{5!}.$$

$$\text{Vermutung: } a_{2n+1} = \frac{(1-\lambda)(3-\lambda) \dots (2n-1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+4) \dots (\lambda+2n)}{(2n+1)!}$$

(Beweis per Induktion wie oben)

$$\Rightarrow y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda)(3-\lambda) \dots (2n-1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+4) \dots (\lambda+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ist zweite Fundamentallösung der Legendreschen DGL.

Der Konvergenzradius der Potenzreihen von  $y_1$  und  $y_2$  ist:  $R = 1$  (vgl. oben).

$y_1, y_2$  sind linear unabhängig in  $(-1, 1)$  (per Wahl der Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$ ).

Also lautet die allgemeine Lösung der Legendreschen DGL in  $(-1, 1)$ :

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

*Spezialfall:*  $\lambda = n$  ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

In diesem Spezialfall ist jeweils eine Fundamentallösung ein Polynom, denn dann sind die Koeffizienten  $a_k$  ab einer bestimmten Stelle gleich 0:

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Rightarrow y_1(x) = 1 , & \lambda = 1 &\Rightarrow y_2(x) = x , \\ \lambda = 2 &\Rightarrow y_1(x) = 1 - 3x^2 , & \lambda = 3 &\Rightarrow y_2(x) = x - \frac{5}{3}x^3 , \\ \lambda = 4 &\Rightarrow y_1(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4 , \text{ usw.} \end{aligned}$$

Normiert man diese Polynome so, daß sie an der Stelle  $x = 1$  gleich 1 sind, so erhält man die *Legendreschen Polynome*: (vgl. S.327 )

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 , \quad L_1(x) = x , \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) , \quad L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) , \\ L_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) , \text{ usw.} \end{aligned}$$

Diese Polynome sind orthogonal bzgl. des Skalarprodukts:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad (\text{vgl. S.325}).$$

## 6. Verallgemeinerter Potenzreihenansatz

Lassen sich die Koeffizientenfunktionen  $p, q$  oder die rechte Seite  $r$  der *Normalform* einer linearen DGL *nicht* in Potenzreihen um  $x_0 = 0$  entwickeln, so kann man für die gesuchte Lösung einen *verallgemeinerten Potenzreihenansatz* versuchen:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\varrho} = x^\varrho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \quad a_0 \neq 0 , \quad \varrho \in \mathbb{R}$$

### Beispiel

*Besselsche DGL*

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \lambda^2) y = 0 , \quad (\lambda \geq 0 \text{ fest}) , \quad x > 0$$

In Normalform lautet die Besselsche DGL:  $y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{\lambda^2}{x^2}) y = 0$ .

Die Koeffizientenfunktionen  $p(x) = \frac{1}{x}$  und  $q(x) = 1 - \frac{\lambda^2}{x^2}$  besitzen bei  $x = 0$  eine *Singularität*, lassen sich also nicht um  $x_0 = 0$  in Potenzreihen entwickeln. Man sagt auch: Die DGL ist *singulär* bei  $x = 0$ .

Wir versuchen deshalb einen *verallgemeinerten Potenzreihenansatz*:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\varrho} , \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \varrho) a_n x^{n+\varrho-1} , \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \varrho)(n + \varrho - 1) a_n x^{n+\varrho-2} . \end{aligned}$$

*Einsetzen* in die gegebene DGL (nicht in die Normalform):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho)(n+\varrho-1)a_n x^{n+\varrho} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho)a_n x^{n+\varrho} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\varrho+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^2 a_n x^{n+\varrho} = 0 ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+\varrho)(n+\varrho-1) + (n+\varrho) - \lambda^2 \right\} a_n x^{n+\varrho} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+\varrho} = 0 ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+\varrho)^2 - \lambda^2 \right\} a_n x^{n+\varrho} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+\varrho} = 0 .$$

*Koeffizientenvergleich:*

$$n = 0 : \quad (\varrho^2 - \lambda^2)a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varrho = \pm \lambda} \quad (\text{da } a_0 \neq 0 \text{ nach Voraussetzung}),$$

$$n = 1 : \quad ((\varrho + 1)^2 - \lambda^2)a_1 = 0 ,$$

$$n \geq 2 : \quad ((n + \varrho)^2 - \lambda^2)a_n = -a_{n-2} .$$

Für  $\varrho = \pm \lambda$  folgt aus der Gleichung für  $n = 1$ :

$$((\pm \lambda + 1)^2 - \lambda^2)a_1 = (\pm 2\lambda + 1)a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \quad \text{für } \lambda \neq \frac{1}{2} .$$

Für  $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \cdot a_1 = 0 \Rightarrow a_1$  beliebig; in diesem Fall wählen wir  $a_1 = 0$ .

Also haben wir insgesamt:  $a_1 = 0$ .

*1. Fall:*  $\varrho = \lambda$

$$\text{Für } n \geq 2 \Rightarrow ((n + \lambda)^2 - \lambda^2)a_n = -a_{n-2} \Rightarrow (n^2 + 2n\lambda)a_n = -a_{n-2} \Rightarrow$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n + 2\lambda)} \quad (\text{Rekursionsformel}).$$

Da  $a_1 = 0 \Rightarrow a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0$ .

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2 + 2\lambda)} = -\frac{a_0}{4(1 + \lambda)} ,$$

$$a_4 = -\frac{1}{4(4 + 2\lambda)} \cdot \frac{-a_0}{4(1 + \lambda)} = \frac{a_0}{4^2 \cdot 2(1 + \lambda)(2 + \lambda)} ,$$

$$a_6 = -\frac{1}{6(6 + 2\lambda)} \cdot \frac{a_0}{4^2 \cdot 2(1 + \lambda)(2 + \lambda)} = \frac{-a_0}{4^3 \cdot 2 \cdot 3(1 + \lambda)(2 + \lambda)(3 + \lambda)} .$$

$$\text{Vermutung: } a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{4^n n! (1 + \lambda)(2 + \lambda) \dots (n + \lambda)} .$$

*Beweis per Induktion:*

$$n = 1 : \quad a_2 = \frac{-a_0}{4(1 + \lambda)} \quad (\text{klar}).$$

$n \rightarrow n + 1$ :

$$a_{2(n+1)} = -\frac{1}{2(n+1) \cdot 2(n+1+\lambda)} \cdot \frac{(-1)^n a_0}{4^n n! (1 + \lambda)(2 + \lambda) \dots (n + \lambda)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} a_0}{4^{n+1} (n+1)! (1 + \lambda)(2 + \lambda) \dots (n+1 + \lambda)} .$$

Also gilt:

$$y_1(x) = a_0 x^\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{4^n n! (1 + \lambda)(2 + \lambda) \dots (n + \lambda)} x^{2n+\lambda}$$

ist eine Fundamentallösung der *Besselschen DGL*.

Da für die  $\Gamma$ -Funktion gilt (vgl. S.221 )

$$\Gamma(\lambda + n + 1) = (1 + \lambda)(2 + \lambda) \dots (n + \lambda)\Gamma(\lambda + 1) \Rightarrow$$

$$y_1(x) = a_0 x^\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(\lambda + 1)}{2^{2n} n! \Gamma(\lambda + n + 1)} x^{2n+\lambda} .$$

Wählen wir  $a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}$  , so erhalten wir

$$y_1(x) = J_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \lambda + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}$$

2.Fall:  $\rho = -\lambda$

Dieser Fall führt für  $\lambda \notin \mathbb{N}_0$  analog auf

$$y_2(x) = J_{-\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n - \lambda + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\lambda} , \lambda \notin \mathbb{N}_0$$

$J_\lambda$  und  $J_{-\lambda}$  heißen *Besselfunktionen*.

$J_\lambda$  ist konvergent in  $\mathbb{R}$ ,  $J_{-\lambda}$ , ( $\lambda \notin \mathbb{N}_0$ ), ist konvergent in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$J_\lambda$  ist für  $x \rightarrow 0$  beschränkt,  $J_{-\lambda}$ , ( $\lambda \notin \mathbb{N}_0$ ), ist für  $x \rightarrow 0$  unbeschränkt.

$J_\lambda$  und  $J_{-\lambda}$  sind für  $\lambda \notin \mathbb{N}_0$  linear unabhängig in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Denn:

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda g_\lambda(x) \text{ mit } g_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \lambda + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \text{ und}$$

$$J_{-\lambda}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda} h_\lambda(x) \text{ mit } h_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n - \lambda + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} .$$

$g_\lambda$  und  $h_\lambda$  sind Potenzreihen mit Konvergenzradius  $R = \infty$ , denn aus der Rekursionsformel folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n(n + 2\lambda)} \right| = 0.$$

Also gilt für  $\lambda \geq 0$ : Die Reihe von  $J_\lambda(x)$  konvergiert in  $\mathbb{R}$ , die Reihe von  $J_{-\lambda}(x)$  konvergiert in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_\lambda(x) = \begin{cases} g_0(0) = 1 & , \text{falls } \lambda = 0 \\ 0 & , \text{falls } \lambda > 0, \end{cases}$$

also ist  $J_\lambda(x)$  beschränkt für  $x \rightarrow 0$ .

$J_{-\lambda}(x)$  ist wegen des Vorfaktors  $(x/2)^{-\lambda}$  unbeschränkt für  $x \rightarrow 0$  (falls  $\lambda > 0$ ).

Hieraus folgt sofort, daß  $J_\lambda(x)$  und  $J_{-\lambda}(x)$  (für  $\lambda \notin \mathbb{N}_0$ ) in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  linear unabhängig sind.

Also lautet die allgemeine Lösung der *Besselschen DGL* für  $\lambda \notin \mathbb{N}_0$ :

$$y(x) = c_1 J_\lambda(x) + c_2 J_{-\lambda}(x) , c_i \in \mathbb{R}.$$

Für  $\lambda = 1/2$  haben wir die Lösung bereits früher mit einer anderen Methode bestimmt (vgl. S.506/507). Es gilt:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Der Faktor  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$  tritt auf, da  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} J_{-1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ .

*Spezialfall:*  $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$

Dann erhalten wir

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad \text{Da } \Gamma(n+k+1) = (n+k)! \text{ ist, folgt:}$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

ist eine Lösung der *Besselschen DGL* für  $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$  (*Besselfunktion*  $J_n$ ).

Der zweite Wert von  $\varrho$ :  $\varrho = -n$  ergibt in diesem Fall *keine Lösung*, denn:

$$\begin{aligned} \text{Nach der Rekursionsformel für } k \geq 2 \text{ gilt: } & ((k-n)^2 - n^2)a_k = -a_{k-2} \\ \Rightarrow (k^2 - 2nk)a_k = -a_{k-2} & \Rightarrow k(k-2n)a_k = -a_{k-2}. \end{aligned}$$

Für  $k = 2n \Rightarrow a_{k-2} = 0 \Rightarrow a_{k-4} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_0 = 0$  (folgt jeweils aus der Rekursionsformel)  $\Rightarrow$  Widerspruch zu  $a_0 \neq 0$ .

Setzen wir  $J_{-n}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} J_{-\lambda}(x)$ , so erhält man eine von  $J_n$  *abhängige* Lösung.

Deshalb benutzt man die Lösung  $N_n(x)$  mit

$$N_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\lambda(x) \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}(x)}{\sin \lambda\pi}$$

$N_n$  ist eine von  $J_n$  *linear unabhängige Lösung* der *Besselschen DGL* für  $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$ .  $N_n$  heißt *Neumannfunktion*.

Also ist  $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 N_n(x)$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , die allgemeine Lösung der *Besselschen DGL* für  $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$ .

Nach der Regel von de l'Hospital folgt aus der Definition von  $N_n(x)$ :

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow n} \left( \frac{\partial J_\lambda(x)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda} \right).$$

Da die *Bessel- und Neumann-Funktionen* für die Anwendung sehr wichtig sind, wollen wir noch einige wichtige Eigenschaften herleiten oder zitieren:

Weitere Eigenschaften der Bessel- und Neumann-Funktionen

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{2!(n+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+4} - \dots$$

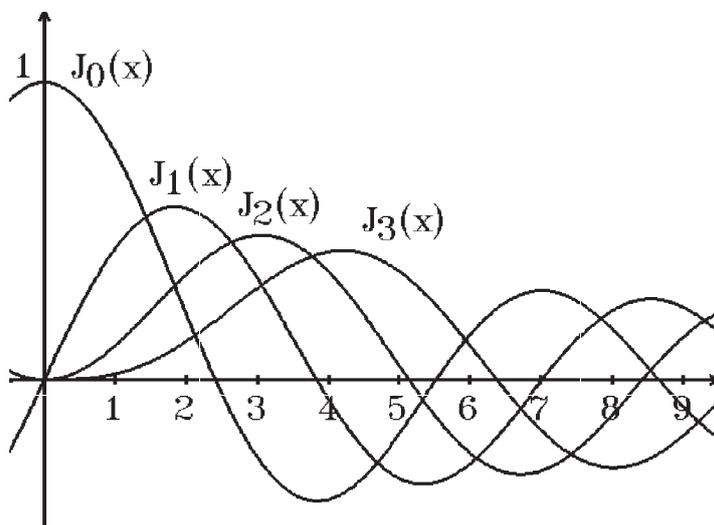
Also gilt:

$$J_0(0) = 1 \quad , \quad J_n(0) = 0 \quad , \quad \text{falls } n \geq 1.$$

$$J'_0(0) = 0 \quad , \quad J'_1(0) = \frac{1}{2} \quad , \quad J'_n(0) = 0 \quad , \quad \text{falls } n \geq 2.$$

Integraldarstellung: (vgl. Übungsaufgabe 80.)

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$



Bessel-Funktionen

Berechnung der Funktionswerte:

Für kleine  $|x|$  kann zur Berechnung der Funktionswerte die Potenzreihe benutzt werden. Für größere  $|x|$  berechnet man die Funktionswerte besser mit Hilfe der Integraldarstellung, indem man das Integral mit Hilfe einer numerischen Integrationsformel (z.B. Simpson-Formel) näherungsweise berechnet.

Ohne Beweis möchte ich noch die folgenden Eigenschaften zitieren:

Rekursionsformeln: Für  $\lambda > 0$  ,  $x > 0$  gilt:

a)  $J_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x} J_\lambda(x) - J_{\lambda-1}(x)$  .

b)  $J_{\lambda+1}(x) = \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) - J'_\lambda(x)$  ,  $J_1(x) = -J'_0(x)$  .

*Orthogonalitätseigenschaft:*

Sind  $\alpha_1, \alpha_2$  zwei Nullstellen von  $J_n(x)$  mit  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , so gilt:

$$\text{a) } \int_0^1 x J_n(\alpha_1 x) J_n(\alpha_2 x) dx = 0 .$$

$$\text{b) } \int_0^1 x J_n(\alpha_1 x) J_n(\alpha_1 x) dx = \frac{1}{2} J_n'^2(\alpha_1) \quad (\text{Normierung}).$$

Weitere Eigenschaften siehe Literatur, z.B.: Abramowitz-Stegun: Handbook of Mathematical Functions.

Die *Neumann-Funktion*  $N_n$  ist *unbeschränkt* für  $x \rightarrow 0$ .

Es gilt:  $\lim_{x \rightarrow 0} |N_n(x)| = \infty$  .

*Denk:* Nach "Reduktion der Ordnung" gilt:

$$N_n(x) = c J_n(x) \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} \frac{1}{J_n^2(x)} dx = c J_n(x) \int \frac{1}{x J_n^2(x)} dx .$$

Mit  $J_n(x) = a_n x^n + \dots \Rightarrow$  für  $x \rightarrow 0$ :

$$N_n(x) \approx \tilde{c} x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} dx = \begin{cases} \tilde{c} \ln|x| & , \text{ falls } n = 0 \\ \frac{d}{x^n} & , \text{ falls } n > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |N_n(x)| = \infty \Rightarrow N_n$  ist *unbeschränkt* für  $x \rightarrow 0$ .

Da  $J_n$  beschränkt und  $N_n$  unbeschränkt für  $x \rightarrow 0 \Rightarrow J_n$  und  $N_n$  sind *linear unabhängig* in  $(0, \infty)$

$\Rightarrow y_n(x) = c_1 J_n(x) + c_2 N_n(x)$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der *Besselschen DGL* (für  $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$ ) in  $(0, \infty)$ .

$y_n(x) = c J_n(x)$  ,  $c \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine, für  $x \rightarrow 0$  *beschränkte* Lösung der *Besselschen DGL* (für  $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$ ) in  $(0, \infty)$ .

*Modifizierte Besselsche DGL*

$$x^2 y'' + x y' + (\alpha^2 x^2 - n^2) y = 0 \quad , \quad (\alpha > 0 , n \in \mathbb{N}_0)$$

Die Substitution  $t = \alpha x$  führt für  $u(t) = y(x)$  auf:

$$y(x) = u(t) = u(\alpha x) \Rightarrow y'(x) = \alpha u'(t) \quad , \quad y''(x) = \alpha^2 u''(t) \quad ,$$

*einsetzen ergibt:*

$$\alpha^2 x^2 u''(t) + \alpha x u'(t) + (\alpha^2 x^2 - n^2) u(t) = 0 \Rightarrow$$

$$t^2 u''(t) + t u'(t) + (t^2 - n^2) u(t) = 0 \quad (\text{Besselsche DGL})$$

$\Rightarrow u(t) = c_1 J_n(t) + c_2 N_n(t)$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung

$\Rightarrow y(x) = c_1 J_n(\alpha x) + c_2 N_n(\alpha x)$  ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der *modifizierten Besselschen DGL*. ( $y$  beschränkt für  $x \rightarrow 0 \Rightarrow y(x) = c J_n(\alpha x)$  ,  $c \in \mathbb{R}$ ).

## Randwertaufgaben, Eigenwertaufgaben

Bisher waren meistens die DGL mit zusätzlichen *Anfangsbedingungen* gegeben, z.B.:  $y'' + y = x$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 1$  (*Anfangswertaufgabe (AWA)*).

In der Anwendung kommen aber auch DGL mit zusätzlichen *Randbedingungen* (*Randwertaufgaben (RWA)*) vor, z.B.: Schwingungsgleichung eines eingespannten Balkens:

$$y'' + \omega^2 y = f(x) \quad , \quad (0 \leq x \leq l) \quad , \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(l) = 0 \quad (\text{Randbedingungen}).$$



Bei RWA können je nach Randbedingungen folgende Fälle auftreten:

Es existieren a) *keine* Lösung , b) *genau eine* Lösung , c) *mehrere* Lösungen.

Bei der Berechnung der Lösung einer RWA geht man folgendermaßen vor:

- a) Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL
- b) Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung.

### Beispiele

1.  $y'' + y = 0$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y(\pi) = 1$  .

Allgemeine Lösung der DGL:  $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$  .

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$  ,  $y(\pi) = c_2 \sin \pi = 0 \neq 1 \Rightarrow$  es existiert *keine* Lösung.

2.  $y'' + y = 0$  ,  $y(0) = y(\pi) = 0$  .

Allgemeine Lösung der DGL:  $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$  .

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$  ,  $y(\pi) = c_2 \sin \pi = 0 \Rightarrow c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(x) = c \sin x$  ,  $c \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der RWA.

### Definition 14.10 : Homogene Randbedingungen

Randbedingungen einer RWA mit einer linearen DGL  $n$ -ter Ordnung in  $[a, b]$  heißen *linear homogen*, wenn sie von der Form sind:

$$U[y] = \sum_{k=0}^{n-1} \left( a_k y^{(k)}(a) + b_k y^{(k)}(b) \right) = 0 \quad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

### Bemerkung :

Eine RWA mit *linearer homogener DGL* und *linearen homogenen Randbedingungen* besitzt immer mindestens eine Lösung, nämlich die *triviale* Lösung  $y(x) \equiv 0$ .

Also interessieren wir uns bei einer solchen *linearen homogenen RWA* nur noch dafür, ob auch *nichttriviale* Lösungen existieren.

### Beispiel

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \quad , \quad (0 \leq x \leq 1) \quad , \quad (\lambda > 0, \text{ fest}),$$

$$y(0) - y(1) = 0 \quad , \quad y'(0) - y'(1) = 0 \quad (\text{Randbedingungen}).$$

Allgemeine Lösung der DGL:  $y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$  .

$$\begin{aligned}
y(0) - y(1) &= c_1 - c_1 \cos \lambda - c_2 \sin \lambda = 0, \\
y'(0) - y'(1) &= \lambda c_2 + \lambda c_1 \sin \lambda - \lambda c_2 \cos \lambda = 0 \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 - \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \lambda \sin \lambda & \lambda(1 - \cos \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dieses lineare GLS ist nur dann nichttrivial lösbar (und damit  $y \not\equiv 0$ )  $\Leftrightarrow$  Koeffizientendeterminante = 0, also

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \lambda \sin \lambda & \lambda(1 - \cos \lambda) \end{pmatrix} = \lambda((1 - \cos \lambda)^2 + \sin^2 \lambda) = 2\lambda(1 - \cos \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\text{da } \lambda > 0).$$

In diesem Fall ( $\lambda = 2n\pi$ ) gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$\Rightarrow y(x) = c_1 \cos(2n\pi x) + c_2 \sin(2n\pi x)$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung der RWA für  $\lambda_n = 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Dieses Beispiel, das wir gerade behandelt haben, ist ein Beispiel für eine *Eigenwertaufgabe (EWA)*:

**Definition 14.11 :** *Eigenwertaufgabe (EWA)*

Gegeben sei eine *lineare homogene DGL*, die von einem Parameter  $\lambda$  abhängt.

Zusätzlich seien *lineare homogene Randbedingungen* gegeben.

Eine solche *lineare homogene RWA* heißt *Eigenwertaufgabe*.

$\lambda$  heißt *Eigenwert (EW)*, wenn eine *nichttriviale Lösung* der RWA existiert.

Jede solche nichttriviale Lösung heißt *Eigenfunktion (EF)* zum EW  $\lambda$ .

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
y'' + \lambda y &= 0, \quad (0 \leq x \leq l, \quad l > 0 \text{ fest}) \\
y(0) = y(l) &= 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

*Lösung der DGL:* Der Ansatz  $y = e^{\mu x}$  führt auf die charakteristische Gleichung  $\mu^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \mu^2 = -\lambda$ .

*Fallunterscheidung:*

1. Fall:  $\lambda < 0 \Rightarrow \mu = \pm \sqrt{-\lambda}$   
 $\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ .

*Randbedingungen einsetzen:*

$$\begin{aligned}
y(0) = c_1 + c_2 &= 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \\
\Rightarrow y(x) &= c_1(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}) = 2c_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}x). \\
y(l) = 2c_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}l) &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (\text{da } \sinh(\sqrt{-\lambda}l) \neq 0 \text{ für } l > 0) \\
\Rightarrow c_1 = c_2 &= 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0 \Rightarrow \text{RWA ist nur trivial lösbar.}
\end{aligned}$$

2. Fall:  $\lambda = 0 \Rightarrow \mu = 0$  doppelte Nullstelle

$\Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x$ .

*Randbedingungen einsetzen:*

$y(0) = c_1 = 0$  ,  $y(l) = c_2 l = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0 \Rightarrow$  RWA ist nur trivial lösbar.

3. Fall:  $\lambda > 0 \Rightarrow \mu = \pm i\sqrt{\lambda}$   
 $\Rightarrow y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$  .

Randbedingungen einsetzen:

$y(0) = c_1 = 0$  ,  $y(l) = c_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi$  ,  $n \in \mathbb{N}$  (sonst nur trivial lösbar)  $\Rightarrow$  Die EW der EWA sind

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 , \quad n \in \mathbb{N}$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen (EF) lauten:

$$y_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{l}x , \quad c_n \in \mathbb{R} , \quad n \in \mathbb{N}$$

In allen anderen Fällen ist die RWA nur trivial lösbar, also sind dies die einzigen EW und EF der EWA.

### DGL-Systeme 1. Ordnung

Gegeben: Ein DGL-System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen:  $y_1(\xi) = \eta_1$  ,  $y_2(\xi) = \eta_2$  ,  $\dots$  ,  $y_n(\xi) = \eta_n$

mit  $f_i : I \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \vec{y} \end{pmatrix} : a \leq x \leq b , \vec{y} \in D \subset \mathbb{R}^n \right\}$  und  $\xi \in [a, b]$  ,  $(\eta_1, \dots, \eta_n)^T \in D$ .

Gesucht: Funktionen  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , die auf einer Umgebung  $U(\xi) \subset [a, b]$  dem System der  $n$  DGL 1. Ordnung und den Anfangsbedingungen genügen.

In Vektorschreibweise erhalten wir mit  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  ,  $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$  ,  $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad , \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

An dieser Schreibweise erkennt man, daß bei der Behandlung von DGL-Systemen

1. Ordnung fast alles analog verläuft wie bei einfachen DGL 1. Ordnung (vgl. S.479 ff). Auch bei DGL-Systemen werden wir - unter gewissen Voraussetzungen - einen Existenz- und Eindeutigkeitsatz (bei zusätzlichen Anfangsbedingungen) zeigen können. Dabei ist auch hier die *Lipschitzbedingung* eine wesentliche Voraussetzung:

**Definition 14.12 :** *Lipschitzbedingung*

Sei  $f : I \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  genügt in  $I$  einer *Lipschitzbedingung* bzg.  $y_1, y_2, \dots, y_n$   
 $\Leftrightarrow \exists M > 0$  mit  $|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)| \leq M \sum_{i=1}^n |y_i - \tilde{y}_i|$   
für alle  $(x, y_1, \dots, y_n)^T, (x, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)^T \in I$ .

**Satz 14.13 :**

Sei  $f : I \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sind in  $I$  die *partiellen Ableitungen*  $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ , ( $1 \leq i \leq n$ ), *stetig* und *beschränkt*, so genügt  $f$  in  $I$  einer *Lipschitzbedingung* bzg.  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

*Beweis :*

Aus dem Mittelwertsatz für Funktionen von mehreren Variablen folgt:

$$\begin{aligned} & |f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \tilde{y}_1 + \delta(y_1 - \tilde{y}_1), \dots, \tilde{y}_n + \delta(y_n - \tilde{y}_n))(y_i - \tilde{y}_i) \right| \leq M \sum_{i=1}^n |y_i - \tilde{y}_i|. \end{aligned}$$

$(0 < \delta < 1)$

**Beispiel**

$f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = a_1(x)y_1 + a_2(x)y_2 + \dots + a_n(x)y_n + b(x)$  mit  
 $a_i, b : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *stetig*, also  $f$  *linear* in  $y_1, \dots, y_n$ .

Dann gilt:  $\left| \frac{\partial f}{\partial y_i} \right| = |a_i(x)| \leq \max_{x \in [\alpha, \beta]} |a_i(x)| \quad \forall 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y_i}$  sind in  $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \vec{y} \end{pmatrix} : x \in [\alpha, \beta], \vec{y} \in \mathbb{R}^n \right\}$  *stetig* und *beschränkt*

$\Rightarrow f$  genügt in  $I$  einer *Lipschitzbedingung* bzg.  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Genau wie bei einfachen DGL 1. Ordnung (vgl. S.481) gibt es auch für DGL-Systeme  $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$  mit  $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$  einen Existenz- und Eindeutigkeitsatz.

Für diesen Existenz- und Eindeutigkeitsatz benutzen wir wieder die Vektoren

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

**Satz 14.14 :** *Existenz- und Eindeutigkeitsatz*

Gegeben:  $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$  ,  $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ .

Die Funktionen  $f_i : I \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  seien in

$I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \vec{y} \end{pmatrix} : |x - \xi| \leq \alpha, |y_i - \eta_i| \leq \beta, (1 \leq i \leq n) \right\}$  stetig und genügen in

$I$  einer Lipschitzbedingung bzg.  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Sei  $K = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \max_I |f_i(x, \vec{y})| \}$  und  $\delta = \min \{ \alpha, \frac{\beta}{K} \}$ .

Dann existiert in  $U_\delta(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta\}$  genau ein Lösungssystem  $y_1, \dots, y_n$  des gegebenen DGL-Systems  $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$  mit den Anfangsbedingungen  $y_1(\xi) = \eta_1, y_2(\xi) = \eta_2, \dots, y_n(\xi) = \eta_n$ .

*Beweis :*

Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes von Picard-Lindelöf bei einer einfachen DGL 1. Ordnung (vgl. S.481 ).

Das folgende System von Integralgleichungen

$$y_i(x) = \eta_i + \int_{\xi}^x f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) dt, \quad (1 \leq i \leq n)$$

ist äquivalent zu dem gegebenen DGL-System mit Anfangsbedingungen.

Man konstruiert nun eine Folge von Funktionen  $\vec{y}_k = \begin{pmatrix} y_{k,1} \\ \vdots \\ y_{k,n} \end{pmatrix}$  mit

$$\vec{y}_0 = \vec{\eta} \quad \text{und} \quad \vec{y}_k(x) = \vec{\eta} + \int_{\xi}^x \vec{f}(t, \vec{y}_{k-1}(t)) dt \quad (\text{koordinatenweise integrieren}).$$

Dann zeigt man wieder die gleichmäßige Konvergenz  $\vec{y}_k \rightarrow \vec{y}$  in  $U_\delta(\xi)$ .

Von  $\vec{y}$  wird dann gezeigt, daß es Lösung des DGL-Systems mit  $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$  ist, und daß es einzige Lösung dieser Art ist.

**Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung**

*Gegeben:*

$$y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x)$$

$\vdots$

$$y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)$$

mit  $y_1(\xi) = \eta_1, \dots, y_n(\xi) = \eta_n$  ,  $\xi \in [a, b]$  ,  $\eta_i \in \mathbb{R}$ .

Die Funktionen  $a_{ij}, b_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien alle stetig in  $[a, b]$ .

In diesem Fall ist Satz 14.14 anwendbar (für  $\beta = \infty$ ), denn die Lipschitzbedingung ist bzg.  $y_1, \dots, y_n$  erfüllt (vgl. Beispiel S.524 ). Also gilt der folgende Satz:

**Satz 14.15 :** *Existenz- und Eindeutigkeitsatz für lineare DGL-Systeme*

Sind alle Koeffizientenfunktionen  $a_{ij}$  und die Funktionen  $b_i$  (der rechten Seite) stetig in  $[a, b]$  mit  $\xi \in (a, b)$ , so besitzt das lineare DGL-System in  $(a, b)$  genau ein Lösungssystem  $y_1, y_2, \dots, y_n$  mit  $y_1(\xi) = \eta_1, \dots, y_n(\xi) = \eta_n$ .

Wir stellen nun einen Zusammenhang her zwischen einer gewöhnlichen DGL  $n$ -ter Ordnung und einem DGL-System (mit  $n$  Gleichungen):

**Zusammenhang zwischen DGL  $n$ -ter Ordnung und DGL-System**

I) DGL  $n$ -ter Ordnung:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta_1, y'(\xi) = \eta_2, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n .$$

II) DGL-System 1. Ordnung (mit  $n$  Gleichungen):

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = y_3$$

$\vdots$

$$y'_{n-1} = y_n$$

$$y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\text{mit} \quad y_1(\xi) = \eta_1, y_2(\xi) = \eta_2, \dots, y_n(\xi) = \eta_n .$$

Es gilt: I) und II) sind äquivalent.

Denn: Führen wir die folgenden neuen Funktionen ein:

$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$
--

so gilt:  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ist Lösungssystem von II)  $\Leftrightarrow$   $y$  ist Lösung von I).

**Beispiel**

$$y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2 .$$

Setzen wir  $y_1 = y, y_2 = y'$ , so erhalten wir das DGL-System 1. Ordnung

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = -2y_1 + 3y_2 + x$$

$$\text{mit} \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = -2 .$$

Wie in diesem Beispiel geht allgemein eine lineare DGL  $n$ -ter Ordnung über in ein lineares DGL-System 1. Ordnung. Also folgt aus Satz 14.15 sofort die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung einer linearen DGL  $n$ -ter Ordnung mit Anfangsbedingungen (vgl. Satz 7.5, S.234), falls die Koeffizientenfunktionen und die rechte Seite stetig in  $[a, b]$  sind.

Sei also  $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$  eine lineare DGL  $n$ -ter Ordnung, dann gilt der folgende Existenz- und Eindeutigkeitsatz:

**Satz 14.16 :** *Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare DGL*

Sei  $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$

eine *lineare* DGL  $n$ -ter Ordnung mit den Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_1, y'(\xi) = \eta_2, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n.$$

Sind alle *Koeffizientenfunktionen*  $a_i$  und die *rechte Seite*  $f$  *stetig* in  $[a, b]$  mit  $\xi \in (a, b)$ , so ist die Anfangswertaufgabe (AWA) *eindeutig lösbar* in  $(a, b)$ .

Wir wollen uns nun wieder mit *linearen DGL-Systemen 1. Ordnung* befassen. In Vektorschreibweise sieht ein solches lineares DGL-System folgendermaßen aus

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$$

$$\text{mit } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

$A(x)$  ist die Koeffizientenmatrix und  $\vec{b}(x)$  die rechte Seite des linearen DGL-Systems.

Das lineare DGL-System heißt *homogen*, wenn  $\vec{b}(x) \equiv \vec{0}$ , sonst *inhomogen*. Alle Funktionen  $a_{ij}$  und  $b_i$  seien *stetig* in  $(a, b)$ .

Aus dem Zusammenhang zwischen *linearem DGL-System 1. Ordnung* und *linearer DGL  $n$ -ter Ordnung* folgen nun sofort folgende Aussagen:

**Satz 14.17 :**

a) Die allgemeine Lösung des *linearen DGL-Systems*  $\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$  (mit  $n$  Gleichungen) setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung  $\vec{y}_h$  des zugehörigen homogenen Systems und einer partikulären Lösung  $\vec{y}_0$  des inhomogenen Systems, also  $\vec{y} = \vec{y}_h + \vec{y}_0$ .

b) Seien  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$   $n$  *linear unabhängige Lösungen* des homogenen Systems in  $(a, b)$  (also  $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\}$  ein *Fundamentalsystem*), so lautet die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems in  $(a, b)$  :

$$\vec{y}_h(x) = c_1\vec{y}_1(x) + c_2\vec{y}_2(x) + \dots + c_n\vec{y}_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

c)  $n$  Lösungen  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$  des homogenen DGL-Systems sind *linear unabhängig* in  $(a, b)$ , wenn die *Wronsky-Determinante*  $W(x) = \det(\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)) \neq 0$  für ein  $x_0 \in (a, b)$  ist. In diesem Fall ist  $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .

d) Für die Wronski-Determinante gilt:  $W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) dt}$ .

e) Bilden die  $n$  Lösungen  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$  des homogenen DGL-Systems ein Fundamentalsystem, so ist (*Variation der Konstanten*)

$$\vec{y}_0(x) = \sum_{i=1}^n \vec{y}_i(x) \int \frac{W_i(x, \vec{b})}{W(x)} dx$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen DGL-Systems. Hierbei ist  $W_i(x, \vec{b}) = \det(\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_{i-1}(x), \vec{b}(x), \vec{y}_{i+1}(x), \dots, \vec{y}_n(x))$ .

*Beweis :*

Die Beweise zu diesen Aussagen verlaufen alle analog zu den Beweisen der entsprechenden Aussagen bei linearen DGL  $n$ -ter Ordnung.

### Beispiel

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + e^x \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 + e^{-x} \end{aligned} \quad \text{oder in Vektorschreibweise} \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix} .$$

*homogen: Elimination (Entkopplung)*

Auflösung der 1. Gleichung (homogen) nach  $y_2$ :

$$y_1' = 3y_1 - y_2 \Rightarrow y_2 = 3y_1 - y_1' \Rightarrow y_2' = 3y_1' - y_1'' ,$$

einsetzen in 2. Gleichung:

$$\begin{aligned} 3y_1' - y_1'' &= 4y_1 - 2(3y_1 - y_1') \Rightarrow y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 &= (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \quad (\text{charakteristisches Polynom}) \\ \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 &\Rightarrow y_1(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} , \quad c_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Einsetzen in  $y_2 = 3y_1 - y_1'$ :

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 3c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{2x} + c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{2x} \\ \Rightarrow y_2(x) &= 4c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} , \quad c_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} , \quad c_i \in \mathbb{R}$ , ist allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems.

$\left\{ \vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-x} , \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} \right\}$  bilden ein Fundamentalsystem in  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Denn: } W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ 4e^{-x} & e^{2x} \end{pmatrix} = -3e^x \neq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \vec{y}_1, \vec{y}_2$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}$ .

*partikuläre Lösung: Variation der Konstanten*

$$W_1(x, \vec{b}) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^{-x} & e^{2x} \end{pmatrix} = e^{3x} - e^x ,$$

$$W_2(x, \vec{b}) = \det \begin{pmatrix} e^{-x} & e^x \\ 4e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} = e^{-2x} - 4 ,$$

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x, \vec{b})}{W(x)} dx = -\frac{1}{3} \int e^{2x} dx + \frac{1}{3} \int dx = -\frac{1}{6} e^{2x} + \frac{1}{3} x ,$$

$$c_2(x) = \int \frac{W_2(x, \vec{b})}{W(x)} dx = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} dx + \frac{4}{3} \int e^{-x} dx = \frac{1}{9} e^{-3x} - \frac{4}{3} e^{-x} ,$$

$$\vec{y}_0(x) = \left( -\frac{1}{6} e^{2x} + \frac{1}{3} x \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-x} + \left( \frac{1}{9} e^{-3x} - \frac{4}{3} e^{-x} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_0(x) = \left(-\frac{1}{6}e^x + \frac{1}{3}xe^{-x}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{9}e^{-x} - \frac{4}{3}e^x\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_0(x) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -2 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} x e^{-x}$$

ist partikuläre Lösung.

Damit lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen DGL-Systems:

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ -2 \end{pmatrix} e^x + \left(\begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} x\right) e^{-x}, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

oder koordinatenweise:

$$y_1(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{2} e^x + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x\right) e^{-x},$$

$$y_2(x) = 4c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2e^x + \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{3}x\right) e^{-x}.$$

Dieses Ergebnis hätte man viel einfacher erhalten können, wenn man sofort bei der *Elimination* die rechte Seite mit berücksichtigt hätte.

Eine partikuläre Lösung hätte man auch einfacher mit Hilfe eines *speziellen Ansatzes* erhalten können. Dazu muß man zunächst die rechte Seite aufspalten:

$$\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Ansatz für  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x$ :

$$\vec{y}_{0,1}(x) = \vec{a}e^x \quad \text{mit } \vec{a} \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{keine Resonanz}).$$

Einsetzen ergibt:

$$\vec{a}e^x = A\vec{a}e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x \Rightarrow (A - E)\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow a_2 = -2, \quad a_1 = \frac{1}{2}(-1 - 2) = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_{0,1}(x) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -2 \end{pmatrix} e^x.$$

Ansatz für  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$ :

$$\vec{y}_{0,2}(x) = (\vec{a} + \vec{b}x)e^{-x} \quad \text{mit } \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{einfache Resonanz, da } \lambda = -1 \text{ einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms}).$$

Einsetzen ergibt:

$$(\vec{b} - \vec{a} - \vec{b}x)e^{-x} = A(\vec{a} + \vec{b}x)e^{-x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \Rightarrow (\text{Koeffizientenvergleich})$$

$$(A + E)\vec{b} = \vec{0},$$

$$(A + E)\vec{a} = \vec{b} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 = \alpha, \quad b_2 = 4\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{b} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 0 \\ 4\alpha - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & \alpha \\ 4 & -1 & 4\alpha - 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 3\alpha - 1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$  nur lösbar für  $\alpha = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow a_1 = \beta, a_2 = -1/3 + 4\beta, \beta \in \mathbb{R},$$

setzen wir  $\beta = 1/9 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{y}_{0,2}(x) = \left( \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} x \right) e^{-x}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_0(x) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -2 \end{pmatrix} e^x + \left( \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} x \right) e^{-x}$$

ist partikuläre Lösung (vgl. S.529).

Wir wollen uns nun mit dem Problem beschäftigen, ein *Fundamentalsystem* eines linearen homogenen DGL-Systems 1. Ordnung zu bestimmen, wenn alle Koeffizientenfunktionen  $a_{ij}(x)$  *konstant* sind, also die Koeffizientenmatrix  $A$  *konstant* (also unabhängig von  $x$ ) ist.

### Lineares homogenes DGL-System 1. Ordnung mit **konstanten Koeffizienten**

Gegeben:

$$\boxed{\vec{y}' = A\vec{y}}$$

wobei  $A$  eine  $(n, n)$ -Matrix reeller Zahlen ist.

Ansatz:  $\vec{y}(x) = \vec{c}e^{\lambda x}, \vec{c} \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}.$

Einsetzen ergibt:  $\lambda \vec{c}e^{\lambda x} = A\vec{c}e^{\lambda x} \Rightarrow$  (da  $e^{\lambda x} \neq 0$ )

$$\boxed{A\vec{c} = \lambda \vec{c}}$$

Das ist die *Eigenwertgleichung* für die Matrix  $A$ .

Also ist  $\vec{y}(x) = \vec{c}e^{\lambda x}$  genau dann Lösung des linearen homogenen DGL-Systems  $\vec{y}' = A\vec{y}$ , wenn  $\lambda$  *Eigenwert (EW)* und  $\vec{c}$  zugehöriger *Eigenvektor (EV)* der Koeffizientenmatrix  $A$  ist.

Es gilt:

a) Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, sind auch die Lösungen  $\vec{y}_i(x) = \vec{c}_i e^{\lambda_i x}$  *linear unabhängig* in  $\mathbb{R}$ .

b) Hat also  $A$   $n$  *verschiedene reelle EW*, so hat man damit ein *Fundamentalsystem* gefunden.

c) Ist ein EW  $\lambda$  *komplex* mit zugehörigem komplexem EV  $\vec{c}$ , so gilt:

mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist auch  $\bar{\lambda}$  EW von  $A$  mit zugehörigem EV  $\vec{\bar{c}}$ , und  $\vec{c}e^{\lambda x}$  und  $\vec{\bar{c}}e^{\bar{\lambda}x}$  sind zwei komplexe Lösungen. Da *Realteil* und *Imaginärteil* einer komplexen Lösung reelle

Lösungen des linearen homogenen DGL-Systems sind, erhält man hieraus zwei linear unabhängige reelle Lösungen:

$Re(\vec{c}e^{\lambda x})$  und  $Im(\vec{c}e^{\lambda x})$ .

d) Ist  $\lambda$  ein  $l$ -facher EW von  $A$  mit weniger als  $l$  vielen linear unabhängigen EV (also  $\dim ER_\lambda < l$ ), dann sind folgende Funktionen Lösungen:

$$\begin{aligned} \vec{y}_1(x) &= \vec{c}_1 e^{\lambda x} && \text{mit } (A - \lambda E)\vec{c}_1 = \vec{0}, \vec{c}_1 \neq \vec{0} \\ \vec{y}_2(x) &= (\vec{c}_1 x + \vec{c}_2) e^{\lambda x} && \text{mit } (A - \lambda E)\vec{c}_2 = \vec{c}_1, \vec{c}_2 \neq \vec{0} \\ \vec{y}_3(x) &= \left(\vec{c}_1 \frac{x^2}{2!} + \vec{c}_2 x + \vec{c}_3\right) e^{\lambda x} && \text{mit } (A - \lambda E)\vec{c}_3 = \vec{c}_2, \vec{c}_3 \neq \vec{0} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

(jeweils so viele Funktionen, daß man insgesamt zum  $l$ -fachen EW  $\lambda$   $l$  linear unabhängige Lösungen erhält).

$\vec{c}_1 \neq \vec{0}$  ist EV zum EW  $\lambda$  (*Hauptvektor der Ordnung 1*),

$\vec{c}_2 \neq \vec{0}$  ist *Hauptvektor der Ordnung 2* zum EW  $\lambda$ ,

$\vec{c}_3 \neq \vec{0}$  ist *Hauptvektor der Ordnung 3* zum EW  $\lambda$ ,

usw.

Denn:

z.B.:  $\vec{y}_3(x) = \left(\vec{c}_1 \frac{x^2}{2!} + \vec{c}_2 x + \vec{c}_3\right) e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow \vec{y}_3'(x) = (\vec{c}_1 x + \vec{c}_2 + \lambda \vec{c}_1 \frac{x^2}{2!} + \lambda \vec{c}_2 x + \lambda \vec{c}_3) e^{\lambda x}.$$

Einsetzen ergibt:

$$A\vec{y}_3(x) = \left(A\vec{c}_1 \frac{x^2}{2!} + A\vec{c}_2 x + A\vec{c}_3\right) e^{\lambda x}$$

$$= (\lambda \vec{c}_1 \frac{x^2}{2!} + (\lambda \vec{c}_2 + \vec{c}_1)x + (\lambda \vec{c}_3 + \vec{c}_2)) e^{\lambda x} = \vec{y}_3'(x) \Rightarrow \vec{y}_3 \text{ ist Lösung von } \vec{y}' = A\vec{y}.$$

### Beispiele

1.

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{y} \quad (\text{vgl. S.528}).$$

Berechnung der EW:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$  einfache EW von  $A$ .

Berechnung zugehöriger EV:

zu  $\lambda_1 = -1$ :  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0,$

zu  $\lambda_2 = 2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$

$$\Rightarrow \vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeine Lösung.}$$

2.

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \vec{y}$$

*Berechnung der EW:*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2 - \lambda & 2 \\ 0 & -2(1 - \lambda) & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 & 2 \\ 1 & 6 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)((2 - \lambda)(6 - \lambda) - 5) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = (1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 7) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$  doppelter EW,  $\lambda_2 = 7$  einfacher EW.

*Berechnung zugehöriger EV:*

$$\text{zu } \lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0),$$

$\dim ER_{\lambda_1} = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind zwei linear unabhängige EV zu  $\lambda_1 = 1$ ,

$$\text{zu } \lambda_2 = 7: \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{7x}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeine Lösung.}$

3.

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$$

*Berechnung der EW:*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)((2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 4) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$  doppelter EW,  $\lambda_2 = 4$  einfacher EW.

Berechnung zugehöriger EV:

$$\text{zu } \lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0,$$

$$\dim ER_{\lambda_1} = 1 \Rightarrow \text{nur ein linear unabhängiger EV: z.B. } \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnung eines Hauptvektors der Ordnung 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\text{z.B. } \alpha = 0 \Rightarrow \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Hauptvektor der Ordnung 2.}$$

$$\text{EV zu } \lambda_2 = 4: \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0, \text{ ist EV zu } \lambda_2 = 4$$

$$\Rightarrow \vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^x + c_3 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} e^{4x}, c_i \in \mathbb{R},$$

ist allgemeine Lösung.

4.

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}, \vec{y}(0) = \vec{0}.$$

homogen:

Berechnung der EW:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = 2 \text{ oder } (\lambda - 1)^2 = -1 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1 \pm i \text{ sind einfache EW von } A.$$

Berechnung zugehöriger EV:

$$\text{zu } \lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0,$$

$$\text{zu } \lambda_2 = 1+i: \begin{pmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow c_3 = \alpha, c_2 = i\alpha, (1-i)c_1 = (1-i)\alpha \Rightarrow c_1 = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0, \text{ ist EV zu } \lambda_2 = 1 + i$$

$$\Rightarrow \vec{w}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos x + i \sin x) e^x \quad \text{ist komplexe Lösung}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_2(x) = \operatorname{Re}(\vec{w}(x)) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^x, \quad \vec{y}_3(x) = \operatorname{Im}(\vec{w}(x)) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^x$$

sind reelle Lösungen

$$\Rightarrow \vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^x + c_3 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^x, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

ist allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems.

*partikuläre Lösung:*

*Ansatz:*  $\vec{y}_0(x) = (\vec{a} + \vec{b}x)e^{2x}$  (einfache Resonanz, da  $\lambda = 2$  einfacher EW).

*Einsetzen und Division durch  $e^{2x}$  ergibt:*

$$(\vec{b} + 2\vec{a} + 2\vec{b}x) = A(\vec{a} + \vec{b}x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Koeffizientenvergleich:*

$$(A - 2E)\vec{b} = \vec{0} \quad \text{und} \quad (A - 2E)\vec{a} = \vec{b} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das 1. GLS besagt, daß  $\vec{b}$  ein EV (oder der Nullvektor) zum EW  $\lambda = 2$  ist, also:

$$\vec{b} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Das 2. GLS lautet dann:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{array} \right)$$

Dieses GLS ist nur lösbar für  $\alpha = 0$ . Dann lautet das GLS

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \beta \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

$$\text{z.B.: } \beta = 0 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{2x} \quad \text{ist partikuläre Lösung}$$

$$\Rightarrow \vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^x + c_3 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

ist allgemeine Lösung.

$$\vec{y}(0) = \vec{0} \Rightarrow c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2}.$$

Ist die rechte Seite des linearen DGL-Systems 1. Ordnung von der Form

$$\vec{b}(x) = \vec{a} \cos \beta x e^{\alpha x}$$

so machen wir für die partikuläre Lösung zunächst einen komplexen Ansatz:

$$\vec{w}_0(x) = \vec{c} e^{(\alpha+i\beta)x} \quad (\text{falls keine Resonanz}).$$

Diesen Ansatz setzen wir in das DGL-System mit der rechten Seite  $\vec{a} e^{(\alpha+i\beta)x}$  ein.

Dann erhalten wir (nach Division durch  $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ) das GLS:

$$(\alpha + i\beta)\vec{c} = A\vec{c} + \vec{a} \Rightarrow (A - (\alpha + i\beta)E)\vec{c} = -\vec{a} \Rightarrow \text{Lösung des GLS ergibt } \vec{c}.$$

Da  $\vec{b}(x) = \operatorname{Re}(\vec{a} e^{(\alpha+i\beta)x})$  ist  $\Rightarrow \vec{y}_0(x) = \operatorname{Re}(\vec{c} e^{(\alpha+i\beta)x})$  ist partikuläre Lösung.

Falls auf der rechten Seite die  $\sin$ -Funktion steht, muß man entsprechend den Imaginärteil benutzen.

## DGL-Systeme höherer Ordnung

Ein DGL-System höherer Ordnung kann auf ein DGL-System 1. Ordnung zurückgeführt werden:

**Beispiel:** DGL-System 2. Ordnung

$$\begin{cases} u'' = -u + 3v - 2u' + 3v' \\ v'' = u + v + u' \end{cases}$$

Wir führen die folgenden neuen Funktionen ein:

$y_1 = u$ ,  $y_2 = v$ ,  $y_3 = u'$ ,  $y_4 = v'$  und erhalten das DGL-System 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 3y_4 \\ y_4' = y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Dieses System läßt sich wieder mit Hilfe von EW und EV berechnen. Einfacher ist jedoch in diesem Fall ein direkter Ansatz:

Ansatz:  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda x}$ , also  $u(x) = ae^{\lambda x}$ ,  $v(x) = be^{\lambda x}$ .

Einsetzen und Division durch  $e^{\lambda x}$  ergibt:

$$a\lambda^2 = -a + 3b - 2a\lambda + 3b\lambda,$$

$$b\lambda^2 = a + b + a\lambda.$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} (\lambda^2 + 2\lambda + 1) & (-3\lambda - 3) \\ (-1 - \lambda) & (\lambda^2 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses GLS ist nur dann nichttrivial lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix = 0 ist, also:

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) - 3(\lambda + 1)^2 = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad (\text{doppelte Nullstelle}), \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2 \quad (\text{einfache Nullstellen}).$$

Lösung des GLS für  $\lambda$ :

zu  $\lambda_1 = -1$ :  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind zwei linear unabhängige Lösungen,

zu  $\lambda_2 = 2$ :  $\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist eine Lösung,

zu  $\lambda_3 = -2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  ist eine Lösung

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

ist allgemeine Lösung.

Koordinatenweise:

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_3 e^{2x} + 3c_4 e^{-2x},$$

$$v(x) = c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} - c_4 e^{-2x}.$$

## Numerische Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben (AWA)

Gegeben: AWA 1. Ordnung

$$\boxed{y' = f(x, y), \quad y(\xi) = \eta}$$

Gesucht: Näherungslösung, d.h.: Näherung für  $y(x_n)$  an den Stellen  $x_n = \xi + nh$  mit der Schrittweite  $h$  und  $n = 1, 2, 3, \dots$

Näherungsverfahren

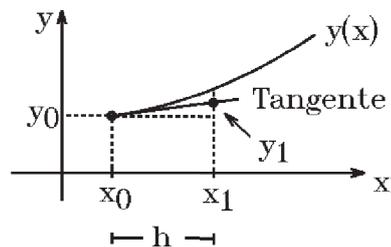
### 1. Euler-Cauchy-Verfahren

Mit  $x_0 = \xi$ ,  $y_0 = \eta$  und der Schrittweite  $h$  berechne für  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \end{aligned}}$$

$y_n$  ist dann eine Näherung für  $y(x_n)$ , wenn  $y$  die exakte Lösung ist.

Die Tangente an die Lösungskurve  $y$  im Punkt  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  hat die Steigung:  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ .



Man geht also jeweils mit der Steigung  $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$  um die Schrittweite  $h$  nach rechts weiter.

### Beispiel

$$y' = y + x, \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \xi = 0, \quad y_0 = \eta = 1.$$

Wir wählen die Schrittweite  $h = 0.1$ :

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n + x_n) = (1 + h)y_n + hx_n \\ \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n + 0.1, \quad y_{n+1} = 1.1y_n + 0.1x_n.$$

Mit  $x_0 = 0, y_0 = 1$  erhalten wir dann:

$$x_1 = 0.1, \quad y_1 = 1.1$$

$$x_2 = 0.2, \quad y_2 = 1.22$$

usw.

zum Vergleich: Die exakte Lösung lautet:  $y(x) = 2e^x - x - 1$ ,

$$y_1 = 1.1 \approx y(x_1) = y(0.1) = 1.1103418,$$

$$y_2 = 1.22 \approx y(x_2) = y(0.2) = 1.2428055.$$

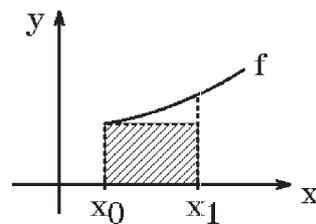
Auch wenn die Schrittweite kleiner gewählt wird, können große Fehler auftreten. Deshalb ist dieses Verfahren für die Praxis nicht sehr geeignet.

*Spezialfall:* Ist  $f$  unabhängig von  $y$ , also

$$y' = f(x), \quad y(\xi) = \eta \quad \Rightarrow \quad y(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t) dt, \text{ also Integration.}$$

Dann entspricht das Euler-Cauchy-Verfahren der *Rechteckregel*:

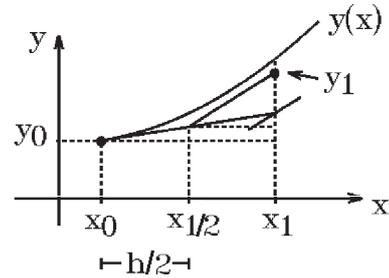
$$\int_{x_0}^{x_1} f(t) dt \approx y_1 - y_0 = hf(x_0).$$



## 2. Verbessertes Euler-Cauchy-Verfahren

Mit  $x_0 = \xi$ ,  $y_0 = \eta$  und der Schrittweite  $h$  berechne für  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$



Man geht jeweils eine halbe Schrittweite mit der Steigung  $f(x_n, y_n)$  und dann wieder eine halbe Schrittweite mit der Steigung  $f(x_n + h, y_n + k_1)$  nach rechts.

### Beispiel

$$y' = y + x, \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \xi = 0, \quad y_0 = \eta = 1.$$

Wir wählen wieder die Schrittweite  $h = 0.1$ :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h, \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) = 0.1(x_n + y_n), \quad k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) = 0.1(x_n + 0.1 + y_n + k_1), \\ y_{n+1} &= y_n + 0.5(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Mit  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1, \quad k_1 = 0.1(0 + 1) = 0.1, \quad k_2 = 0.1(0.1 + 1 + 0.1) = 0.12 \\ \Rightarrow y_1 &= 1 + 0.5(0.1 + 0.12) = 1.11, \\ x_2 &= 0.2, \quad k_1 = 0.1(0.1 + 1.11) = 0.121, \quad k_2 = 0.1(0.2 + 1.231) = 0.1431 \\ \Rightarrow y_2 &= 1.11 + 0.5(0.121 + 0.1431) = 1.24205, \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

zum Vergleich: (mit der exakten Lösung  $y(x) = 2e^x - x - 1$ )

$$\begin{aligned} y_1 &= 1.11 \approx y(x_1) = y(0.1) = 1.1103418, \\ y_2 &= 1.24205 \approx y(x_2) = y(0.2) = 1.2428055. \end{aligned}$$

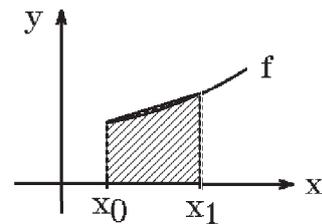
Die Ergebnisse sind besser als beim einfachen Euler-Cauchy-Verfahren.

*Spezialfall:* Ist  $f$  unabhängig von  $y$ , also

$$y' = f(x), \quad y(\xi) = \eta \quad \Rightarrow \quad y(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t) dt, \quad \text{also Integration.}$$

Dann entspricht das verbesserte Euler-Cauchy-Verfahren der Trapezregel:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t) dt \approx y_1 - y_0 = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)).$$



### 3. Runge-Kutta-Verfahren

Mit  $x_0 = \xi$ ,  $y_0 = \eta$  und der Schrittweite  $h$  berechne für  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + h \\
 k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
 k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned}$$

Beim Runge-Kutta-Verfahren berechnet man die Werte am besten in Tabellenform (oder man benutzt ein Computer-Programm) :

$x$	$y$	$hf(x, y)$
$x_n$	$y_n$	$k_1$
$x_n + \frac{h}{2}$	$y_n + \frac{k_1}{2}$	$k_2$
$x_n + \frac{h}{2}$	$y_n + \frac{k_2}{2}$	$k_3$
$x_n + h$	$y_n + k_3$	$k_4$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) .$$

#### Beispiel

$$y' = y + x \quad , \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \xi = 0 \quad , \quad y_0 = \eta = 1 .$$

Wir wählen wieder die Schrittweite  $h = 0.1$  :

1. Schritt:

$x$	$y$	$h(x + y)$
0	1	0.1
0.05	1.05	0.11
0.05	1.055	0.1105
0.1	1.1105	0.12105

$$y_1 = 1.1103417 \quad (\text{zum Vergleich: } y(0.1) = 1.1103418)$$

2. Schritt:

$x$	$y$	$h(x + y)$
0.1	1.1103417	0.1210342
0.15	1.1708588	0.1320859
0.15	1.1763846	0.1326385
0.2	1.2429802	0.144298

$y_2 = 1.2428052$  (zum Vergleich:  $y(0.2) = 1.2428055$ )  
 Der Fehler beträgt  $\approx 4 \cdot 10^{-7}$ .

In den beiden folgenden Tabellen sind für zwei unterschiedliche Schrittweiten jeweils an der Stelle  $x$  der Fehler zwischen Näherungs- und exakter Lösung angegeben:

$h = 0.1$

$x$	Fehler
0.1	$4 \cdot 10^{-7}$
1	$4 \cdot 10^{-6}$
2	$2 \cdot 10^{-5}$
4	$3 \cdot 10^{-4}$
10	$3 \cdot 10^{-1}$
15	75

$h = 0.01$

$x$	Fehler
0.1	$2 \cdot 10^{-11}$
1	$5 \cdot 10^{-10}$
2	$4 \cdot 10^{-10}$
4	$6 \cdot 10^{-8}$
10	$3 \cdot 10^{-5}$
15	$4 \cdot 10^{-2}$
22	93

Aus diesen Tabellen kann man folgende Erkenntnisse ziehen:

- Der Fehler wird größer, je weiter man von der Anfangsstelle  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  entfernt ist.
- Die Schrittweite darf nicht zu groß gewählt werden, weil dann der Fehler zu groß wird.
- Die Schrittweite darf auch nicht zu klein gewählt werden, weil dann der Rechenaufwand extrem ansteigt und damit die *Rundungsfehler* stark zunehmen.

*Wahl der Schrittweite:*

Um eine "günstige" Schrittweite zu erhalten, führt man eine *Schrittweitenkontrolle* durch:

- Man führt einen Schritt mit der Schrittweite  $h$  aus,
- man berechnet parallel dazu zwei Schritte mit der Schrittweite  $\frac{h}{2}$ ,
- man vergleicht die beiden Ergebnisse:
  - sind beide Ergebnisse  $\approx$  gleich  $\Rightarrow h$  ist "günstig"
  - sonst wird  $h$  halbiert und mit dem neuen  $h$  wieder bei a) begonnen.

$h$  darf hierbei nicht zu klein werden, deshalb muß eine untere Grenze  $h_{min}$  festgelegt werden.

Es gibt noch *andere Verfahren*, die oft bessere Ergebnisse liefern als das *Runge-Kutta-Verfahren*:

- Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung*,
- Mehrschrittverfahren*, z.B.: Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Adams/Bashforth bzw. Adams/Moulton (vgl. Literatur).

*Spezialfall:* Ist  $f$  unabhängig von  $y$ , also

$$y' = f(x), \quad y(\xi) = \eta \quad \Rightarrow \quad y(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t) dt, \quad \text{also Integration. Dann gilt:}$$

In diesem Fall entspricht das Runge-Kutta-Verfahren der *Simpsonregel*:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t) dt \approx y_1 - y_0 = \frac{h}{6}(f(x_0) + 4f(x_0 + h/2) + f(x_1)) .$$

### DGL-Systeme 1. Ordnung

Gegeben: Anfangswertaufgabe (AWA)

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad , \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

Runge-Kutta-Verfahren (analog zu DGL 1. Ordnung) :

Mit  $x_0 = \xi$  ,  $\vec{y}_0 = \vec{\eta}$  und der Schrittweite  $h$  berechne für  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ \vec{k}_1 &= h\vec{f}(x_n, \vec{y}_n) \\ \vec{k}_2 &= h\vec{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_1}{2}\right) \\ \vec{k}_3 &= h\vec{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_2}{2}\right) \\ \vec{k}_4 &= h\vec{f}(x_n + h, \vec{y}_n + \vec{k}_3) \\ \vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \end{aligned}$$

Hierbei sind  $\vec{k}_i$  Vektoren.

Beispiel  $n = 2$  Gleichungen:

$$\begin{cases} u' = f(x, u, v) \\ v' = g(x, u, v) \end{cases}$$

mit  $u(x_0) = u_0$  ,  $v(x_0) = v_0$  .

Also mit  $\vec{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  ,  $\vec{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$  ,  $\xi = x_0$  ,  $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k_i \\ l_i \end{pmatrix}$  erhält man

$k_1 = hf(x_n, u_n, v_n)$ $l_1 = hg(x_n, u_n, v_n)$
$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_1}{2}, v_n + \frac{l_1}{2}\right)$ $l_2 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_1}{2}, v_n + \frac{l_1}{2}\right)$
$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_2}{2}, v_n + \frac{l_2}{2}\right)$ $l_3 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_2}{2}, v_n + \frac{l_2}{2}\right)$
$k_4 = hf(x_n + h, u_n + k_3, v_n + l_3)$ $l_4 = hg(x_n + h, u_n + k_3, v_n + l_3)$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) ,$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) .$$

In Tabellenform erhalten wir:

$x$	$u$	$v$	$hf(x, u, v)$	$hg(x, u, v)$
$x_n$	$u_n$	$v_n$	$k_1$	$l_1$
$x_n + \frac{h}{2}$	$u_n + \frac{k_1}{2}$	$v_n + \frac{l_1}{2}$	$k_2$	$l_2$
$x_n + \frac{h}{2}$	$u_n + \frac{k_2}{2}$	$v_n + \frac{l_2}{2}$	$k_3$	$l_3$
$x_n + h$	$u_n + k_3$	$v_n + l_3$	$k_4$	$l_4$

### DGL n-ter Ordnung

Da man DGL  $n$ -ter Ordnung auf DGL-Systeme 1. Ordnung zurückführen kann, ist das Runge-Kutta-Verfahren auch auf DGL  $n$ -ter Ordnung anwendbar.

### Beispiel

$$y'' = g(x, y, y') \quad , \quad y(\xi) = \eta_1 \quad , \quad y'(\xi) = \eta_2 \quad ,$$

mit  $u = y$  und  $v = y'$  erhält man hieraus das DGL-System :

$$\begin{bmatrix} u' = v = f(x, u, v) \\ v' = g(x, u, v) \end{bmatrix}$$

$$u(\xi) = \eta_1 \quad , \quad v(\xi) = \eta_2 \quad .$$

### Beispiel hierzu

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = -2 \quad ,$$

mit  $u = y$  ,  $v = y'$   $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} u' = v = f(x, u, v) \\ v' = -2u + 3v = g(x, u, v) \end{bmatrix}$$

$$u(0) = 0 \quad , \quad v(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad , \quad u_0 = u(x_0) = u(0) = 0 \quad , \quad v_0 = v(x_0) = v(0) = -2 .$$

Wir wählen die Schrittweite  $h = 0.1$ , dann erhalten wir in Tabellenform

$x$	$u$	$v$	$0.1v$	$0.1(-2u + 3v)$
0	0	-2	-0.2 = $k_1$	-0.6 = $l_1$
0.05	-0.1	-2.3	-0.23 = $k_2$	-0.67 = $l_2$
0.05	-0.115	-2.335	-0.2335 = $k_3$	-0.6775 = $l_3$
0.1	-0.2335	-2.6775	-0.26775 = $k_4$	-0.75655 = $l_4$

$$u_1 = u_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -0.2324583 \approx y(0.1) \quad ,$$

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) = -2.675258 \approx y'(0.1) \quad .$$

Zum Vergleich: Exakte Lösung:  $y(x) = 2(e^x - e^{2x})$

$$y(0.1) = -0.2324637\dots, \quad y'(0.1) = -2.6752692\dots$$

Auch hier wächst der Fehler an, je weiter man von der Anfangsstelle entfernt ist.

$h = 0.1$

$x$	Fehler
0.1	$5 \cdot 10^{-6}$
1	$3 \cdot 10^{-4}$
2	$5 \cdot 10^{-3}$
4	0.53
10	219235

$h = 0.01$

$x$	Fehler
0.1	$8 \cdot 10^{-10}$
1	$2 \cdot 10^{-7}$
2	$6 \cdot 10^{-6}$
4	$8 \cdot 10^{-4}$
10	321

Es ist  $y(10) = -9.7 \cdot 10^8$ , also ist die Lösungsfunktion  $y$  betraglich sehr stark ansteigend.

Man sollte auch für DGL-Systeme (bzw. DGL  $n$ -ter Ordnung) eine *Schrittweitenkontrolle* durchführen.

## XV Partielle Differentialgleichungen

### I) Quasilineare partielle DGL 1. Ordnung

Gegeben:

$$a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = b(x, y, u)$$

mit  $a_i, b : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $G$ .

*Gesucht:* Eine Funktion  $u(x, y)$  mit stetigen partiellen Ableitungen, die in einem Bereich  $D \subset \mathbb{R}^2$  dieser Gleichung genügt.

Wir werden zunächst zeigen, daß es zu dieser partiellen DGL ein äquivalentes DGL-System 1. Ordnung gibt, das sogenannte *charakteristische System*:

$$\begin{aligned}x'(t) &= a_1(x(t), y(t), u(t)) \\y'(t) &= a_2(x(t), y(t), u(t)) \\u'(t) &= b(x(t), y(t), u(t))\end{aligned}$$

*Beweis :*

Sei  $u$  Lösung der partiellen DGL in  $D$ , also  $a_1u_x + a_2u_y = b$ .

Sei  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  eine Lösung der ersten beiden Gleichungen des DGL-Systems, also

$$\left[ \begin{aligned}x'(t) &= a_1(x, y, u) \\y'(t) &= a_2(x, y, u)\end{aligned} \right], \text{ so gilt für } u(x(t), y(t)):$$

$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = u'(t) = u_x \cdot x'(t) + u_y \cdot y'(t) = u_x \cdot a_1 + u_y \cdot a_2 = b$  (da  $u$  Lösung der partiellen DGL ist).

Also gilt:  $u'(t) = b(x, y, u) \Rightarrow$  auch die dritte Gleichung des DGL-Systems ist erfüllt,

also ist  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$  Lösung des DGL-Systems.

Sei umgekehrt  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$  die allgemeine Lösung des DGL-Systems, so hängt diese all-

gemeine Lösung von 3 Integrationskonstanten  $c_1, c_2, c_3$  ab. Gelingt es, den *Parameter*  $t$  zu *eliminieren* und nach den Integrationskonstanten  $c_i$  *aufzulösen*, so erhalten wir Gleichungen der Form  $c_i = \varphi_i(x, y, u)$ .

$\varphi_i$  heißt dann "*Integral*" des *charakteristischen DGL-Systems*.

$\varphi_i(x, y, u) = 0$  ist dann *implizite Lösung der partiellen DGL* (falls  $\varphi_i$  von  $u$  abhängig ist).

Denn:

Sei  $\varphi(x, y, u)$  ein "Integral" des charakteristischen DGL-Systems.

Da  $\varphi(x, y, u(x, y)) = 0$  in einem Gebiet  $M \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, u(x, y)) = \varphi_x + \varphi_u \cdot u_x = 0 \text{ in } M,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, u(x, y)) = \varphi_y + \varphi_u \cdot u_y = 0 \text{ in } M$$

$$\Rightarrow \varphi_x = -\varphi_u u_x, \varphi_y = -\varphi_u u_y.$$

Da  $\varphi(x, y, u(x, y))$  ein "Integral" des charakteristischen DGL-Systems ist, gilt

$$\frac{d}{dt} \varphi(x(t), y(t), u(t)) = \varphi_x \cdot x'(t) + \varphi_y \cdot y'(t) + \varphi_u \cdot u'(t) = a_1 \cdot \varphi_x + a_2 \cdot \varphi_y + b \cdot \varphi_u = 0$$

$$\Rightarrow -a_1 \varphi_u u_x - a_2 \varphi_u u_y + b \varphi_u = 0 \text{ in } M \text{ (da } \varphi_x = -\varphi_u u_x, \varphi_y = -\varphi_u u_y)$$

$$\Rightarrow a_1 u_x + a_2 u_y = b, \text{ falls } \varphi_u \neq 0 \text{ (dies muß aber gelten, damit } \varphi \text{ nach } u \text{ aufgelöst werden kann).}$$

Also liefert dieses "Integral" des charakteristischen DGL-Systems eine Lösung der partiellen DGL.

Je 3 "Integrale" des charakteristischen DGL-Systems sind abhängig, d.h.:

$$\det \left( \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(x, y, u)} \right) = 0 \text{ in einem Gebiet des } \mathbb{R}^3, \text{ denn es gilt:}$$

$$a_1 \varphi_{1x} + a_2 \varphi_{1y} + b \varphi_{1u} = 0$$

$$a_1 \varphi_{2x} + a_2 \varphi_{2y} + b \varphi_{2u} = 0$$

$$a_1 \varphi_{3x} + a_2 \varphi_{3y} + b \varphi_{3u} = 0.$$

Wäre  $\det \left( \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(x, y, u)} \right) \neq 0$ , so müßten  $a_1, a_2, b$  gleichzeitig  $\equiv 0$  sein.

Mit Hilfe dieser Abhängigkeit kann man zeigen (vgl. Literatur), daß jedes "Integral" des charakteristischen DGL-Systems durch zwei unabhängige "Integrale" ausgedrückt werden kann, d.h.: es existiert eine Funktion  $\Omega$  mit  $\varphi_3 = \Omega(\varphi_1, \varphi_2)$ , falls  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei unabhängige "Integrale" sind.

Hierbei heißen  $\varphi_1, \varphi_2$  in einem Gebiet  $\tilde{G}$  unabhängig, wenn  $\text{rang} \left( \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y, u)} \right) = 2$  in jedem Teilgebiet von  $\tilde{G}$  ist. Also ist

$\Omega(\varphi_1, \varphi_2) = 0$
------------------------------------

die *allgemeine implizite Lösung der quasilinearen partiellen DGL 1. Ordnung*, falls  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei unabhängige "Integrale" des zugehörigen charakteristischen DGL-Systems sind.  $\Omega$  ist dabei eine beliebige stetig differenzierbare Funktion von 2 Variablen.

### Beispiele

1.  $x^2 u_x + y^2 u_y = u^2$ .

Charakteristisches DGL-System

$$x' = x^2$$

$$y' = y^2$$

$$u' = u^2.$$

Lösung der 1. Gleichung (Trennung der Variablen):

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c_1,$$

(analog die beiden anderen Gleichungen)  $\Rightarrow$

$-\frac{1}{x} = t + c_1, -\frac{1}{y} = t + c_2, -\frac{1}{u} = t + c_3$  ist allgemeine Lösung des charakteristischen DGL-Systems.

$$1. \text{ Gleichung} - 2. \text{ Gleichung} \Rightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = c, \text{ (falls } x, y \neq 0 \text{),}$$

$$1. \text{ Gleichung} - 3. \text{ Gleichung} \Rightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{x} = c, \text{ (falls } x, u \neq 0 \text{)}$$

$\Rightarrow \varphi_1(x, y, u) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \varphi_2(x, y, u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{x}$  sind zwei "Integrale" des charakteristischen DGL-Systems.

$$\left( \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y, u)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ \frac{1}{x^2} & 0 & -\frac{1}{u^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} = 2$$

$\Rightarrow \Omega\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{1}{u} - \frac{1}{x}\right) = 0$  ist allgemeine (implizite) Lösung der partiellen DGL (neben  $u \equiv 0$ ).

$$\text{Z.B.: } \Omega(s_1, s_2) = s_1 + s_2 \Rightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{u} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{2}{x} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{xy}{2y - x} \text{ ist eine Lösung, falls } 2y \neq x.$$

$$\text{Oder z.B.: } \Omega(s_1, s_2) = s_2 - \sin s_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{x} = \sin\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \sin\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)} \text{ ist eine Lösung, falls der Nenner } \neq 0.$$

### Bemerkung :

Es ist oft schwierig, in der allgemeinen Lösung des charakteristischen DGL-Systems den Parameter  $t$  zu eliminieren. Deshalb ist es häufig besser, die partielle DGL durch  $a_1$  oder  $a_2$  zu dividieren und erst dann das charakteristische DGL-System aufzustellen. Dann ist eine der charakteristischen Gleichungen von der Form  $x' = 1$  (oder  $y' = 1$ ), und man kann  $x$  (oder  $y$ ) als Parameter wählen:

**Beispiel hierzu** (vgl. Beispiel 1.)

$$x^2 u_x + y^2 u_y = u^2.$$

Division durch  $x^2$ , ( $x \neq 0$ ), ergibt:

$$u_x + \left(\frac{y}{x}\right)^2 u_y = \left(\frac{u}{x}\right)^2.$$

Charakteristisches DGL-System:

$$x' = 1 \Rightarrow x = t \text{ (Parameter),}$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c_1,$$

$$\begin{aligned}
u' &= \left(\frac{u}{x}\right)^2 \Rightarrow \int \frac{1}{u^2} du = \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x} + c_2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c_1, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{u} = c_2 \\
&\Rightarrow \varphi_1(x, y, u) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad \varphi_2(x, y, u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{x} \text{ sind zwei (unabhängige) "Integrale"} \\
&\text{des charakteristischen DGL-Systems.}
\end{aligned}$$

### Weitere Beispiele

$$\begin{aligned}
2. \quad yu_x - xu_y &= y^2 - x^2 \\
&\Rightarrow u_x - \frac{x}{y}u_y = y - \frac{x^2}{y}, \quad (y \neq 0).
\end{aligned}$$

Charakteristisches DGL-System:

$$\begin{aligned}
x' &= 1 \Rightarrow x = t \text{ (Parameter),} \\
y' &= -\frac{x}{y} \Rightarrow \int y dy = -\int x dx \Rightarrow y^2 = -x^2 + c_1 \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1,
\end{aligned}$$

$$u' = y - \frac{x^2}{y} \Rightarrow \text{mit } y = \sqrt{c_1 - x^2} \quad (y = -\sqrt{c_1 - x^2} \text{ analog})$$

$$u' = \sqrt{c_1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{c_1 - x^2}} \Rightarrow u = x\sqrt{c_1 - x^2} + c_2 = xy + c_2 \Rightarrow u - xy = c_2$$

$\Rightarrow \varphi_1(x, y, u) = x^2 + y^2, \varphi_2(x, y, u) = u - xy$  sind zwei "Integrale" des charakteristischen DGL-Systems mit

$$\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y, u)}\right) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ -y & -x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} = 2, \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0)$$

$\Rightarrow \Omega(x^2 + y^2, u - xy) = 0$  ist allgemeine (implizite) Lösung der partiellen DGL.

$$\begin{aligned}
3. \quad (1+x)u_x - (1+y)u_y &= 0 \\
&\Rightarrow -\frac{1+x}{1+y}u_x + u_y = 0, \quad (y \neq -1).
\end{aligned}$$

Charakteristisches DGL-System:

$$x' = -\frac{1+x}{1+y} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x} dx = -\int \frac{1}{1+y} dy \Rightarrow (1+x)(1+y) = c_1,$$

$$y' = 1 \Rightarrow y = t \text{ (Parameter),}$$

$$u' = 0 \Rightarrow u = c_2$$

$\Rightarrow \varphi_1(x, y, u) = (1+x)(1+y), \varphi_2(x, y, u) = u$  sind zwei "Integrale" des charakteristischen DGL-Systems mit

$$\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y, u)}\right) = \begin{pmatrix} 1+y & 1+x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} = 2, \text{ falls } (x, y) \neq (-1, -1)$$

$\Rightarrow \Omega((1+x)(1+y), u) = 0$  ist allgemeine (implizite) Lösung der partiellen DGL

$\Rightarrow u(x, y) = \omega((1+x)(1+y))$  ist allgemeine Lösung der DGL ( $\omega$  ist eine beliebige stetig differenzierbare Funktion von einer Variablen).

$$4. \quad xyu_x + u_y = xy \cos x \\ \Rightarrow u_x + \frac{1}{xy}u_y = \cos x, \quad (xy \neq 0).$$

Charakteristisches DGL-System:

$$x' = 1 \Rightarrow x = t \quad (\text{Parameter}),$$

$$y' = \frac{1}{xy} \Rightarrow \int y \, dy = \int \frac{1}{x} \, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln|x| + \tilde{c}_1 \Rightarrow y^2 = \ln x^2 + c_1,$$

$$u' = \cos x \Rightarrow u = \sin x + c_2$$

$\Rightarrow \varphi_1(x, y, u) = y^2 - \ln x^2, \varphi_2(x, y, u) = u - \sin x$  sind zwei "Integrale" des charakteristischen DGL-Systems mit

$$\left( \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y, u)} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x} & 2y & 0 \\ -\cos x & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} = 2$$

$\Rightarrow \Omega(y^2 - \ln x^2, u - \sin x) = 0$  ist allgemeine (implizite) Lösung der partiellen DGL.

Ist zusätzlich eine *Anfangsbedingung* gegeben:

z.B.:  $u(x, 0) = x^2 + \sin x$ , so muß für  $y = 0$  gelten:

$$\Omega(-\ln x^2, x^2 + \sin x - \sin x) = \Omega(-\ln x^2, x^2) = 0.$$

Also muß für  $\Omega(s_1, s_2)$  gelten:

$$s_1 = -\ln x^2, \quad s_2 = x^2 \Rightarrow s_1 = -\ln s_2 \Rightarrow s_2 = e^{-s_1}.$$

Daraus folgt:

$$u - \sin x = e^{-(y^2 - \ln x^2)} = x^2 e^{-y^2}$$

$\Rightarrow u(x, y) = \sin x + x^2 e^{-y^2}$  ist Lösung der partiellen DGL und erfüllt die gegebene Anfangsbedingung.

### Anwendungsbeispiel

Die Bestimmung eines *integrierenden Faktors*  $\mu(x, y)$  bei einer nicht-exakten DGL:

$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$  führt auf eine quasilineare partielle DGL 1. Ordnung, denn es muß gelten:

$$(\mu f)_y = (\mu g)_x \quad (\text{vgl. S.491}),$$

$$\text{also } \mu_y f + \mu f_y = \mu_x g + \mu g_x \Rightarrow \underline{g\mu_x - f\mu_y = (f_y - g_x)\mu}.$$

### Beispiel hierzu

$$(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0.$$

Mit  $f(x, y) = 1 - xy$  und  $g(x, y) = xy - x^2$  folgt hieraus die partielle DGL für  $\mu$

$$(xy - x^2)\mu_x + (xy - 1)\mu_y = (-x - y + 2x)\mu = (x - y)\mu.$$

Division durch  $(xy - x^2)$  ergibt das charakteristische DGL-System:

$$x' = 1 \Rightarrow x = t \quad (\text{Parameter}),$$

$$y' = \frac{xy - 1}{xy - x^2},$$

$$\mu' = \frac{x - y}{xy - x^2}\mu = -\frac{1}{x}\mu \Rightarrow \int \frac{1}{\mu} \, d\mu = -\int \frac{1}{x} \, dx \Rightarrow \mu = \frac{c}{x}$$

$\Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x}$  ist integrierender Faktor.

**Bemerkung :**

Die allgemeine quasilineare DGL sieht folgendermaßen aus:

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)u_{x_1} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)u_{x_n} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

Entsprechend erhält man als charakteristisches DGL-System:

$$x'_1 = a_1, \quad x'_2 = a_2, \quad \dots, \quad x'_n = a_n, \quad u' = b.$$

$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0$  ist allgemeine implizite Lösung der partiellen DGL, falls  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$   $n$  unabhängige "Integrale" des charakteristischen DGL-Systems sind.

**II) Lineare partielle DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

Gegeben:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

(mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) ist eine allgemeine lineare partielle DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ( $f$  muß linear in  $u, u_x, u_y$  sein).

Gesucht: Eine Funktion  $u(x, y)$ , die diese Gleichung in einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  erfüllt.

*Transformation auf Normalform*

Wir gehen ähnlich vor wie bei der Hauptachsentransformation bei Kegelschnitten (vgl. S.81 ff).

Zur Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  (reell symmetrisch) existiert eine orthogonale Matrix  $C$  und eine Diagonalmatrix  $D$  mit  $C^T A C = D$ ,  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_i$  EW von  $A$ . Die Spalten von  $C$  bestehen aus normierten EV zu den EW  $\lambda_i$ .

Führen wir die *neuen Variablen*  $\xi, \eta$  ein mit

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

so erhalten wir für  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \lambda_1 v_{\xi\xi} + \lambda_2 v_{\eta\eta}$$

*Beweis :*

Mit  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{Für } \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{aligned} \xi &= c_{11}x + c_{21}y \\ \eta &= c_{12}x + c_{22}y \end{aligned} \\ \Rightarrow \xi_x &= c_{11}, \xi_y = c_{21}, \eta_x = c_{12}, \eta_y = c_{22}. \end{aligned}$$

Für  $u(x, y) = v(\xi, \eta)$  gilt dann:

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \cdot \xi_x + v_\eta \cdot \eta_x = c_{11}v_\xi + c_{12}v_\eta \quad \text{und} \\ u_y &= v_\xi \cdot \xi_y + v_\eta \cdot \eta_y = c_{21}v_\xi + c_{22}v_\eta \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} &= C \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Mit } D_x = \frac{\partial}{\partial x}, D_y = \frac{\partial}{\partial y}, D_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}, D_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} D_\xi \\ D_\eta \end{pmatrix} \Rightarrow (D_x, D_y) = (D_\xi, D_\eta)C^T.$$

Es gilt:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \left[ (D_x, D_y)A \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} \right] (u) \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

(hierbei sei  $D_x D_y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ ,  $D_x D_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , usw.).

Setzen wir  $\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} D_\xi \\ D_\eta \end{pmatrix}$ ,  $(D_x, D_y) = (D_\xi, D_\eta)C^T$  hier ein, so erhalten wir:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \left[ (D_\xi, D_\eta)C^T A C \begin{pmatrix} D_\xi \\ D_\eta \end{pmatrix} \right] (v).$$

$$\text{Da } C^T A C = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \left[ (D_\xi, D_\eta) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\xi \\ D_\eta \end{pmatrix} \right] (v) = \lambda_1 v_{\xi\xi} + \lambda_2 v_{\eta\eta}.$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

**Definition 15.1 :**  $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$  heißt

- a) *elliptisch*  $\Leftrightarrow$  Die *Eigenwerte* von  $A$  haben gleiches Vorzeichen  
 $\Leftrightarrow A$  ist positiv- oder negativ-definit.
- b) *hyperbolisch*  $\Leftrightarrow$  Die *Eigenwerte* von  $A$  haben verschiedenes Vorzeichen  
 $\Leftrightarrow A$  ist indefinit.
- c) *parabolisch*  $\Leftrightarrow$  Ein *Eigenwert* von  $A$  ist  $= 0$ .

Durch nochmalige Substitution erhält man die *Normalform* für

$$w(\alpha, \beta) = v(\xi, \eta) = u(x, y)$$

- a)  $w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} = g(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta)$  (elliptisch)
- b)  $w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} = g(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta)$  (hyperbolisch)
- c)  $w_{\alpha\alpha} = g(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta)$  (parabolisch)

Denn:

Im Fall a) und b) setzten wir  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}\xi$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}\eta$ ,

im Fall c) setzten wir  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}\xi$ , falls  $\lambda_1 \neq 0$  (sonst  $\lambda_1, \lambda_2$  umnummerieren).

Für  $v(\xi, \eta) = w(\alpha, \beta)$  erhält man dann (im Fall a))

$v_{\xi\xi} = \frac{1}{|\lambda_1|}w_{\alpha\alpha}$ ,  $v_{\eta\eta} = \frac{1}{|\lambda_2|}w_{\beta\beta}$ , also  $\lambda_1 v_{\xi\xi} + \lambda_2 v_{\eta\eta} = \pm(w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta})$   
(analog für den Fall b) und c)).

### Beispiel

$$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + 2u_x - 2u_y = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = (3 - \lambda)^2 - 25 = 0$$

$\Rightarrow \lambda - 3 = \pm 5 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 8$  sind die EW von  $A$ .

EV zu  $\lambda_1 = -2$ :  $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ist EV zu  $\lambda_1 = -2$ ,

EV zu  $\lambda_2 = 8$ :  $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist EV zu  $\lambda_2 = 8$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y),$$

$$u_x = v_\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + v_\eta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_y = v_\xi \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + v_\eta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also folgt für  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$  anstelle der obigen DGL:

$$-2v_{\xi\xi} + 8v_{\eta\eta} + \frac{2}{\sqrt{2}}(v_\xi + v_\eta) - \frac{2}{\sqrt{2}}(v_\eta - v_\xi) = 0$$

$$\Rightarrow 2v_{\xi\xi} - 8v_{\eta\eta} - 2\sqrt{2}v_\xi = 0$$

Mit  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{8}}\eta$  folgt für  $w(\alpha, \beta) = v(\xi, \eta) = u(x, y)$

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} = 2w_\alpha \quad (\text{hyperbolische DGL}).$$

Dieses Verfahren wird bei DGL für Funktionen von drei oder mehr Variablen analog angewendet:

### Beispiel

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + 4u_{yz} + 9u_{zz} = 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{EW von } A: \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 10$$

$$\Rightarrow 0v_{\xi\xi} + 4v_{\eta\eta} + 10v_{\varrho\varrho} = 0 \Rightarrow 4v_{\eta\eta} + 10v_{\varrho\varrho} = 0.$$

Nochmalige Substitution führt auf:  $w_{\beta\beta} + w_{\gamma\gamma} = 0$ .

## Behandlung der Normalformen

Bei den linearen partiellen DGL 2. Ordnung gibt es i.a. keine allgemeine Lösungsmethode. Man kann in den meisten Fällen keine allgemeine Lösung angeben. Dies ist aber auch von der Anwendung her nicht notwendig, da immer zusätzlich zur DGL Anfangs- und (oder) Randbedingungen auftreten. Wir werden i.f. immer so viele *Anfangs- und Randbedingungen* stellen, daß die *Anfangs-Randwertaufgabe (ARWA)* *eindeutig lösbar ist*.

Die meisten gebräuchlichen Lösungsmethoden sehen so aus, daß durch spezielle Ansätze die *partielle DGL* in *gewöhnliche DGL* übergeführt wird. Wir werden zunächst die wichtigste "Ansatzmethode", den *Produktansatz (Separationsansatz)*, anhand einiger wichtiger Beispiele behandeln. Da hierbei die *Fourierreihenentwicklung* eine wichtige Rolle spielt, wird diese Methode "*Fouriermethode*" genannt.

## Fouriermethode

**Beispiel 1.:** *Wärmeleitungsgleichung* ( $a > 0$  fest)

*Gegeben:*

$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$	, $0 < x < l$ , $t > 0$
$u(0, t) = \psi_1(t)$ , $u(l, t) = \psi_2(t)$	Randbedingungen
$u(x, 0) = \varphi(x)$	Anfangsbedingung

Diese DGL ist eine *parabolische DGL*.

*Gesucht:* Eine Funktion  $u(x, t)$ , die in  $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} : 0 < x < l, t > 0 \right\}$  2-mal nach  $x$  und 1-mal nach  $t$  stetig partiell differenzierbar ist und die DGL einschließlich der Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

*Anwendung:*

$u(x, t)$  gibt die Temperaturverteilung in einem Stab der Länge  $l$  an, wenn die Temperatur an den Enden des Stabes  $\psi_1(t)$  bzw.  $\psi_2(t)$  und die Anfangstemperatur zur Zeit  $t = 0$  gleich  $\varphi(x)$  ist.



Wir wollen nun zunächst annehmen, daß  $f \equiv 0$  (d.h.: keine Wärmequellen vorhanden), und daß  $\psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 0$  (d.h.: an den Enden ist die Temperatur = 0). Dann haben wir ein *lineares homogenes Problem* mit *linearen homogenen Randbedingungen* vorliegen.

a) *Homogene DGL, homogene Randbedingungen*

$u_t = a^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0$
$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(l, t) = 0$ Randbedingungen
$u(x, 0) = \varphi(x)$ Anfangsbedingung

Wir machen für  $u(x, t)$  den Ansatz (*Produktansatz, Separationsansatz*):

$u(x, t) = f(x)g(t)$
----------------------

$\Rightarrow u_{xx} = f''(x)g(t) \quad , \quad u_t = f(x)g'(t) \quad .$

Einsetzen in die DGL:

$f(x)g'(t) = a^2 f''(x)g(t) \quad .$

Division durch  $u = f(x)g(t)$  , ( $\neq 0$ , da sonst  $u \equiv 0$ , also triviale Lösung), und Division durch  $a^2$ :

$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} \quad .$

Da die linke Seite nur von  $t$  und die rechte Seite nur von  $x$  abhängt, aber beide Seiten für alle  $t > 0$  und  $0 < x < l$  gleich sein sollen, müssen beide Seiten *konstant* sein. Also gilt mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda \quad .$

Daraus erhalten wir zwei gewöhnliche DGL

1) $f''(x) - \lambda f(x) = 0$
2) $g'(t) - \lambda a^2 g(t) = 0$

Nun berücksichtigen wir noch die *homogenen Randbedingungen*

$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(l, t) = 0$ :

$u(0, t) = f(0)g(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 \quad ,$

$u(l, t) = f(l)g(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Rightarrow \quad f(l) = 0 \quad .$

Zusammen mit der 1. DGL erhalten wir dann für  $f(x)$  eine *Eigenwertaufgabe (EWA)*:

$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \quad , \quad (0 < x < l)$
$f(0) = f(l) = 0$

Gesucht sind alle nichttrivialen Lösungen dieser EWA (denn sonst wäre  $u \equiv 0$ ), also gesucht sind die *Eigenwerte (EW)*  $\lambda$  und die zugehörigen *Eigenfunktionen (EF)*  $f_\lambda(x)$ .

*Lösung der EWA:* (vgl. S.522 , dort steht  $(-\lambda)$  anstelle von  $\lambda$ )

Ansatz:  $f(x) = e^{\mu x} \Rightarrow$  charakteristisches Polynom  $\mu^2 = \lambda \quad .$

1. Fall:  $\lambda > 0$ :  $\Rightarrow f(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ ,  
 $f(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow f(x) = 2c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}x)$ ,  
 $f(l) = 2c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$  (da  $\sinh(\sqrt{\lambda}l) \neq 0$  für  $\sqrt{\lambda}l > 0$ )  
 $\Rightarrow f \equiv 0$ .

2. Fall:  $\lambda = 0$ :  $\Rightarrow f(x) = c_1 + c_2 x$ ,  
 $f(0) = c_1 = 0$ ,  $f(l) = c_2 l = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ .

3. Fall:  $\lambda < 0$ :  $\Rightarrow f(x) = c_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda}x$ ,  
 $f(0) = c_1 = 0$ ,  $f(l) = c_2 \sin \sqrt{-\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}l = n\pi$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) (sonst nur trivial lösbar).

Also gilt: Die EW der EWA sind:

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Die zugehörigen EF lauten:

$$f_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{l}x$$

Die 2. DGL geht für  $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  über in

$$2) \quad g'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 g(t) = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL lautet:  $g_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$ .

Zusammen erhalten wir dann

$$u_n(x, t) = b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diese Funktion  $u_n(x, t)$  löst die DGL und erfüllt die Randbedingungen. Die Anfangsbedingung ist aber i.a. für keine Funktion  $u_n$  erfüllt. Da wir aber ein *lineares homogenes Problem* haben, ist mit  $u_n$  auch jede Summe  $\sum_n u_n$  Lösung der partiellen

DGL einschließlich der Randbedingungen, also ist auch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l}x$$

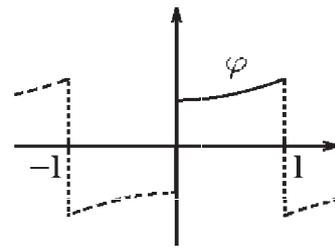
Lösung, falls diese unendliche Reihe konvergent ist und 1-mal nach  $t$  und 2-mal nach  $x$  stetig partiell differenzierbar ist.

Nun muß noch die *Anfangsbedingung*:  $u(x, 0) = \varphi(x)$  erfüllt sein, also:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \varphi(x), \quad (0 < x < l).$$

Auf der linken Seite steht eine *Fourierreihe* (in diesem Fall eine reine  $\sin$ -Reihe), also muß auch die rechte Seite  $\varphi(x)$  in eine  $\sin$ -Fourierreihe entwickelt werden.

Dazu muß die Funktion  $\varphi : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  nach links (d.h.: nach  $(-l, 0)$ ) *ungerade fortgesetzt* und dann  $2l$ -periodisch fortgesetzt werden.



Ist dann  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *stückweise stetig und stückweise glatt*, so gilt:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{mit den Fourierkoeffizienten } B_n \text{ von } \varphi:$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s \, ds$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dann für die Lösung  $u(x, t)$ , daß  $b_n = B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  gelten muß. Also ist mit  $B_n$  (*Fourierkoeffizienten* von  $\varphi$ )

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Lösung der Anfangs-Randwert-Aufgabe (ARWA) (falls diese unendliche Reihe konvergent ist und 1-mal nach  $t$  und 2-mal nach  $x$  stetig partiell differenzierbar ist).

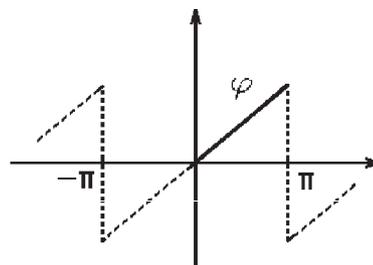
**Beispiel hierzu:**

$$\left[ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \quad , \quad (0 < x < \pi \quad , \quad t > 0) \quad (\Rightarrow \quad a = 1 \quad , \quad l = \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = x \quad (\Rightarrow \quad \varphi(x) = x) \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

$$\text{mit } B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} .$$

$\varphi(x) = x$  ,  $x \in (0, \pi)$  , ungerade fortgesetzt und dann  $2\pi$ -periodisch fortgesetzt (vgl. **S.313**).



$$\Rightarrow \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t} \sin nx$$

ist die gesuchte (eindeutig bestimmte) Lösung der ARWA.

Prüfen, ob stetig partiell differenzierbar:

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-n)(-1)^{n+1} e^{-n^2 t} \sin nx ,$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-n)(-1)^{n+1} e^{-n^2 t} \sin nx .$$

Alle Ableitungsreihen sind gleichmäßig konvergent für  $t \geq \delta$  mit  $\delta > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$ , denn  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2 \delta}}$  ist konvergent.

**Bemerkung 1 :** Diese Lösungsmethode wird *Fouriermethode* genannt.

**Bemerkung 2 :** Man kann den letzten Schritt: "Die Bestimmung der Koeffizienten  $b_n$  als Fourierkoeffizienten der Fourierreihe von  $\varphi$  (durch Koeffizientenvergleich)" auch folgendermaßen herleiten:

Es muß ja gelten

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x) \quad , \quad (0 < x < l).$$

Multipliziert man diese Gleichung auf beiden Seiten mit  $\sin \frac{m\pi}{l} x$  und integriert dann beide Seiten (hierbei muß man Summation und Integration vertauschen), so erhält man:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x dx = \int_{-l}^l \varphi(x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx .$$

Wegen der Orthogonalitätseigenschaft der  $\sin$ -Funktionen (vgl. S.308) gilt

$$\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x dx = \begin{cases} 0 & , \text{falls } n \neq m \\ l & , \text{falls } n = m . \end{cases}$$

Also folgt:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (\text{da Integrand gerade Funktion, weil } \varphi \text{ ungerade fortgesetzt}).$$

Also gilt:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

**Bemerkung 3 :** Setzt man die Fourierkoeffizienten  $b_n$  von  $\varphi$  in die Lösung  $u(x, t)$  ein und vertauscht die Summation mit der Integration (was bei gleichmäßiger Konvergenz erlaubt ist), so erhält man die *Lösung in Integralform*:

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, t, s) \varphi(s) ds \quad \text{mit der Greenschen Funktion}$$

$$G(x, t, s) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} s .$$

b) *Inhomogene DGL, homogene Randbedingungen*

$$\begin{aligned}
 u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \\
 u(0, t) &= 0 \quad , \quad u(l, t) = 0 \quad \text{Randbedingungen} \\
 u(x, 0) &= \varphi(x) \quad \text{Anfangsbedingung}
 \end{aligned}$$

Hier setzt sich die Lösung zusammen aus der Lösung  $u_h$  des zugehörigen homogenen Problems a) und der *partikulären Lösung*  $u_0$  des *inhomogenen Problems*

$$\begin{aligned}
 u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \\
 u(0, t) &= 0 \quad , \quad u(l, t) = 0 \quad \text{Randbedingungen} \\
 u(x, 0) &= 0 \quad \text{Anfangsbedingung}
 \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung muß die *Anfangsbedingung*  $u(x, 0) = 0$  erfüllen, weil die Lösung  $u_h$  des homogenen Problems schon die *Anfangsbedingung*  $u(x, 0) = \varphi(x)$  erfüllt, denn dann gilt für die Lösung  $u(x, t) = u_h(x, t) + u_0(x, t)$ :  
 $u(x, 0) = u_h(x, 0) + u_0(x, 0) = \varphi(x) + 0 = \varphi(x)$ .

*Variation der Konstanten:*

Für  $u_0(x, t)$  machen wir einen Ansatz mit Hilfe der Methode "Variation der Konstanten":

Da die Lösung des homogenen Problems

$$u_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (\text{mit } b_n \text{ Fourierkoeffizienten von } \varphi) \text{ ist, machen}$$

wir für  $u_0(x, t)$  den Ansatz:

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

mit den zu bestimmenden unbekanntenen Funktionen  $v_n(t)$ .

*Einsetzen in die DGL ergibt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v'_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\right) v_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x + f(x, t) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ v'_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 v_n(t) \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x, t) .$$

Auf der linken Seite steht eine Fourierreihe (reine sin-Reihe), also müssen wir auch die Funktion  $f(x, t)$  bzgl.  $x$  in eine sin-Fourierreihe entwickeln. Dazu müssen wir  $f(x, t)$  bzgl.  $x$  *ungerade und dann  $2l$ -periodisch fortsetzen*. Dann lauten die *Fourierkoeffizienten* von  $f(x, t)$  bzgl.  $x$ :

$$b_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Da } u_0(x, 0) = 0 \Rightarrow u_0(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0 \quad \forall 0 < x < l$$

$$\Rightarrow v_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir also folgende AWA für  $v_n(t)$ :

$$\begin{aligned} v_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 v_n(t) &= b_n(t) \\ v_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

Hierbei sind  $b_n(t)$  die *Fourierkoeffizienten* von  $f(x, t)$  bzgl.  $x$ .

### Beispiel

$$\left[ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + t^2 \sin 2x \quad , \quad (0 < x < \pi \ , \ t > 0) && (\Rightarrow \ a = 1 \ , \ l = \pi) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right]$$

$$u_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx \quad (\text{vgl. S.555}).$$

$$\text{Da } \varphi(x) \equiv 0 \Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad u_h(x, t) \equiv 0.$$

$$\text{Ansatz für die partikuläre Lösung: } u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin nx.$$

Dieser Ansatz führt auf die AWA:

$$v_n'(t) + n^2 v_n(t) = b_n(t) \quad , \quad v_n(0) = 0 \quad ,$$

mit den Fourierkoeffizienten  $b_n(t)$  von  $f(x, t) = t^2 \sin 2x$  bzgl.  $x$

$$\Rightarrow b_2(t) = t^2 \quad , \quad b_n(t) \equiv 0 \quad \text{sonst}$$

$$\Rightarrow v_n(t) \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\} \quad ; \quad \text{für } n = 2 \text{ erhalten wir}$$

$$v_2'(t) + 4v_2(t) = t^2 \quad , \quad v_2(0) = 0.$$

*Lösung dieser AWA:*

$$\Rightarrow v_2(t) = \frac{1}{32}(1 - 4t + 8t^2 - e^{-4t})$$

$$\Rightarrow u_0(x, t) = \frac{1}{32}(1 - 4t + 8t^2 - e^{-4t}) \sin 2x$$

$$\Rightarrow u(x, t) = u_h(x, t) + u_0(x, t) = \frac{1}{32}(1 - 4t + 8t^2 - e^{-4t}) \sin 2x$$

ist die gesuchte Lösung (da hier  $u_h \equiv 0$ ).

### c) Inhomogene DGL, inhomogene Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t) && , \quad 0 < x < l \ , \ t > 0 \\ u(0, t) &= \psi_1(t) \ , \ u(l, t) = \psi_2(t) && \text{Randbedingungen} \\ u(x, 0) &= \varphi(x) && \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

Hierbei seien  $\psi_1, \psi_2$  stetig differenzierbar für  $t > 0$ .

*Randbedingungen homogen machen:*

Der Ansatz

$$v(x, t) = u(x, t) + a(t) + b(t)x$$

(mit den zu bestimmenden unbekanntenen Funktionen  $a(t), b(t)$ ) führt auf ein Problem mit *homogenen Randbedingungen*. Hierbei ändert sich die partielle DGL und die Anfangsbedingung.

Denn:

$$\begin{aligned} v(0, t) = u(0, t) + a(t) = \psi_1(t) + a(t) = 0 &\Rightarrow a(t) = -\psi_1(t), \\ v(l, t) = u(l, t) + a(t) + b(t)l = \psi_2(t) - \psi_1(t) + b(t)l = 0 &\Rightarrow b(t) = \frac{1}{l}(\psi_1(t) - \psi_2(t)) \\ \Rightarrow v(x, t) = u(x, t) - \psi_1(t) + \frac{x}{l}(\psi_1(t) - \psi_2(t)). \end{aligned}$$

Da  $v_t = u_t - \psi_1'(t) + \frac{x}{l}(\psi_1'(t) - \psi_2'(t))$  und  $v_{xx} = u_{xx}$  und

$v(x, 0) = u(x, 0) - \psi_1(0) + \frac{x}{l}(\psi_1(0) - \psi_2(0))$  erhalten wir für  $v$  die neue ARWA:

$$\begin{array}{ll} v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t) - \psi_1'(t) + \frac{x}{l}(\psi_1'(t) - \psi_2'(t)) & , \quad 0 < x < l, t > 0 \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 & \text{homogene Randbedingungen} \\ v(x, 0) = \varphi(x) - \psi_1(0) + \frac{x}{l}(\psi_1(0) - \psi_2(0)) & \text{Anfangsbedingung} \end{array}$$

### Beispiel

$$\left[ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + tx \quad , \quad (0 < x < 1, t > 0) \quad (\Rightarrow a = 1, l = 1) \\ u(0, t) = t, u(1, t) = 1 \\ u(x, 0) = x \end{array} \right]$$

Der Ansatz  $v(x, t) = u(x, t) + a(t) + b(t)x$  ergibt:

$$\begin{aligned} v(0, t) = t + a(t) = 0 &\Rightarrow a(t) = -t, \\ v(1, t) = 1 - t + b(t) \cdot 1 = 0 &\Rightarrow b(t) = t - 1 \\ \Rightarrow v(x, t) = u(x, t) - t + (t - 1)x \\ \Rightarrow v_t = u_t - 1 + x, v_{xx} = u_{xx}, v(x, 0) = u(x, 0) - x = x - x = 0 &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} v_t = v_{xx} + tx - 1 + x \quad , \quad (0 < x < 1, t > 0) \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{array} \right]$$

Ist  $v(x, t)$  die Lösung dieser ARWA, so ist

$$u(x, t) = v(x, t) + t - (t - 1)x$$

Lösung der gegebenen ARWA.

**Bemerkung** : Auch bei anderen inhomogenen Randbedingungen (z.B.:  $u_x(0, t) = \psi_1(t)$  ,  $u(l, t) = \psi_2(t)$ ) kann man mit dem Ansatz:  $v(x, t) = u(x, t) + a(t) + b(t)x$  die Randbedingungen homogen machen. Nur wenn bei beiden Randbedingungen die partielle Ableitung nach  $x$  auftaucht, also:  $u_x(0, t) = \psi_1(t)$  ,  $u_x(l, t) = \psi_2(t)$  , so muß der Ansatz  $v(x, t) = u(x, t) + a(t)x + b(t)x^2$  benutzt werden.

**Bemerkung** : Um die allgemeine ARWA (z.B.: Wärmeleitungsgleichung) zu lösen, sind also *drei Schritte* notwendig:

- 1.Schritt: Randbedingungen homogen machen,
- 2.Schritt: Homogenes Problem lösen,
- 3.Schritt: Partikuläre Lösung des inhomogenen Problems bestimmen.

### Beispiel

$$\left[ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + 1 \quad , \quad (0 < x < 1 \quad , \quad t > 0) \quad (\Rightarrow \quad a = 1 \quad , \quad l = 1) \\ u(0, t) = t \quad , \quad u(1, t) = 1 \\ u(x, 0) = x^2 \end{array} \right]$$

1.Schritt: Randbedingungen homogen machen

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) + a(t) + b(t)x \quad \Rightarrow \\ v(0, t) &= t + a(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = -t \quad , \\ v(1, t) &= 1 - t + b(t) \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b(t) = t - 1 \\ \Rightarrow \quad v(x, t) &= u(x, t) - t + (t - 1)x \\ \Rightarrow \quad v_t &= u_t - 1 + x \quad , \quad v_{xx} = u_{xx} \quad , \quad v(x, 0) = u(x, 0) - x = x^2 - x \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} v_t = v_{xx} + x \quad , \quad (0 < x < 1 \quad , \quad t > 0) \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) = x(x - 1) \end{array} \right]$$

2.Schritt: Homogenes Problem lösen

$$v_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x \quad (\text{vgl. S.555})$$

$$\begin{aligned} \text{mit } b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 x(x - 1) \sin n\pi x \, dx \\ &= 2 \left\{ \underbrace{x(x - 1) \frac{-\cos n\pi x}{n\pi}}_{=0} \Big|_0^1 + \int_0^1 (2x - 1) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \, dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \underbrace{(2x - 1) \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}}_{=0} \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2} \, dx \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_n = 4 \left. \frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^3} \right|_0^1 = \frac{4}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ \frac{-8}{(n\pi)^3} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_h(x, t) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^3} e^{-(2l+1)^2 \pi^2 t} \sin(2l+1)\pi x .$$

**3.Schritt:** Partikuläre Lösung des inhomogenen Problems bestimmen

$$\left[ \begin{array}{l} v_t = v_{xx} + x \quad , \quad (0 < x < 1 , t > 0) \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{array} \right]$$

*Variation der Konstanten:*

Der Ansatz  $v_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin n\pi x$  führt auf (vgl. S.558 )

$$w'_n(t) + (n\pi)^2 w_n(t) = b_n(t) \quad , \quad w_n(0) = 0 \quad ,$$

$$\text{mit } b_n(t) = \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow w_n(t) = ce^{-(n\pi)^2 t} + \frac{2}{(n\pi)^3} (-1)^{n+1} \quad ,$$

$$w_n(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_n(t) = \frac{2(-1)^{n+1}}{(n\pi)^3} (1 - e^{-(n\pi)^2 t})$$

$$\Rightarrow v_0(x, t) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} (1 - e^{-(n\pi)^2 t}) \sin n\pi x$$

$\Rightarrow u(x, t) = v_h(x, t) + v_0(x, t) + t - (t-1)x$  ist die gesuchte Lösung.

**Beispiel 2.:** Schwingungsgleichung ( $a > 0$  fest)

*Gegeben:*

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$	$, \quad 0 < x < l , t > 0$
$u(0, t) = \psi_1(t) , u(l, t) = \psi_2(t)$	Randbedingungen
$u(x, 0) = \varphi_1(x) , u_t(x, 0) = \varphi_2(x)$	Anfangsbedingungen

Diese DGL ist eine *hyperbolische DGL*.

*Gesucht:* Eine Funktion  $u(x, t)$ , die in  $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} : 0 < x < l , t > 0 \right\}$  2-mal nach  $x$  und 2-mal nach  $t$  stetig partiell differenzierbar ist und die DGL einschließlich der Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

Anwendung:

$u(x, t)$  gibt die *Schwingung* einer Saite der Länge  $l$  an, wenn die Schwingung an den Enden der Saite  $\psi_1(t)$  bzw.  $\psi_2(t)$  und die Schwingung zur Zeit  $t = 0$  gleich  $\varphi_1(x)$  und die partielle Ableitung nach  $t$  zur Zeit  $t = 0$  gleich  $\varphi_2(x)$  ist.

1.Schritt: *Randbedingungen homogen machen*

Auch hier müssen zunächst die Randbedingungen *homogen* gemacht werden. Dazu benutzt man wieder den Ansatz  $v(x, t) = u(x, t) + a(t) + b(t)x$  (nur wenn beide Randbedingungen für  $u_x$  gelten, so muß der Ansatz  $v(x, t) = u(x, t) + a(t)x + b(t)x^2$  benutzt werden).  
Dadurch werden die partielle DGL und die Anfangsbedingungen verändert.

Wir gehen nun davon aus, daß die ARWA *homogene Randbedingungen* besitzt. Sei also folgende ARWA gegeben:

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$	,	$0 < x < l, t > 0$
$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0$		Randbedingungen
$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x)$		Anfangsbedingungen

2.Schritt: *Lösung der homogenen DGL (mit homogenen Randbedingungen)*

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$	,	$0 < x < l, t > 0$
$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0$		
$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x)$		

Wir machen für  $u(x, t)$  wieder den Ansatz (*Produktansatz, Separationsansatz*):  
 $u(x, t) = f(x)g(t)$ . Dieser Ansatz führt auf

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda.$$

Zusammen mit den homogenen Randbedingungen erhalten wir wieder eine EWA für  $f(x)$  und eine DGL für  $g(t)$

1) $f''(x) - \lambda f(x) = 0$
$f(0) = f(l) = 0$

2) $g''(t) - \lambda a^2 g(t) = 0$
------------------------------------

Die Lösung der EWA 1) führt wieder auf die EW  $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N}$ ,  
und die zugehörigen EF  $f_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{l}x$  (vgl. S.554).

Die 2. DGL geht für  $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  über in die folgende DGL:

$$g''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 g(t) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung:  $g_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi a}{l}t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l}t$ .

Damit erhalten wir insgesamt durch Summation:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi a}{l}t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l}t \right) \sin \frac{n\pi}{l}x$$

ist *Lösung der homogenen DGL* einschließlich der homogenen Randbedingungen, falls diese unendliche Reihe konvergent ist und 2-mal nach  $t$  und 2-mal nach  $x$  stetig partiell differenzierbar ist.

Nun müssen noch die *Anfangsbedingungen*:  $u(x, 0) = \varphi_1(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \varphi_2(x)$  erfüllt sein, also:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \varphi_1(x) \quad , \quad (0 < x < l),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \varphi_2(x) \quad , \quad (0 < x < l).$$

Also müssen wieder die Funktionen  $\varphi_1(x)$  und  $\varphi_2(x)$  jeweils in eine  $\sin$ -Fourierreihe entwickelt werden. Dazu müssen beide Funktionen *ungerade* und dann *2l-periodisch* fortgesetzt werden. Dann muß gelten (nach Koeffizientenvergleich):

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(s) \sin \frac{n\pi}{l}s \, ds \quad (\text{Fourierkoeffizienten von } \varphi_1)$$

$$\frac{n\pi a}{l} b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_2(s) \sin \frac{n\pi}{l}s \, ds \quad (\text{Fourierkoeffizienten von } \varphi_2)$$

### 3.Schritt: Bestimmung der partikulären Lösung der inhomogenen DGL

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad , \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0$$

Die partikuläre Lösung  $u_0$  muß die Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0$  erfüllen, damit die Lösung  $u = u_h + u_0$  die gegebenen Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = \varphi_1(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \varphi_2(x)$  erfüllt.

*Variation der Konstanten* führt auf den Ansatz:

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x$$

mit den zu bestimmenden unbekanntenen Funktionen  $v_n(t)$ .

Dieser Ansatz führt nach Einsetzen in die DGL, anschließendem Koeffizientenvergleich und Berücksichtigung der Anfangsbedingungen auf die AWA:

$$\begin{aligned} v_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 v_n(t) &= b_n(t) \\ v_n(0) = v_n'(0) &= 0 \end{aligned}$$

mit den *Fourierkoeffizienten*  $b_n(t)$  der *sin-Fourierreihe* der Funktion  $f(x, t)$  bzg.  $x$  (dazu muß die Funktion  $f(x, t)$  wieder ungerade und dann  $2l$ -periodisch fortgesetzt werden).

Es gilt dann für  $n \in \mathbb{N}$

$$b_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad (\text{Fourierkoeffizienten von } f(x, t) \text{ bzg. } x)$$

### Beispiel

$$\left[ \begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} + t \sin \pi x \quad , \quad (0 < x < 1, t > 0) & (\Rightarrow a = 2, l = 1) \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = t \\ u(x, 0) &= 4 \sin^3 \pi x, \quad u_t(x, 0) = x \end{aligned} \right]$$

*1.Schritt:* Randbedingungen homogen machen

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) + a(t) + b(t)x \quad \Rightarrow \\ v(0, t) &= 0 + a(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = 0, \\ v(1, t) &= t + b(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad b(t) = -t \\ \Rightarrow \quad v(x, t) &= u(x, t) - xt \\ \Rightarrow \quad v_{tt} &= u_{tt}, \quad v_{xx} = u_{xx}, \\ v(x, 0) &= u(x, 0) = 4 \sin^3 \pi x, \quad v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - x = x - x = 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} v_{tt} &= 4v_{xx} + t \sin \pi x \quad , \quad (0 < x < 1, t > 0) \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) &= 4 \sin^3 \pi x, \quad v_t(x, 0) = 0 \end{aligned} \right]$$

*2.Schritt:* Homogenes Problem lösen

$$\begin{aligned} v_h(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t \right) \sin n\pi x \quad (\text{vgl. S.563}), \\ v_h(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x = 4 \sin^3 \pi x = 3 \sin \pi x - \sin 3\pi x \\ \Rightarrow \quad a_1 &= 3, \quad a_3 = -1, \quad a_n = 0 \text{ sonst,} \\ (v_h)_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi b_n \sin n\pi x = 0 \quad \Rightarrow \quad b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_h(x, t) = 3 \cos 2\pi t \sin \pi x - \cos 6\pi t \sin 3\pi x$  ist Lösung des homogenen Problems.

**3.Schritt:** Partikuläre Lösung des inhomogenen Problems bestimmen

$$\left[ \begin{array}{l} v_{tt} = 4v_{xx} + t \sin \pi x \quad , \quad (0 < x < 1 , t > 0) \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0 \end{array} \right]$$

*Variation der Konstanten:*

Der Ansatz  $v_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin n\pi x$  führt auf die AWA (vgl. S.564)

$$w_n''(t) + (2n\pi)^2 w_n(t) = b_n(t) \quad , \quad w_n(0) = w_n'(0) = 0 \quad ,$$

mit  $b_1(t) = t$  ,  $b_n(t) \equiv 0$  für  $n \neq 1$

$\Rightarrow w_n(t) \equiv 0$  für  $n \neq 1$ .

Für  $n = 1$  müssen wir die AWA:  $w_1''(t) + (2\pi)^2 w_1(t) = t$  ,  $w_1(0) = w_1'(0) = 0$ , lösen.

Die allgemeine Lösung lautet:

$$w_1(t) = c_1 \cos 2\pi t + c_2 \sin 2\pi t + \frac{t}{(2\pi)^2}$$

$$w_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad ,$$

$$w_1'(0) = 2\pi c_2 + \frac{1}{(2\pi)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{(2\pi)^3}$$

$$\Rightarrow w_1(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} (2\pi t - \sin 2\pi t)$$

$$\Rightarrow v_0(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} (2\pi t - \sin 2\pi t) \sin \pi x \quad \text{ist partikuläre Lösung.}$$

$\Rightarrow u(x, t) = v_h(x, t) + v_0(x, t) + xt$  ist die gesuchte Lösung.

Die *homogene Schwingungsgleichung*  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  läßt sich auch mit Hilfe einer anderen Methode, der "Methode von d'Alembert", lösen.

### Methode von d'Alembert

*Gegeben:*

$\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l , t > 0 \\ u(0, t) = 0 , u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) , u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \end{array}$
--

Wir führen die neuen Variablen  $\xi$  und  $\eta$  ein mit  $\xi = x - at$  ,  $\eta = x + at$ .

Für  $u(x, t) = w(\xi, \eta)$  gilt dann

$$\begin{aligned}
u_x &= w_\xi \cdot \xi_x + w_\eta \cdot \eta_x = w_\xi + w_\eta, \\
u_{xx} &= w_{\xi\xi}\xi_x + w_{\xi\eta}\eta_x + w_{\eta\xi}\xi_x + w_{\eta\eta}\eta_x = w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta} \quad (\text{falls } w \in C^2(D)), \\
u_t &= w_\xi \cdot \xi_t + w_\eta \cdot \eta_t = -aw_\xi + aw_\eta, \\
u_{tt} &= -a(w_{\xi\xi}\xi_t + w_{\xi\eta}\eta_t) + a(w_{\eta\xi}\xi_t + w_{\eta\eta}\eta_t) = -a(-aw_{\xi\xi} + aw_{\xi\eta}) + a(-aw_{\xi\eta} + aw_{\eta\eta}) \\
&= a^2w_{\xi\xi} - 2a^2w_{\xi\eta} + a^2w_{\eta\eta} \quad (\text{falls } w \in C^2(D)).
\end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - a^2u_{xx} &= a^2w_{\xi\xi} - 2a^2w_{\xi\eta} + a^2w_{\eta\eta} - a^2(w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}) = -4a^2w_{\xi\eta} = 0 \\
&\Rightarrow \text{(da } a > 0)
\end{aligned}$$

$w_{\xi\eta} = 0$

Diese partielle DGL läßt sich einfach integrieren:

Da  $w_{\xi\eta} = (w_\xi)_\eta = 0 \Rightarrow w_\xi$  ist unabhängig von  $\eta \Rightarrow w_\xi = f(\xi)$  (nur Funktion von  $\xi$ )

$$\Rightarrow w(\xi, \eta) = \int f(\xi) d\xi + G(\eta) \quad (\text{Integrationskonstante hängt von } \eta \text{ ab}).$$

Sei  $F(\xi)$  eine Stammfunktion von  $f(\xi)$ , dann gilt:

$$w(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

$F, G$  sind beliebige 2-mal stetig differenzierbare Funktionen.

Für  $u(x, t)$  erhalten wir also: Die allgemeine (2-mal stetig differenzierbare) Lösung der Schwingungsgleichung  $u_{tt} = a^2u_{xx}$  lautet:

$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$

wobei  $F, G$  beliebige 2-mal stetig differenzierbare Funktionen sind.

*Anfangsbedingungen angleichen:*

Es muß gelten:  $u(x, 0) = \varphi_1(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \Rightarrow$

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = \varphi_1(x),$$

$$u_t(x, 0) = -aF'(x) + aG'(x) = \varphi_2(x) \Rightarrow$$

$$(1) \quad u_t(x, 0) = -aF'(x) + aG'(x) = \varphi_2(x).$$

Differentiation der 1.Gleichung und Multiplikation mit  $a$  ergibt:

$$(2) \quad aF'(x) + aG'(x) = a\varphi_1'(x).$$

$$(2) - (1) \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}\varphi_1'(x) - \frac{1}{2a}\varphi_2(x),$$

$$(2) + (1) \Rightarrow G'(x) = \frac{1}{2}\varphi_1'(x) + \frac{1}{2a}\varphi_2(x).$$

Integration ergibt:

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \varphi_2(s) ds,$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \varphi_2(s) ds.$$

Daraus folgt mit  $u(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x - at) + \varphi_1(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_2(s) ds$$

ist Lösung der Schwingungs-DGL und erfüllt die Anfangsbedingungen.

*Randbedingungen*

Es muß gelten:  $u(0, t) = 0$  ,  $u(l, t) = 0$  .

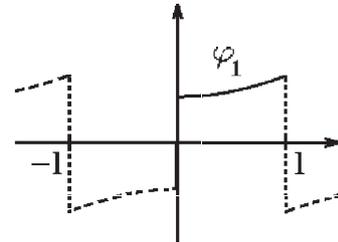
$$u(0, t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(-at) + \varphi_1(at)) + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \varphi_2(s) ds = 0 ,$$

$$u(l, t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(l - at) + \varphi_1(l + at)) + \frac{1}{2a} \int_{l-at}^{l+at} \varphi_2(s) ds = 0 .$$

Diese beiden Bedingungen sind erfüllt, wenn  $\varphi_1, \varphi_2$  *ungerade* und *2l-periodisch* sind (das kann durch Fortsetzung immer erreicht werden, da  $\varphi_1, \varphi_2$  nur in  $(0, l)$  gegeben sind).

Denn dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_1(-at) &= -\varphi_1(at) , \\ \varphi_1(l - at) &= -\varphi_1(-l + at) = -\varphi_1(l + at) , \\ \int_{-at}^{at} \varphi_2(s) ds &= 0 , \quad \int_{l-at}^{l+at} \varphi_2(s) ds = 0 . \end{aligned}$$



Damit  $u$  2-mal stetig partiell differenzierbar ist, muß  $\varphi_1$  (nach Fortsetzung) in  $\mathbb{R}$  2-mal stetig differenzierbar und  $\varphi_2$  (nach Fortsetzung) in  $\mathbb{R}$  1-mal stetig differenzierbar sein.

**Beispiel** (vgl. S.564 , homogenes Problem)

$$\left[ \begin{array}{l} u_{tt} = 4u_{xx} \quad , \quad (0 < x < 1 , t > 0) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 4 \sin^3 \pi x , \quad u_t(x, 0) = 0 \end{array} \right]$$

$$\varphi_1(x) = 4 \sin^3 \pi x = 3 \sin \pi x - \sin 3\pi x ,$$

$$\varphi_2(x) \equiv 0$$

$\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$  sind ungerade, 2-periodisch und beliebig oft stetig differenzierbar.

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2}(3 \sin \pi(x - 2t) - \sin 3\pi(x - 2t) + 3 \sin \pi(x + 2t) - \sin 3\pi(x + 2t))$$

$$= \frac{1}{2}(3 \sin \pi x \cos 2\pi t - 3 \cos \pi x \sin 2\pi t - \sin 3\pi x \cos 6\pi t + \cos 3\pi x \sin 6\pi t \\ + 3 \sin \pi x \cos 2\pi t + 3 \cos \pi x \sin 2\pi t - \sin 3\pi x \cos 6\pi t - \cos 3\pi x \sin 6\pi t)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = 3 \cos 2\pi t \sin \pi x - \cos 6\pi t \sin 3\pi x$$

ist Lösung dieser ARWA (vgl. S.565 ).

## Mehrdimensionale Probleme

Wir beweisen zunächst folgenden Hilfsatz:

**Hilfssatz 15.2 :** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  Normalbereich mit  $M \subset G$ ,  $G$  beschränktes Gebiet, und sei  $u \in C^2(G)$ .

Dann hat die *Eigenwertaufgabe*

$$\Delta u = \lambda u \quad \text{in } M, \quad u|_{\partial M} = 0$$

nur *negative Eigenwerte*, also  $\lambda < 0$ .

*Beweis :* Nach der 1. Greenschen Formel (vgl. S.474) gilt

$$\begin{aligned} \int_M (u\Delta u + |\text{grad } u|^2) d\vec{x} &= \int_{\partial M} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma = 0 \quad (\text{da } u|_{\partial M} = 0) \\ \Rightarrow \lambda \int_M u^2 d\vec{x} + \int_M |\text{grad } u|^2 d\vec{x} &= 0 \quad (\text{da } \Delta u = \lambda u) \\ \Rightarrow \lambda &= - \frac{\int_M |\text{grad } u|^2 d\vec{x}}{\int_M u^2 d\vec{x}} < 0 \quad (\text{da } \int_M u^2 d\vec{x} > 0 \text{ für } u \neq 0). \end{aligned}$$

**Beispiel hierzu:**

$$f''(x) = \lambda f(x), \quad f(0) = f(l) = 0, \quad M = [0, l]$$

$$\Rightarrow \lambda < 0 \quad (\text{vgl. S.554}, \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2).$$

Bei *mehrdimensionalen Problemen* wird (wie bei den eindimensionalen Problemen) zunächst die Zeitvariable  $t$  von der Ortsvariablen  $\vec{x}$  mit Hilfe eines Separationsansatzes getrennt.

**Beispiel 1.:** *Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{array}{ll} u_t = a^2 \Delta u & \vec{x} \in M, \quad t > 0 \\ u|_{\partial M} = 0 & \text{Randbedingung} \\ u(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}) & \text{Anfangsbedingung} \end{array}$$

( $\Delta$  wirkt nur auf die Ortsvariable  $\vec{x}$ ).

Der *Separationsansatz*  $u(\vec{x}, t) = f(\vec{x})g(t)$  führt nach anschließender Division durch  $a^2 f(\vec{x})g(t)$  auf

$$\frac{g'(t)}{a^2 g(t)} = \frac{\Delta f(\vec{x})}{f(\vec{x})} = \lambda.$$

Hieraus (zusammen mit der Randbedingung  $u|_{\partial M} = 0$ ) erhalten wir die

Eigenwertaufgabe für  $f(\vec{x})$

$$(1) \quad \Delta f = \lambda f \quad \text{in } M \quad , \quad f|_{\partial M} = 0$$

und die DGL für  $g(t)$

$$(2) \quad g'(t) - \lambda a^2 g(t) = 0$$

Nach Hilfsatz 15.2 gilt: Die EWA (1) hat nur negative EW, also gilt  $\lambda < 0$ . Deshalb setzen wir  $\lambda = -\alpha^2$ . Damit lautet die EWA (1) für  $f(\vec{x})$ :  $\Delta f + \alpha^2 f = 0$  ,  $f|_{\partial M} = 0$ . Die DGL (2) für  $g(t)$  geht über in:

$$g'(t) + (a\alpha)^2 g(t) = 0 \quad \text{mit der Lösung: } g_\alpha(t) = c_\alpha e^{-(a\alpha)^2 t} .$$

Also gilt:

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} c_\alpha e^{-(a\alpha)^2 t} f_\alpha(\vec{x})$$

ist Lösung der Wärmeleitungsgleichung (einschließlich der Randbedingung), falls  $\alpha$  Eigenwert und  $f_\alpha(\vec{x})$  Eigenfunktion der EWA

$$\Delta f + \alpha^2 f = 0 \quad , \quad f|_{\partial M} = 0$$

**Beispiel 2.:** *Schwingungsgleichung*

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = a^2 \Delta u & \vec{x} \in M \quad , \quad t > 0 \\ u|_{\partial M} = 0 & \text{Randbedingung} \\ u(\vec{x}, 0) = \varphi_1(\vec{x}) \quad , \quad u_t(\vec{x}, 0) = \varphi_2(\vec{x}) & \text{Anfangsbedingungen} \end{array}$$

Der *Separationsansatz*  $u(\vec{x}, t) = f(\vec{x})g(t)$  führt nach anschließender Division durch  $a^2 f(\vec{x})g(t)$  auf

$$\frac{g''(t)}{a^2 g(t)} = \frac{\Delta f(\vec{x})}{f(\vec{x})} = \lambda .$$

Hieraus (zusammen mit der Randbedingung  $u|_{\partial M} = 0$ ) erhalten wir die *Eigenwertaufgabe* für  $f(\vec{x})$

$$(1) \quad \Delta f = \lambda f \quad \text{in } M \quad , \quad f|_{\partial M} = 0$$

und die DGL für  $g(t)$

$$(2) \quad g''(t) - \lambda a^2 g(t) = 0$$

Für die EWA (1) gilt wieder:  $\lambda < 0$ . Deshalb setzen wir wieder  $\lambda = -\alpha^2$ . Damit lautet die EWA (1) für  $f(\vec{x})$ :  $\Delta f + \alpha^2 f = 0$  ,  $f|_{\partial M} = 0$ .

Die DGL (2) für  $g(t)$  geht über in:

$$g''(t) + (a\alpha)^2 g(t) = 0 \quad \text{mit der Lösung: } g_\alpha(t) = c_\alpha \cos a\alpha t + d_\alpha \sin a\alpha t .$$

Also gilt:

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} (c_\alpha \cos a\alpha t + d_\alpha \sin a\alpha t) f_\alpha(\vec{x})$$

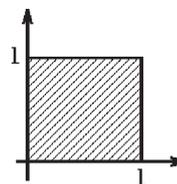
ist Lösung der Schwingungsgleichung (einschließlich der Randbedingung), falls  $\alpha$  Eigenwert und  $f_\alpha(\vec{x})$  Eigenfunktion der EWA

$$\Delta f + \alpha^2 f = 0 \quad , \quad f|_{\partial M} = 0$$

**Lösung der EWA:**  $\Delta f + \alpha^2 f = 0$  ,  $f|_{\partial M} = 0$  für spezielle Bereiche  $M$

a)  $M$  Rechteck

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq l , 0 \leq y \leq l \right\} .$$



Wir separieren die Variablen  $x$  und  $y$  mit dem Ansatz:  $f(x, y) = v(x)w(y)$ .

Dieser Ansatz führt auf

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) + \alpha^2 v(x)w(y) = 0 .$$

Division durch  $v(x)w(y)$  ergibt:

$$\frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{w''(y)}{w(y)} + \alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} - \alpha^2 = \mu \in \mathbb{R} .$$

Damit erhalten wir die beiden gewöhnlichen DGL

$$v''(x) - \mu v(x) = 0 \quad , \quad w''(y) + (\mu + \alpha^2)w(y) = 0 .$$

Aus der Randbedingung  $f|_{\partial M} = 0$  folgt:  $v(0) = v(l) = 0$  ,  $w(0) = w(l) = 0$ .

Damit erhalten wir die zwei EWA

$$\begin{array}{l} (1a) \quad v''(x) - \mu v(x) = 0 \quad , \quad v(0) = v(l) = 0 \\ (1b) \quad w''(y) + (\mu + \alpha^2)w(y) = 0 \quad , \quad w(0) = w(l) = 0 \end{array}$$

Die EWA (1a) hat die EW  $\mu_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

und die EF  $v_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{l} x$  (vgl. S.554).

Die EWA (1b) hat die EW  $\mu_n + \alpha^2 = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$  ,  $m \in \mathbb{N}$ ,

und die EF  $w_m(y) = d_m \sin \frac{m\pi}{l} y$ .

$$\Rightarrow \alpha_{n,m}^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (n^2 + m^2) \Rightarrow$$

$\alpha_{n,m} = \frac{\pi}{l} \sqrt{n^2 + m^2}$  ,  $n, m \in \mathbb{N}$  , sind die Eigenwerte der EWA

$\Delta f + \alpha^2 f = 0$  ,  $f|_{\partial M} = 0$  , für das Rechteck  $M$ ;

$f_{n,m}(x, y) = c_{n,m} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y$  sind die zugehörigen Eigenfunktionen.

### Beispiel hierzu

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\in M \text{ Rechteck} , t > 0 \\ u|_{\partial M} &= 0 \\ u(x, y, 0) &= \varphi_1(x, y) , u_t(x, y, 0) = \varphi_2(x, y) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL (einschließlich der Randbedingung) lautet:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{n,m} \cos \omega_{n,m} t + b_{n,m} \sin \omega_{n,m} t) \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y$$

mit  $\omega_{n,m} = \frac{\pi a}{l} \sqrt{n^2 + m^2}$ .

Nun müssen noch die *Anfangsbedingungen* angeglichen werden:

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y = \varphi_1(x, y)$$

$\Rightarrow a_{n,m}$  sind die Fourierkoeffizienten der  $\sin$ -Fourierreihe von  $\varphi_1(x, y)$  (2-dimensionale Fourierreihe),

$$u_t(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{n,m} b_{n,m} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y = \varphi_2(x, y)$$

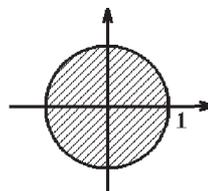
$\Rightarrow \omega_{n,m} b_{n,m}$  sind die Fourierkoeffizienten der  $\sin$ -Fourierreihe von  $\varphi_2(x, y)$  , also

$$a_{n,m} = \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \varphi_1(x, y) \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y \, dx \, dy ,$$

$$b_{n,m} = \frac{4}{\omega_{n,m} l^2} \int_0^l \int_0^l \varphi_2(x, y) \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y \, dx \, dy .$$

### b) $M$ Kreisscheibe

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\} .$$



Wir behandeln nur den folgenden *Spezialfall*:

$f$  sei nur abhängig vom Abstand zum Nullpunkt, d.h.: von  $r$  (also unabhängig vom Winkel  $\varphi$ ). Damit ist  $f$  eine Funktion von  $r$ , also  $f(r)$  (die partiellen Ableitungen

nach  $\varphi$  sind  $= 0$ , die partiellen Ableitungen nach  $r$  sind gewöhnliche Ableitungen). Schreiben wir den *Laplace-Operator*  $\Delta f$  in *Polarkoordinaten* um, so erhalten wir

$$\text{(vgl. S.276): } \Delta f = f''(r) + \frac{1}{r}f'(r).$$

Damit geht die DGL:  $\Delta f + \alpha^2 f = 0$  über in die gewöhnlich DGL

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \alpha^2 f(r) = 0, \quad \text{Multiplikation mit } r^2 \Rightarrow$$

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + (\alpha^2 r^2 - 0)f(r) = 0 \quad \text{(modifizierte Besselsche DGL, vgl. S.520).}$$

$f_\alpha(r) = c_\alpha J_0(\alpha r) + d_\alpha N_0(\alpha r)$  ist allgemeine Lösung.

$f_\alpha$  beschränkt für  $r \rightarrow 0 \Rightarrow d_\alpha = 0 \Rightarrow$

$f_\alpha(r) = c_\alpha J_0(\alpha r)$  ist Lösung (für  $r \rightarrow 0$  beschränkt).

Randbedingung:  $f|_{\partial M} = 0 \Rightarrow f_\alpha(1) = c_\alpha J_0(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$  Nullstelle von  $J_0(x)$ .

Also sind die Eigenwerte der EWA: die Nullstellen  $\alpha$  von  $J_0(x)$ .

Die zugehörigen Eigenfunktionen lauten:  $f_\alpha(r) = c_\alpha J_0(\alpha r)$ .

### Beispiel hierzu

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M, \quad M \text{ Kreisscheibe mit Radius } 1, \quad t > 0$$

$$u|_{\partial M} = 0$$

$$u \text{ unabhängig von } \varphi, \quad u(r, 0) = \varphi(r)$$

Die (nur von  $r$  und  $t$  abhängige) allgemeine Lösung dieser DGL lautet:

$$u(r, t) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} e^{-(a\alpha)^2 t} J_0(\alpha r)$$

(hierbei wird über alle positiven Nullstellen  $\alpha$  von  $J_0$  summiert).

*Anfangsbedingung angleichen:*

$$u(r, 0) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} J_0(\alpha r) = \varphi(r)$$

$\Rightarrow \varphi$  nach *Besselfunktionen entwickeln*, d.h.: Multiplikation mit  $r J_0(\beta r)$  und anschließende Integration ergibt:

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} \int_0^1 r J_0(\alpha r) J_0(\beta r) dr = \int_0^1 r \varphi(r) J_0(\beta r) dr.$$

Wegen der Orthogonalitätseigenschaft der Besselfunktionen (vgl. S.520) gilt:

$$\int_0^1 r J_0(\alpha r) J_0(\beta r) dr = \begin{cases} 0 & \text{, falls } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2} J_0'^2(\alpha) & \text{, falls } \alpha = \beta. \end{cases}$$

$$\text{Also gilt: } c_{\alpha} = \frac{2}{J_0'^2(\alpha)} \int_0^1 r \varphi(r) J_0(\alpha r) dr.$$

Als nächstes Beispiel wollen wir das *Dirichlet-Problem* für spezielle Bereiche des  $\mathbb{R}^n$  lösen.

## Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \overset{\circ}{M}, \quad u|_{\partial M} = h$$

Hierbei sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  ein Normalbereich,  $u \in C^2(\overset{\circ}{M})$ ,  $u \in C(\overline{M})$ ,  $h \in C(\partial M)$ .

Dieses Problem besitzt höchstens eine Lösung (vgl. S.478).

Wir bestimmen nun die Lösung für spezielle Bereiche des  $\mathbb{R}^n$ .

### a) Rechteck in $\mathbb{R}^2$

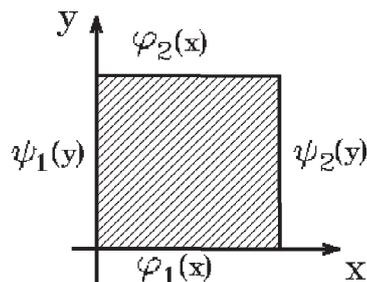
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l \right\},$$

$$u|_{\partial M} = h(x, y).$$

Hierbei sei auf den 4 Rändern:

$$h(x, 0) = \varphi_1(x), \quad h(x, l) = \varphi_2(x),$$

$$h(0, y) = \psi_1(y), \quad h(l, y) = \psi_2(y).$$



#### 1.Schritt: Erzeugung von "Nullen" in den vier Eckpunkten

Der Ansatz  $v(x, y) = u(x, y) + ax + by + cxy + d$  führt auf

$$v(0, 0) = u(0, 0) + d = 0 \Rightarrow d = -h(0, 0),$$

$$v(0, l) = u(0, l) + bl + d = 0 \Rightarrow b = -\frac{d + h(0, l)}{l},$$

$$v(l, 0) = u(l, 0) + al + d = 0 \Rightarrow a = -\frac{d + h(l, 0)}{l},$$

$$v(l, l) = u(l, l) + al + bl + cl^2 + d = 0 \Rightarrow c = -\frac{d + al + bl + h(l, l)}{l^2}.$$

Dieser Ansatz verändert nicht die partielle DGL  $\Delta v = \Delta u = 0$ .

Wir setzen also ab jetzt voraus, daß die Randfunktion  $h(x, y)$  in den 4 Eckpunkten den Wert = 0 hat, also  $h(0, 0) = h(0, l) = h(l, 0) = h(l, l) = 0$ .

#### 2.Schritt Aufspaltung in 4 Probleme

Wir spalten das Problem auf in 4 Probleme. Jedes der folgenden 4 Probleme erfüllt an 3 Rändern die Randbedingung = 0, am 4. Rand die gegebene Randbedingung.

$$(1) \quad \Delta v = 0, \quad v(x, 0) = h(x, 0) = \varphi_1(x), \quad v(x, l) = v(0, y) = v(l, y) = 0.$$

$$(2) \quad \Delta v = 0, \quad v(x, l) = h(x, l) = \varphi_2(x), \quad v(x, 0) = v(0, y) = v(l, y) = 0.$$

$$(3) \quad \Delta v = 0, \quad v(0, y) = h(0, y) = \psi_1(y), \quad v(x, 0) = v(x, l) = v(l, y) = 0.$$

$$(4) \quad \Delta v = 0, \quad v(l, y) = h(l, y) = \psi_2(y), \quad v(x, 0) = v(x, l) = v(0, y) = 0.$$

Seien  $v_1, v_2, v_3, v_4$  die Lösungen dieser 4 Probleme, dann gilt:

$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$  ist Lösung des gegebenen Dirichlet-Problems.

Wir bestimmen zunächst die Lösung des Problems (2):

$$(2) \quad \Delta v = 0, \quad v(x, l) = h(x, l) = \varphi_2(x), \quad v(x, 0) = v(0, y) = v(l, y) = 0.$$

Wir machen den Produktansatz:  $v(x, y) = f(x)g(y)$ . Damit erhalten wir

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

$$v(x, 0) = f(x)g(0) = 0 \quad \forall 0 \leq x \leq l \Rightarrow g(0) = 0 \quad (\text{sonst } v \equiv 0),$$

$$v(0, y) = f(0)g(y) = 0 \quad \forall 0 \leq y \leq l \Rightarrow f(0) = 0 \quad (\text{sonst } v \equiv 0),$$

$$v(l, y) = f(l)g(y) = 0 \quad \forall 0 \leq y \leq l \Rightarrow f(l) = 0 \quad (\text{sonst } v \equiv 0).$$

Also erhalten wir für  $f(x)$  die EWA

$$(a) \quad f''(x) - \lambda f(x) = 0, \quad f(0) = f(l) = 0$$

und für  $g(y)$  die DGL

$$(b) \quad g''(y) + \lambda g(y) = 0, \quad g(0) = 0$$

Die EW der EWA (a) sind (vgl. S.554):  $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$ .

Die zugehörigen EF lauten:  $f_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{l} x$ .

Die DGL (b) geht für diese EW über in:

$$g''(y) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 g_n(y) = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad g_n(y) = d_1 e^{\frac{n\pi}{l} y} + d_2 e^{-\frac{n\pi}{l} y},$$

$$g_n(0) = d_1 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = -d_1 \Rightarrow g_n(y) = b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l} y\right).$$

Also lautet die allgemeine Lösung des **Problems (2)** (einschließlich der 3 "Null-Randbedingungen"):

$$v_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

*Angleichung an die 4. Randbedingung:*  $v_2(x, l) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = \varphi_2(x)$

$$\Rightarrow b_n = \frac{B_n}{\sinh(n\pi)} \quad \text{mit} \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_2(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad (\text{Fourierkoeff. von } \varphi_2)$$

*Lösung zu (1):*

$$(1) \quad \Delta v = 0, \quad v(x, 0) = h(x, 0) = \varphi_1(x), \quad v(x, l) = v(0, y) = v(l, y) = 0.$$

Analog erhalten wir für  $f(x)$  die EWA

$$(a) \quad f''(x) - \lambda f(x) = 0, \quad f(0) = f(l) = 0$$

und für  $g(y)$  die DGL

$$(b) \quad g''(y) + \lambda g(y) = 0 \quad , \quad g(l) = 0$$

mit den EW  $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und den EF  $f_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{l}x$ .

Die DGL (b) geht für diese EW über in:

$$\begin{aligned} g''_n(y) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 g_n(y) &= 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad g_n(y) = d_1 e^{\frac{n\pi}{l}y} + d_2 e^{-\frac{n\pi}{l}y} \quad , \\ g_n(l) = d_1 e^{\frac{n\pi}{l}l} + d_2 e^{-\frac{n\pi}{l}l} &= 0 \Rightarrow d_2 = -d_1 e^{2n\pi} \Rightarrow \\ g_n(y) &= d \left( e^{\frac{n\pi}{l}y} - e^{2n\pi} e^{-\frac{n\pi}{l}y} \right) = \tilde{d} \left( e^{-n\pi} e^{\frac{n\pi}{l}y} - e^{n\pi} e^{-\frac{n\pi}{l}y} \right) \\ &= \tilde{d} \left( e^{\frac{n\pi}{l}(y-l)} - e^{-\frac{n\pi}{l}(y-l)} \right) = b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}(l-y)\right) . \end{aligned}$$

Also lautet die allgemeine Lösung des **Problems (1)** (einschließlich der 3 "Null-Randbedingungen") :

$$v_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}(l-y)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

*Angleichung an die 4. Randbedingung:*  $v_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \varphi_1(x)$

$$\Rightarrow b_n = \frac{B_n}{\sinh(n\pi)} \quad \text{mit} \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx \quad (\text{Fourierkoeff. von } \varphi_1)$$

Analog (indem man  $x$  und  $y$  vertauscht) erhält man die Lösungen für die Probleme (3) und (4):

Lösung des **Problems (3)**:

$$\begin{aligned} v_3(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}(l-x)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \\ \text{mit} \quad b_n &= \frac{B_n}{\sinh(n\pi)} \quad , \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi_1(y) \sin \frac{n\pi}{l}y \, dy \quad (\text{Fourierkoeff. von } \psi_1) \end{aligned}$$

Lösung des **Problems (4)**:

$$\begin{aligned} v_4(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \\ \text{mit} \quad b_n &= \frac{B_n}{\sinh(n\pi)} \quad , \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi_2(y) \sin \frac{n\pi}{l}y \, dy \quad (\text{Fourierkoeff. von } \psi_2) \end{aligned}$$

## Beispiel

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \overset{\circ}{M}, \quad u|_{\partial M} = x^2 + xy$$

$M$  sei Rechteck mit  $l = 1$ .

1. Schritt: In Eckpunkten "Nullen" erzeugen

Ansatz:  $v(x, y) = u(x, y) + ax + by + cxy + d$ ,

$$v(0, 0) = u(0, 0) + d = 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0,$$

$$v(0, 1) = u(0, 1) + b = 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0,$$

$$v(1, 0) = u(1, 0) + a = 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1,$$

$$v(1, 1) = u(1, 1) - 1 + c = 2 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow v(x, y) = u(x, y) - x - xy,$$

$$v|_{\partial M} = u|_{\partial M} - x - xy = x^2 + xy - x - xy = x^2 - x = x(x - 1).$$

Also erhalten wir für  $v(x, y)$ :

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } \overset{\circ}{M}, \quad v|_{\partial M} = x(x - 1)$$

Für die 4 Randfunktionen gilt:

$$\varphi_1(x) = h(x, 0) = x(x - 1), \quad \varphi_2(x) = h(x, 1) = x(x - 1),$$

$$\psi_1(y) = h(0, y) = 0, \quad \psi_2(y) = h(1, y) = 0.$$

$$\text{Da } \psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 0 \Rightarrow v_3 \equiv v_4 \equiv 0.$$

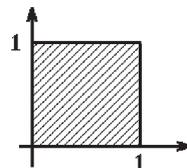
Für die Fourierkoeffizienten der sin-Fourierreihe von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  erhalten wir

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 x(x - 1) \sin n\pi x \, dx \\ &= 2 \left\{ \underbrace{\left[ x(x - 1) \frac{-\cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 (2x - 1) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \, dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \underbrace{\left[ (2x - 1) \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 2 \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2} \, dx \right\} \\ &= \frac{4 \cos n\pi x}{(n\pi)^3} \Big|_0^1 = \frac{4}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ \frac{-8}{(n\pi)^3} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \\ \Rightarrow b_n &= \frac{B_n}{\sinh(n\pi)} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ \frac{-8}{(n\pi)^3 \sinh(n\pi)} & \text{, falls } n \text{ ungerade} . \end{cases} \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$v_1(x, y) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh((2k + 1)\pi(1 - y))}{(2k + 1)^3 \sinh((2k + 1)\pi)} \sin((2k + 1)\pi x),$$

$$v_2(x, y) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh((2k + 1)\pi y)}{(2k + 1)^3 \sinh((2k + 1)\pi)} \sin((2k + 1)\pi x).$$



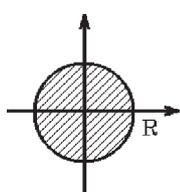
$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y) + x + xy$  ist die gesuchte Lösung.

Die unendlichen Reihen und alle Ableitungsreihen bis zur 2. partiellen Ableitung nach  $x$  bzw. nach  $y$  sind gleichmäßig konvergent für  $|y| \leq \alpha < 1$ , weil im Nenner  $\sinh(n\pi)$  steht. Also lassen sich die unendlichen Reihen von  $v_1$  und  $v_2$  gliedweise 2-mal nach  $x$  und nach  $y$  partiell differenzieren für  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1$ .

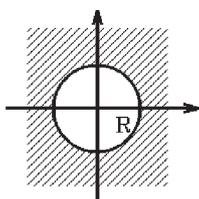
b) **Kreisscheibe in  $\mathbb{R}^2$  : Inneres, Äußeres oder Kreisring**

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \overset{\circ}{M}, \quad u|_{\partial M} = h$$

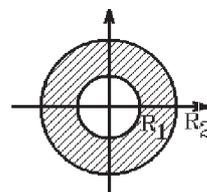
mit  $M$ :



Inneres



Äußeres



Kreisring

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \geq R^2 \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2 \right\}.$$

Wir benutzen Polarkoordinaten:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

Dann geht die Laplace-Gleichung für  $u(x, y) = v(r, \varphi)$  über in (vgl. S.276)

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} = 0.$$

Der Separationsansatz  $v(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$  führt auf

$$f''(r)g(\varphi) + \frac{1}{r}f'(r)g(\varphi) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\varphi) = 0.$$

Division durch  $f(r)g(\varphi)$  und Multiplikation mit  $r^2$  führt auf

$$\frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$(1) \quad g''(\varphi) + \lambda g(\varphi) = 0, \quad g \text{ } 2\pi\text{-periodisch} \quad (\text{EWA})$$

$$(2) \quad r^2 f''(r) + r f'(r) - \lambda f(r) = 0 \quad (\text{Eulersche DGL})$$

Zu (1): Ansatz:  $g(\varphi) = e^{\mu\varphi} \Rightarrow \mu^2 = -\lambda$  (charakteristische Gleichung).

$$\lambda < 0 \Rightarrow g(\varphi) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi},$$

$$g \text{ } 2\pi\text{-periodisch} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow g \equiv 0.$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow g(\varphi) = c_1 + c_2 \varphi, \quad g \text{ } 2\pi\text{-periodisch} \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_0 = 0 \text{ ist EW, } g_0(\varphi) = a_0 \text{ ist zugehörige EF.}$$

$$\begin{aligned} \lambda > 0 &\Rightarrow g(\varphi) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} \varphi + c_2 \sin \sqrt{\lambda} \varphi, \\ g \text{ } 2\pi\text{-periodisch} &\Rightarrow \sqrt{\lambda} = n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \lambda_n = n^2 &\text{ sind EW, } g_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \text{ sind zugehörige EF.} \end{aligned}$$

Zusammen gilt also:

$\lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}_0$  sind die EW,  $g_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$  sind die zugehörigen EF der EWA ( $\lambda_0 = 0, g_0(\varphi) = a_0$  ist hier enthalten).

Zu (2):  $r^2 f''(r) + r f'(r) - n^2 f(r) = 0, n \in \mathbb{N}_0$  (Eulersche DGL).

Der Ansatz  $f(r) = r^\mu$  führt auf die charakteristische Gleichung:

$$\mu(\mu - 1) + \mu - n^2 = 0 \Rightarrow \mu^2 = n^2, n \in \mathbb{N}_0.$$

$$n = 0 \Rightarrow f_0(r) = c_0 + d_0 \ln r,$$

$$n \geq 1 \Rightarrow f_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}.$$

Damit erhalten wir insgesamt die allgemeine Lösung

$$v(r, \varphi) = c_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) (c_n r^n + \frac{d_n}{r^n})$$

1. Fall: Das Innere eines Kreises

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}.$$

$v$  muß für  $r = 0$  definiert sein  $\Rightarrow d_0 = 0, d_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , also

$$v(r, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n.$$

Randbedingung:  $v|_{\partial M} = v(R, \varphi) = h(R, \varphi) \Rightarrow$

$$v(R, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) R^n = h(R, \varphi)$$

$\Rightarrow h$  muß in eine Fourierreihe entwickelt werden. Sei also

$$h(R, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \Rightarrow \text{(Koeffizientenvergleich)}$$

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, a_n = \frac{A_n}{R^n}, b_n = \frac{B_n}{R^n}, \text{ also}$$

$$v(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

ist Lösung des Dirichlet-Problems im Innern des Kreises mit Radius  $R$ , falls  $A_n, B_n$  die Fourierkoeffizienten der Randfunktion  $h(R, \varphi)$  sind.

2. Fall: Das Äußere eines Kreises

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \geq R^2 \right\}.$$

$v$  soll für  $r \rightarrow \infty$  beschränkt sein  $\Rightarrow d_0 = 0, c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , also

$$v(r, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \frac{1}{r^n}.$$

Randbedingung:  $v|_{\partial M} = v(R, \varphi) = h(R, \varphi) \Rightarrow$

$$v(R, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \frac{1}{R^n} = h(R, \varphi).$$

$h$  muß wieder in eine Fourierreihe entwickelt werden. Sei also

$$h(R, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \Rightarrow \text{(Koeffizientenvergleich)}$$

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad a_n = A_n R^n, \quad b_n = B_n R^n, \quad \text{also}$$

$$v(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \left(\frac{R}{r}\right)^n$$

ist Lösung des Dirichlet-Problems im Äußeren des Kreises mit Radius  $R$ , falls  $A_n, B_n$  die Fourierkoeffizienten der Randfunktion  $h(R, \varphi)$  sind.

3. Fall: Kreisring

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2 \right\}.$$

In diesem Fall muß die allgemeine Lösung (vgl. S.578) benutzt werden. Mit Hilfe der beiden Randbedingungen  $v(R_1, \varphi) = h(R_1, \varphi), v(R_2, \varphi) = h(R_2, \varphi)$  können die Koeffizienten  $a_n, b_n, c_n, d_n$  bestimmt werden. Dazu müssen wieder die beiden Randfunktionen  $h(R_1, \varphi)$  und  $h(R_2, \varphi)$  in Fourierreihen entwickelt werden.

### Beispiel

$$\text{a) } \Delta u = 0, \quad u|_{\partial M} = 1 + y^2, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 4 \right\} \Rightarrow R = 2.$$

$$h(x, y) = 1 + y^2 \Rightarrow h(r, \varphi) = 1 + r^2 \sin^2 \varphi \Rightarrow$$

$$h(2, \varphi) = 1 + 4 \sin^2 \varphi = 1 + 2(1 - \cos 2\varphi) = 3 - 2 \cos 2\varphi \quad (\text{Fourierreihe von } h(2, \varphi)).$$

$$v(r, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n \quad \text{ist Lösung im Innern eines Kreises.}$$

Randbedingung:  $r = 2$ :

$$v(2, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) 2^n = 3 - 2 \cos 2\varphi,$$

Koeffizientenvergleich:

$$c_0 = 3, \quad a_2 \cdot 2^2 = -2, \quad a_n = 0 \text{ sonst}, \quad b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow c_0 = 3, \quad a_2 = -1/2$$

$$\Rightarrow v(r, \varphi) = 3 - \frac{1}{2} (\cos 2\varphi) r^2 = 3 - \frac{r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{2}$$

$\Rightarrow u(x, y) = 3 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$  ist die gesuchte Lösung.

b)  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{\partial M} = x^2 + y$ ,  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \geq 9 \right\} \Rightarrow R = 3$ .

$h(x, y) = x^2 + y \Rightarrow h(r, \varphi) = r^2 \cos^2 \varphi + r \sin \varphi \Rightarrow$

$h(3, \varphi) = 9 \cos^2 \varphi + 3 \sin \varphi = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \cos 2\varphi + 3 \sin \varphi$  (Fourierreihe von  $h(3, \varphi)$ ).

$v(r, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \frac{1}{r^n}$  ist Lösung im Äußeren eines Kreises.

Randbedingung:  $r = 3$ :

$v(3, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \frac{1}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \cos 2\varphi + 3 \sin \varphi$ ,

Koeffizientenvergleich:

$c_0 = \frac{9}{2}$ ,  $\frac{a_2}{9} = \frac{9}{2}$ ,  $\frac{b_1}{3} = 3$ , alle anderen  $a_n$  und  $b_n = 0$

$\Rightarrow c_0 = \frac{9}{2}$ ,  $a_2 = \frac{81}{2}$ ,  $b_1 = 9$

$\Rightarrow v(r, \varphi) = \frac{9}{2} + \frac{81}{2} (\cos 2\varphi) \frac{1}{r^2} + 9 (\sin \varphi) \frac{1}{r} = \frac{9}{2} + \frac{81}{2} \cdot \frac{r^2}{r^4} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \frac{9}{r^2} r \sin \varphi$

$\Rightarrow u(x, y) = \frac{9}{2} + \frac{81(x^2 - y^2)}{2(x^2 + y^2)^2} + \frac{9y}{x^2 + y^2}$  ist die gesuchte Lösung.

c)  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{R=1} = 1 + x$ ,  $u|_{R=2} = x$ ,  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$

$\Rightarrow R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

$h(1, \varphi) = 1 + \cos \varphi$ ,  $h(2, \varphi) = 2 \cos \varphi$  (Fourierreihen von  $h(1, \varphi)$  und  $h(2, \varphi)$ ).

$v(r, \varphi) = c_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) (c_n r^n + \frac{d_n}{r^n})$  ist Lösung im Kreisring.

Randbedingung:  $r = 1$  (innerer Rand):

$v(1, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) (c_n + d_n) = 1 + \cos \varphi$ ,

Koeffizientenvergleich:

$c_0 = 1$ ,  $a_1(c_1 + d_1) = 1$ ,  $a_n(c_n + d_n) = 0$  sonst,  $b_n(c_n + d_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Randbedingung:  $r = 2$  (äußerer Rand):

$v(2, \varphi) = c_0 + d_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) (c_n 2^n + \frac{d_n}{2^n}) = 2 \cos \varphi$ ,

Koeffizientenvergleich:

$c_0 + d_0 \ln 2 = 0$ ,  $a_1(2c_1 + \frac{d_1}{2}) = 2$ ,  $a_n(c_n 2^n + \frac{d_n}{2^n}) = 0$  sonst,

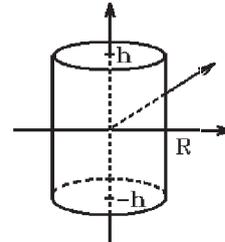
$b_n(c_n 2^n + \frac{d_n}{2^n}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_0 &= 1, d_0 = -\frac{1}{\ln 2}, a_1 d_1 = 0, a_1 c_1 = 1, \text{ alle anderen } a_n \text{ und } b_n = 0 \\ \Rightarrow v(r, \varphi) &= 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} + (\cos \varphi)r \\ \Rightarrow u(x, y) &= 1 - \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\ln 2} + x \text{ ist die gesuchte Lösung.} \end{aligned}$$

c) Zylinder in  $\mathbb{R}^3$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \overset{\circ}{M}, \quad u|_{\partial M} = h$$

$$\text{mit } M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2, -h \leq z \leq h \right\}.$$



Wir benutzen Zylinderkoordinaten:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ .  
Dann geht die Laplace-Gleichung für  $u(x, y, z) = v(r, \varphi, z)$  über in (vgl. S.276)

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} + v_{zz} = 0.$$

Der Separationsansatz  $v(r, \varphi, z) = f(r)g(\varphi)h(z)$  führt auf

$$f''(r)g(\varphi)h(z) + \frac{1}{r}f'(r)g(\varphi)h(z) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\varphi)h(z) + f(r)g(\varphi)h''(z) = 0.$$

Division durch  $f(r)g(\varphi)h(z)$  führt auf

$$\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{f'(r)}{rf(r)} + \frac{g''(\varphi)}{r^2g(\varphi)} = -\frac{h''(z)}{h(z)} = -\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$h''(z) - \lambda h(z) = 0 \quad (\text{DGL für } h(z)) \quad \text{und}$$

$$\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{f'(r)}{rf(r)} + \frac{g''(\varphi)}{r^2g(\varphi)} + \lambda = 0. \quad \text{Multiplikation mit } r^2 \text{ ergibt:}$$

$$\frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} + \lambda r^2 = -\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} = \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$(1) \quad g''(\varphi) + \mu g(\varphi) = 0, \quad 2\pi\text{-periodisch} \quad (\text{EWA für } g(\varphi))$$

$$(2) \quad h''(z) - \lambda h(z) = 0 \quad (\text{DGL für } h(z))$$

$$(3) \quad r^2 f''(r) + r f'(r) + (\lambda r^2 - \mu) f(r) = 0 \quad (\text{DGL für } f(r))$$

Zu (1): Die EW und EF der EWA sind (vgl. S.578)

$$\text{EW: } \mu_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{EF: } g_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi.$$

Zu (3): Für  $\mu_n = n^2$  lautet die DGL (3):

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + (\lambda r^2 - n^2) f(r) = 0.$$

Das ist für  $\lambda > 0$  die modifizierte Besselsche DGL (vgl. S.520) mit der allgemeinen

$$\text{Lösung: } f_n(r) = c_n J_n(\sqrt{\lambda}r) + d_n N_n(\sqrt{\lambda}r)$$

( $J_n$  Bessel-Funktionen und  $N_n$  Neumann-Funktionen).

Da  $f_n(r)$  für  $r = 0$  definiert sein muß  $\Rightarrow d_n = 0$  (da Neumann-Funktionen für  $r \rightarrow 0$  unbeschränkt)

$\Rightarrow f_n(r) = c_n J_n(\sqrt{\lambda}r)$  sind die Lösungen von (3) für  $\lambda > 0$ .

Zu (2): für  $\lambda > 0$  lautet die allgemeine Lösung:

$$h_\lambda(z) = c_\lambda e^{\sqrt{\lambda}z} + d_\lambda e^{-\sqrt{\lambda}z} .$$

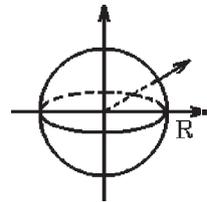
Damit erhalten wir insgesamt als allgemeine Lösung des Dirichlet-Problems für den Zylinder:

$$v(r, \varphi, z) = \sum_{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) (c_\lambda e^{\sqrt{\lambda}z} + d_\lambda e^{-\sqrt{\lambda}z}) J_n(\sqrt{\lambda}r)$$

Angleichung an die Randbedingung  $u|_{\partial M} = h$  schränkt die  $\lambda$ -Werte ein und bestimmt die Koeffizienten  $a_n, b_n, c_\lambda, d_\lambda$ .

**d) Kugel in  $\mathbb{R}^3$**

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \overset{\circ}{M}, \quad u|_{\partial M} = h$$



mit  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$ .

Wir benutzen Kugelkoordinaten:  $x = r \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = r \sin \psi$ .  
Dann geht die Laplace-Gleichung für  $u(x, y, z) = v(r, \varphi, \psi)$  über in (vgl. S.277)

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{2}{r}v_r + \frac{1}{r^2 \cos^2 \psi} v_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} v_{\psi\psi} - \frac{\tan \psi}{r^2} v_\psi = 0 .$$

Der Separationsansatz  $v(r, \varphi, \psi) = f(r)g(\varphi)h(\psi)$  führt nach Division durch  $f(r)g(\varphi)h(\psi)$  und Multiplikation mit  $r^2$  auf

$$\frac{r^2 f''(r) + 2r f'(r)}{f(r)} + \frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} + \frac{h''(\psi)}{h(\psi)} - \tan \psi \frac{h'(\psi)}{h(\psi)} = 0 .$$

Subtraktion des  $f(r)$ -Anteils auf beiden Seiten ergibt:

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} + \frac{h''(\psi)}{h(\psi)} - \tan \psi \frac{h'(\psi)}{h(\psi)} = -\frac{r^2 f''(r) + 2r f'(r)}{f(r)} = \lambda \in \mathbb{R} .$$

Hieraus erhalten wir die DGL für  $f(r)$ :

$$r^2 f''(r) + 2r f'(r) + \lambda f(r) = 0 \quad (\text{Eulersche DGL}) \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} + \frac{h''(\psi)}{h(\psi)} - \tan \psi \frac{h'(\psi)}{h(\psi)} - \lambda = 0 .$$

Multiplikation mit  $\cos^2 \psi$  ergibt:

$$\cos^2 \psi \frac{h''(\psi)}{h(\psi)} - \sin \psi \cos \psi \frac{h'(\psi)}{h(\psi)} - \lambda \cos^2 \psi = -\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} = \mu \in \mathbb{R} .$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$(1) \quad g''(\varphi) + \mu g(\varphi) = 0 \quad , \quad 2\pi\text{-periodisch} \quad (\text{EWA für } g(\varphi))$$

$$(2) \quad \cos^2 \psi h''(\psi) - \sin \psi \cos \psi h'(\psi) - (\lambda \cos^2 \psi + \mu)h(\psi) = 0$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \pm\pi/2} h(\psi) \text{ existiert} \quad (\text{EWA für } h(\psi))$$

$$(3) \quad r^2 f''(r) + 2r f'(r) + \lambda f(r) = 0 \quad (\text{Eulersche DGL für } f(r))$$

Zu (1): Die EW und EF der EWA sind (vgl. **S.578**)

EW:  $\mu_n = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , EF:  $g_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$ .

Zu (2): Diese EWA wollen wir nur für den *Spezialfall*  $\mu_0 = 0$  lösen, also  $\cos^2 \psi h''(\psi) - \sin \psi \cos \psi h'(\psi) - \lambda \cos^2 \psi h(\psi) = 0$ .

In Normalform lautet diese DGL

$$h''(\psi) - \frac{\sin \psi}{\cos \psi} h'(\psi) - \lambda h(\psi) = 0.$$

Die Substitution  $s = \sin \psi$  führt für  $h(\psi) = w(s)$  wegen

$h'(\psi) = w'(s) \cos \psi$ ,  $h''(\psi) = w''(s) \cos^2 \psi - w'(s) \sin \psi$  auf die DGL für  $w(s)$ :

$$\cos^2 \psi w''(s) - \sin \psi w'(s) - \sin \psi w'(s) - \lambda w(s) = 0 \Rightarrow (\text{mit } \sin \psi = s)$$

$$(1 - s^2)w''(s) - 2s w'(s) - \lambda w(s) = 0 \quad , \quad \lim_{s \rightarrow \pm 1} w(s) \text{ existiert,}$$

$$\left( \lim_{s \rightarrow \pm 1} w(s) = \lim_{\psi \rightarrow \pm\pi/2} h(\psi) \right).$$

Diese EWA ist *nichttrivial lösbar*, wenn  $\lambda_n = -n(n+1)$  (vgl. Literatur).

Damit erhalten wir die *Legendresche DGL* (vgl. **S.513**)

$$(1 - s^2)w''(s) - 2s w'(s) + n(n+1)w(s) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung:  $w_n(s) = c_n Y_{n,1}(s) + d_n Y_{n,2}(s)$  (vgl. **S.514**).

Also erhalten wir für  $h(\psi)$ :

$$h_n(\psi) = c_n Y_{n,1}(\sin \psi) + d_n Y_{n,2}(\sin \psi).$$

Zu (3): Diese DGL geht für  $\lambda_n = -n(n+1)$  über in die Eulersche DGL

$$r^2 f''(r) + 2r f'(r) - n(n+1)f(r) = 0.$$

Der Ansatz  $f(r) = r^\alpha$  führt auf das charakteristische Polynom:

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - n(n+1) = \alpha^2 + \alpha - n(n+1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha + 1) = n(n+1) \Rightarrow \alpha_1 = n, \alpha_2 = -(n+1)$$

$$\Rightarrow f_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}.$$

$$f_n(r) \text{ muß definiert sein für } r = 0 \Rightarrow b_n = 0$$

$$\Rightarrow f_n(r) = a_n r^n \text{ sind die Lösungen der DGL (3).}$$

Zusammen erhält man für den *Spezialfall*  $\mu_0 = 0$  die Lösung

$$v(r, \varphi, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n Y_{n,1}(\sin \psi) + d_n Y_{n,2}(\sin \psi)) r^n .$$

Insbesondere sind die *Legendre-Polynome* multipliziert mit  $r^n$ , also

$v_n = r^n L_n(\sin \psi)$ , Lösungen des Dirichlet-Problems für die Kugel.

Allgemein heißen die Lösungen von (1) und (2) (für die EW  $\lambda_n = -n(n+1)$ ) von (2)) *Kugelflächenfunktionen*  $n$ -ter Ordnung:  $Y_n(\varphi, \psi)$  (vgl. Literatur).

## Anwendung der Laplace-Transformation auf partielle DGL

Bei "günstigen" partiellen ARWA kann man die Lösung auch mit Hilfe der *Laplace-Transformation* bestimmen. Hierbei wendet man die *Laplace-Transformation* bzgl. der *Variablen*  $t$  an. Die Variable  $x$  wird dabei zunächst festgehalten.

Sei  $u(x, t)$  die gesuchte Lösung der ARWA, dann erhalten wir  $U(x, p)$  als Laplace-Transformierte von  $u$ , falls  $u$  Originalfunktion mit  $\sigma \geq 0$  ist:

(Eigenschaften der Laplace-Transformation vgl. Kapitel X, **S.330 ff**)

$$U(x, p) = L(u)(p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt \quad , \quad p > \sigma$$

Ist die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = \varphi_1(x)$  gegeben, so erhält man für die Laplace-Transformierte von  $u_t$ , falls  $u_t$  Originalfunktion ist:

$$L(u_t)(p) = pL(u)(p) - u(x, 0) = pU(x, p) - \varphi_1(x)$$

Ist auch noch eine Anfangsbedingung für  $u_t$  gegeben, also  $u_t(x, 0) = \varphi_2(x)$ , und ist auch  $u_{tt}$  Originalfunktion, so erhält man für die Laplace-Transformierte von  $u_{tt}$

$$L(u_{tt})(p) = p^2 L(u)(p) - pu(x, 0) - u_t(x, 0) = p^2 U(x, p) - p\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

Für  $L(u_x)$  gilt, falls Integration und Differentiation vertauschbar sind (was bei gleichmäßiger Konvergenz des Ableitungsintegrals der Fall ist):

$$L(u_x)(p) = \int_0^{\infty} u_x(x, t) e^{-pt} dt = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt = U_x(x, p), \text{ also}$$

$$L(u_x)(p) = U_x(x, p) \quad , \quad L(u_{xx})(p) = U_{xx}(x, p)$$

(die zweite Gleichung erhält man analog).

Sind zusätzlich *Randbedingungen* gegeben:  $u(0, t) = \psi_1(t)$ ,  $u(l, t) = \psi_2(t)$ , so gehen diese Randbedingungen über in die folgenden Randbedingungen für  $U(x, p)$ :

$$U(0, p) = \int_0^{\infty} u(0, t) e^{-pt} dt = L(\psi_1)(p)$$

$$U(l, p) = \int_0^{\infty} u(l, t) e^{-pt} dt = L(\psi_2)(p)$$

Damit geht eine partielle ARWA für  $u(x, t)$  nach Anwendung der Laplace-Transformation über in eine gewöhnliche RWA für  $U(x, p)$  (bei festgehaltenem  $p$ ). Ist  $U(x, p)$  die Lösung dieser gewöhnlichen RWA, so ist  $u(x, t) = L^{-1}(U(x, p))(t)$  die Lösung der ursprünglichen partiellen ARWA. Dieser Weg ist nur sinnvoll, wenn man die Rücktransformation ausführen kann.

Bevor wir Beispiele behandeln, zunächst eine kleine Tabelle wichtiger Laplace-Transformationen (vgl. **S.330 ff**):

$$L(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad , \quad p > 0 \quad ,$$

$$L(e^{\alpha t})(p) = \frac{1}{p - \alpha} \quad , \quad p > \alpha \quad ,$$

$$L(\cos \beta t)(p) = \frac{p}{p^2 + \beta^2} \quad , \quad L(\sin \beta t)(p) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \quad , \quad p > 0 \quad ,$$

$$L(e^{\alpha t} \cos \beta t)(p) = \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \quad , \quad L(e^{\alpha t} \sin \beta t)(p) = \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \quad , \quad p > \alpha \quad .$$

### Beispiel 1. Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) &= \psi_1(t) \quad , \quad u(l, t) = \psi_2(t) \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

Anwendung der Laplace-Transformation ergibt:

$$\begin{aligned} pU(x, p) - \varphi(x) &= a^2 U_{xx}(x, p) + L(f(x, t))(p) \quad (\text{Laplace-Transf. bzgl. } t \text{ anwenden}), \\ U(0, p) &= L(\psi_1)(p) \quad , \quad U(l, p) = L(\psi_2)(p) \quad (\text{Randbedingungen}). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gewöhnliche RWA für  $U(x, p)$  bzgl.  $x$ , falls die Variable  $p$  festgehalten wird:

$$\begin{aligned} U_{xx} - \frac{p}{a^2} U &= -\frac{1}{a^2} \varphi(x) - \frac{1}{a^2} L(f(x, t))(p) \\ U(0, p) &= L(\psi_1)(p) \quad , \quad U(l, p) = L(\psi_2)(p) \end{aligned}$$

Ist  $U(x, p)$  die Lösung dieser RWA, so ist  $u(x, t) = L^{-1}(U(x, p))(t)$  die gesuchte Lösung der ursprünglichen Wärmeleitungsgleichung.

### Beispiele hierzu

1. (vgl. **S.558** )

$$\left[ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + t^2 \sin 2x \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right]$$

$$\Rightarrow \quad U_{xx} - pU = -L(t^2)(p) \cdot \sin 2x = -\frac{2}{p^3} \sin 2x \quad ,$$

$$U(0, p) = L(0) = 0, \quad U(\pi, p) = L(0) = 0 \quad (\text{Randbedingungen}).$$

Allgemeine Lösung der DGL (bei festgehaltenem  $p > 0$ ):

$$\text{homogen: } U_h(x, p) = c_1 e^{\sqrt{p}x} + c_2 e^{-\sqrt{p}x},$$

*partikuläre Lösung:* Ansatz:  $U_0(x, p) = A \sin 2x$  (da nur gerade Ableitungen vorkommen und keine Resonanz vorliegt, genügt ein reiner  $\sin$ -Ansatz).

*Einsetzen und Division durch  $\sin 2x$  ergibt:*

$$-4A - pA = -\frac{2}{p^3} \Rightarrow A = \frac{2}{p^3(p+4)} \Rightarrow U_0(x, p) = \frac{2}{p^3(p+4)} \sin 2x$$

$$\Rightarrow U(x, p) = c_1 e^{\sqrt{p}x} + c_2 e^{-\sqrt{p}x} + \frac{2}{p^3(p+4)} \sin 2x \quad \text{ist allgemeine Lösung der DGL.}$$

*Randbedingungen:*

$$U(0, p) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow$$

$$U(x, p) = 2c_1 \sinh(\sqrt{p}x) + \frac{2}{p^3(p+4)} \sin 2x,$$

$$U(\pi, p) = 2c_1 \sinh(\sqrt{p}\pi) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow$$

$$U(x, p) = \frac{2}{p^3(p+4)} \sin 2x \quad \text{ist Lösung der RWA.}$$

$$u(x, t) = L^{-1}(U(x, p))(t) = \sin 2x L^{-1}\left(\frac{2}{p^3(p+4)}\right)(t) = \sin 2x \cdot (t^2 * e^{-4t})$$

*(Faltungseigenschaft)*

$$= \sin 2x \int_0^t u^2 e^{-4(t-u)} du = e^{-4t} \sin 2x \int_0^t u^2 e^{4u} du$$

$$= e^{-4t} \sin 2x \left( \frac{1}{32} (1 - 4t + 8t^2) e^{4t} - \frac{1}{32} \right)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{32} (1 - 4t + 8t^2 - e^{-4t}) \sin 2x$$

ist die gesuchte Lösung der ARWA.

2. (vgl. S.555)

$$\left[ \begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = x \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow U_{xx} - pU = -x \quad (\text{DGL für } U),$$

$$U(0, p) = L(0) = 0, \quad U(\pi, p) = L(0) = 0 \quad (\text{Randbedingungen}).$$

Allgemeine Lösung der DGL (bei festgehaltenem  $p > 0$ ):

$$\text{homogen: } U_h(x, p) = c_1 e^{\sqrt{p}x} + c_2 e^{-\sqrt{p}x},$$

$$\text{partikuläre Lösung: Ansatz: } U_0(x, p) = A + Bx$$

$$\Rightarrow -p(A + Bx) = -x \Rightarrow A = 0, \quad B = \frac{1}{p} \Rightarrow U_0(x, p) = \frac{x}{p}$$

$$\Rightarrow U(x, p) = c_1 e^{\sqrt{p}x} + c_2 e^{-\sqrt{p}x} + \frac{x}{p} \quad \text{ist allgemeine Lösung der DGL.}$$

Randbedingungen:

$$U(0, p) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow$$

$$U(x, p) = 2c_1 \sinh(\sqrt{p}x) + \frac{x}{p},$$

$$U(\pi, p) = 2c_1 \sinh(\sqrt{p}\pi) + \frac{\pi}{p} = 0 \Rightarrow 2c_1 = -\frac{\pi}{p \sinh(\sqrt{p}\pi)} \Rightarrow$$

$$U(x, p) = \frac{x}{p} - \frac{\pi \sinh(\sqrt{p}x)}{p \sinh(\sqrt{p}\pi)} \quad \text{ist Lösung der RWA.}$$

$$u(x, t) = xL^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)(t) - \pi L^{-1}\left(\frac{\sinh(\sqrt{p}x)}{p \sinh(\sqrt{p}\pi)}\right) \quad \text{mit} \quad L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)(t) = 1.$$

Die Inverse des zweiten Summanden können wir mit den bisher bekannten Methoden nicht berechnen. Wir benötigen hierzu Eigenschaften aus der "komplexen Analysis", die wir erst später behandeln werden.

In diesem Beispiel benutzt man besser die *Fouriermethode*.

### Beispiel 2. Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) &= \psi_1(t) \quad , \quad u(l, t) = \psi_2(t) \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \end{aligned}$$

Anwendung der Laplace-Transformation ergibt:

$$\begin{aligned} p^2 U(x, p) - p\varphi_1(x) - \varphi_2(x) &= a^2 U_{xx}(x, p) + L(f(x, t))(p) \quad , \\ U(0, p) &= L(\psi_1)(p) \quad , \quad U(l, p) = L(\psi_2)(p) \quad \text{(Randbedingungen)}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gewöhnliche RWA für  $U(x, p)$  bzgl.  $x$ , falls die Variable  $p$  festgehalten wird:

$$\begin{aligned} U_{xx} - \frac{p^2}{a^2} U &= -\frac{p}{a^2} \varphi_1(x) - \frac{1}{a^2} \varphi_2(x) - \frac{1}{a^2} L(f(x, t))(p) \\ U(0, p) &= L(\psi_1)(p) \quad , \quad U(l, p) = L(\psi_2)(p) \end{aligned}$$

Ist  $U(x, p)$  die Lösung dieser RWA, so ist  $u(x, t) = L^{-1}(U(x, p))(t)$  die gesuchte Lösung der ursprünglichen Schwingungsgleichung.

**Beispiel hierzu** (vgl. [S.564](#))

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} + t \sin \pi x \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0 \quad , \quad u(1, t) = t \\ u(x, 0) &= 4 \sin^3 \pi x \quad , \quad u_t(x, 0) = x \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_{xx} - \frac{p^2}{4} U = -p \sin^3 \pi x - \frac{x}{4} - \frac{1}{4p^2} \sin \pi x \quad \text{(DGL für } U),$$

$$U(0, p) = L(0)(p) = 0 \quad , \quad U(1, p) = L(t)(p) = \frac{1}{p^2} \quad \text{(Randbedingungen).}$$

Allgemeine Lösung der DGL (bei festgehaltenem  $p > 0$ ):

homogen:  $U_h(x, p) = c_1 e^{\frac{p}{2}x} + c_2 e^{-\frac{p}{2}x}$ ,

partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} \text{Rechte Seite} &= -p \sin^3 \pi x - \frac{x}{4} - \frac{1}{4p^2} \sin \pi x \\ &= -\frac{p}{4}(3 \sin \pi x - \sin 3\pi x) - \frac{x}{4} - \frac{1}{4p^2} \sin \pi x \\ &= -\frac{3p^3 + 1}{4p^2} \sin \pi x + \frac{p}{4} \sin 3\pi x - \frac{x}{4}. \end{aligned}$$

Ansatz für  $-\frac{3p^3 + 1}{4p^2} \sin \pi x$ :  $U_{0,1}(x, p) = A \sin \pi x$

Einsetzen und Division durch  $\sin \pi x$  ergibt:

$$-\pi^2 A - \frac{p^2}{4} A = -\frac{3p^3 + 1}{4p^2} \Rightarrow A = \frac{3p^3 + 1}{4p^2(\pi^2 + \frac{p^2}{4})} = \frac{3p^3 + 1}{p^2(4\pi^2 + p^2)}$$

$$\Rightarrow U_{0,1}(x, p) = \frac{3p^3 + 1}{p^2(4\pi^2 + p^2)} \sin \pi x.$$

Ansatz für  $\frac{p}{4} \sin 3\pi x$ :  $U_{0,2}(x, p) = A \sin 3\pi x$

Einsetzen und Division durch  $\sin 3\pi x$  ergibt:

$$-9\pi^2 A - \frac{p^2}{4} A = \frac{p}{4} \Rightarrow A = \frac{-p}{4(9\pi^2 + \frac{p^2}{4})} = \frac{-p}{36\pi^2 + p^2}$$

$$\Rightarrow U_{0,2}(x, p) = -\frac{p}{36\pi^2 + p^2} \sin 3\pi x.$$

Ansatz für  $-\frac{x}{4}$ :  $U_{0,3}(x, p) = A + Bx$

Einsetzen ergibt:

$$-\frac{p^2}{4}(A + Bx) = -\frac{x}{4} \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{p^2} \Rightarrow U_{0,3}(x, p) = \frac{x}{p^2}.$$

Also erhalten wir insgesamt die Lösung

$$U(x, p) = c_1 e^{\frac{p}{2}x} + c_2 e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{3p^3 + 1}{p^2(4\pi^2 + p^2)} \sin \pi x - \frac{p}{36\pi^2 + p^2} \sin 3\pi x + \frac{x}{p^2}.$$

Randbedingungen:

$$U(0, p) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow$$

$$U(x, p) = 2c_1 \sinh\left(\frac{p}{2}x\right) + \frac{3p^3 + 1}{p^2(4\pi^2 + p^2)} \sin \pi x - \frac{p}{36\pi^2 + p^2} \sin 3\pi x + \frac{x}{p^2},$$

$$U(1, p) = 2c_1 \sinh\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U(x, p) &= \frac{3p^3 + 1}{p^2(4\pi^2 + p^2)} \sin \pi x - \frac{p}{36\pi^2 + p^2} \sin 3\pi x + \frac{x}{p^2} \\ &= \frac{3p}{4\pi^2 + p^2} \sin \pi x + \frac{1}{p^2(4\pi^2 + p^2)} \sin \pi x - \frac{p}{36\pi^2 + p^2} \sin 3\pi x + \frac{x}{p^2} \end{aligned}$$

ist Lösung der RWA.

$$u(x, t) = 3L^{-1}\left(\frac{p}{4\pi^2 + p^2}\right) \sin \pi x + \frac{1}{2\pi}L^{-1}\left(\frac{1}{p^2} \cdot \frac{2\pi}{4\pi^2 + p^2}\right) \sin \pi x \\ - L^{-1}\left(\frac{p}{36\pi^2 + p^2}\right) \sin 3\pi x + x L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) \\ \Rightarrow u(x, t) = 3 \cos 2\pi t \sin \pi x + \frac{1}{2\pi}(t * \sin 2\pi t) \sin \pi x - \cos 6\pi t \sin 3\pi x + xt$$

mit  $t * \sin 2\pi t = \int_0^t (t-u) \sin 2\pi u \, du$

$$= (t-u) \frac{-\cos 2\pi u}{2\pi} \Big|_{u=0}^t - \int_0^t \frac{\cos 2\pi u}{2\pi} \, du = \frac{t}{2\pi} - \frac{\sin 2\pi u}{(2\pi)^2} \Big|_{u=0}^t \\ = \frac{1}{(2\pi)^2}(2\pi t - \sin 2\pi t) .$$

Also gilt:

$$u(x, t) = 3 \cos 2\pi t \sin \pi x - \cos 6\pi t \sin 3\pi x + \frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi t - \sin 2\pi t) \sin \pi x + xt$$

ist die gesuchte Lösung der ARWA.

### Beispiel 3. Potentialgleichung

$$u_{xx} + u_{tt} = 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x} \quad , \quad u_t(x, 0) = e^{-2x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$$

Anwendung der Laplace-Transformation ergibt:

$$U_{xx} + p^2 U - pu(x, 0) - u_t(x, 0) = 0 \\ \Rightarrow U_{xx} + p^2 U = pe^{-x} + e^{-2x} \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, p) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} \, dt = \int_0^\infty \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) e^{-pt} \, dt = 0 \\ \text{(falls Limes und Integration vertauschbar)}$$

$$\Rightarrow U(x, p) = c_1 \cos px + c_2 \sin px + \frac{p}{1+p^2} e^{-x} + \frac{1}{4+p^2} e^{-2x}$$

ist allgemeine Lösung für  $p > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, p) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0 \\ \Rightarrow U(x, p) = \frac{p}{1+p^2} e^{-x} + \frac{1}{4+p^2} e^{-2x}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \cos t e^{-x} + \frac{1}{2} \sin 2t e^{-2x}$$

ist eine Lösung des gegebenen Problems.

## Unendlich ausgedehnte Probleme, Fourier-Transformation

**Beispiel:** *Wärmeleitungsgleichung* in einem unendlich ausgedehnten Stab

$$\begin{aligned}
 u_t &= a^2 u_{xx} \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 \\
 u(0, t) &= 0 \quad , \quad u(x, t) \text{ beschränkt für } x \rightarrow \infty && \text{(Randbedingungen)} \\
 u(x, 0) &= \varphi(x) && \text{(Anfangsbedingung)}
 \end{aligned}$$

Der *Produktansatz*  $u(x, t) = f(x)g(t)$  führt auf

$$f(x)g'(t) = a^2 f''(x)g(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^2} \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f''(x) + \lambda f(x) &= 0 \quad , \quad (x > 0) \quad , \\
 f(0) &= 0 \quad , \quad f(x) \text{ beschränkt für } x \rightarrow \infty \quad , \quad \text{(EWA)}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad g'(t) + \lambda a^2 g(t) = 0$$

*Zu (1):* Der Ansatz  $f(x) = e^{\mu x}$  führt auf das charakteristische Polynom  $\mu^2 = -\lambda$ .

*1.Fall:*  $\lambda = 0$ :  $\Rightarrow f(x) = c_1 + c_2 x$  ,  
 $f(0) = c_1 = 0$  ,  $f(x)$  beschränkt für  $x \rightarrow \infty \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$  .

*2.Fall:*  $\lambda < 0$ :  $\Rightarrow f(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$  ,  
 $f(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow f(x) = 2c_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}x)$  ,  
 $f(x)$  beschränkt für  $x \rightarrow \infty \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$  .

*3.Fall:*  $\lambda > 0$ :  $\Rightarrow f(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$  ,  
 $f(0) = c_1 = 0$  ,  $f(x)$  beschränkt für  $x \rightarrow \infty \Rightarrow c_2 \in \mathbb{R}$  beliebig.

Also gilt: Alle  $\lambda > 0$  sind EW der EWA.

Schreiben wir anstelle von  $\lambda \rightarrow \lambda^2$ , so gilt:

Alle  $\lambda > 0$  sind EW der EWA mit den zugehörigen Eigenfunktionen:  
 $f_\lambda(x) = c_\lambda \sin \lambda x$  .

*Zu (2):*  $g'(t) + (\lambda a)^2 g(t) = 0 \Rightarrow g_\lambda(t) = d_\lambda e^{-(\lambda a)^2 t}$  .

Zusammen erhalten wir dann:

$$u_\lambda(x, t) = c(\lambda) e^{-(\lambda a)^2 t} \sin \lambda x \quad , \quad \lambda > 0 \quad ,$$

sind Lösungen der partiellen DGL einschließlich der Randbedingungen.

Damit auch die Anfangsbedingung erfüllt wird, müssen wir wieder alle Lösungen "aufaddieren". Da aber nun  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  , also nicht mehr abzählbar , geht die Summe in ein Integral über. Also gilt:

$$u(x, t) = \int_0^\infty c(\lambda) e^{-(\lambda a)^2 t} \sin \lambda x \, d\lambda$$

ist Lösung der partiellen DGL einschließlich der Randbedingungen, falls das uneigentliche Integral existiert und 2-mal nach  $x$  und 1-mal nach  $t$  differenzierbar ist.

*Anpassung an die Anfangsbedingung:*

Es muß gelten:

$$u(x, 0) = \int_0^\infty c(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda = \varphi(x).$$

Bei Problemen mit endlicher Ausdehnung (Länge  $l$ ) wurde nun die Funktion  $\varphi$  als  $2l$ -periodische Funktion in eine Fourierreihe entwickelt. Analog müssen wir nun die *Fourier-Transformierte* von  $\varphi$  bilden. Wir erhalten dann, wie wir gleich zeigen werden:

$$c(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(s) \sin \lambda s \, ds.$$

Damit ist

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \varphi(s) \sin \lambda s \, ds \right) e^{-(\lambda a)^2 t} \sin \lambda x \, d\lambda$$

die gesuchte Lösung.

### Fourier-Transformation

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *stückweise stetig* und *stückweise glatt*,  $2l$ -periodisch,

$f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$  an den Sprungstellen. Unter diesen Voraussetzungen ist die Fourierreihe von  $f$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gleich der Funktion  $f$  (vgl. S.311). Also gilt (mit der komplexen Darstellung der Fourierreihe (vgl. S.318)):

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{l} x} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{k\pi}{l} t} \, dt.$$

Mit  $\Delta s = \frac{\pi}{l}$  gilt dann

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-l}^l f(t) e^{-i(k\Delta s)t} \, dt \right) e^{i(k\Delta s)x} \cdot \Delta s.$$

Ist  $f$  *nicht periodisch*, also  $l \rightarrow \infty$ , so müssen wir  $\Delta s \rightarrow 0$  gehen lassen. Obige

Summe ist von der Form:  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k\Delta s) \Delta s$ . Für  $\Delta s \rightarrow 0$  gilt (unter gewissen

Voraussetzungen an die Funktion  $h$ ):  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k\Delta s) \Delta s = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) \, ds$ .

Also gilt (unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion  $f$ ) für  $\Delta s \rightarrow 0$ :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} \, dt \right) e^{isx} \, ds.$$

Mit  $F(f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt$  (Fourier-Transformierte von  $f$ ) folgt hieraus:  
 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)(s)e^{isx} ds.$

**Definition 15.3 :** *Fourier-Transformation*

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig und stückweise glatt,  $f(t_0) = \frac{1}{2}(f(t_0+) + f(t_0-))$  an den Sprungstellen,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  konvergent.

Dann heißt

$$F(f(t))(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt$$

die *Fourier-Transformierte* von  $f$ .

Für die *inverse Fourier-Transformation* gilt dann die *Umkehrformel*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)(s)e^{ist} ds$$

**Bemerkung 1. :** Die Voraussetzungen der Definition 15.3 sollen ab jetzt immer erfüllt sein.

**Bemerkung 2. :** Die Voraussetzungen der Definition 15.3 sind *hinreichend* für die Existenz der Fourier-Transformation, aber nicht notwendig (d.h.: es existieren Funktionen, deren Fourier-Transformation existiert, die aber die Voraussetzungen der Definition 15.3 nicht erfüllen).

**Bemerkung 3. :** Das Integral der Umkehrformel kann divergent sein. In diesem Fall ist der *Cauchysche Hauptwert*  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(f)(s)e^{ist} ds$  gemeint.

**Bemerkung 4. :** Die rechte Seite der Umkehrformel ist wieder eine Fourier-Transformation, denn:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)(s)e^{ist} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)(s)e^{-i(-t)s} ds = \frac{1}{2\pi} F(F(f))(-t).$$

Damit erhält man, indem man  $(-t)$  durch  $s$  ersetzt:

$$\mathbf{15.4:} \quad F(F(f))(s) = 2\pi f(-s)$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man sehr einfach die Fourier-Transformierte von  $F(f)$  bestimmen.

### 15.5 Spezialfälle

Ist  $f$  eine *gerade* Funktion, so ist auch  $F(f)$  eine *gerade* Funktion, und es gilt:

$$F(f)(s) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos st \, dt \quad , \quad f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(f)(s) \cos st \, ds$$

Ist  $f$  eine *ungerade* Funktion, so ist auch  $F(f)$  eine *ungerade* Funktion, und es gilt:

$$F(f)(s) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin st \, dt \quad , \quad f(t) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F(f)(s) \sin st \, ds$$

*Beweis :*

$$\begin{aligned} F(f)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos st - i \sin st) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st \, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st \, dt \\ &= \begin{cases} 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos st \, dt & \text{, falls } f \text{ gerade} \\ -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin st \, dt & \text{, falls } f \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

(Ist  $f$  gerade  $\Rightarrow f(t) \sin st$  ungerade und damit  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st \, dt = 0$  ,

ist  $f$  ungerade  $\Rightarrow f(t) \cos st$  ungerade und damit  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st \, dt = 0$ ).

Hieraus folgt: ist  $f$  gerade  $\Rightarrow F(f)$  ist gerade; ist  $f$  ungerade  $\Rightarrow F(f)$  ist ungerade.

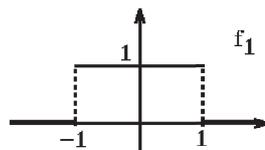
Mit Hilfe der Umkehrformel erhält man:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)(s) e^{ist} \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)(s) (\cos st + i \sin st) \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)(s) \cos st \, ds + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)(s) \sin st \, ds \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(f)(s) \cos st \, ds & \text{, falls } F \text{ gerade} \\ \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F(f)(s) \sin st \, ds & \text{, falls } F \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

### Beispiele

1.

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } |t| < 1 \\ 0 & \text{, falls } |t| > 1 \end{cases}$$



An den Sprungstellen soll gelten:  $f_1(-1) = f_1(1) = 1/2$

$\Rightarrow f_1$  ist gerade Funktion.

$$F(f_1)(s) = 2 \int_0^{\infty} f_1(t) \cos st \, dt = 2 \int_0^1 \cos st \, dt = 2 \left. \frac{\sin st}{s} \right]_{t=0}^1 = 2 \frac{\sin s}{s} .$$

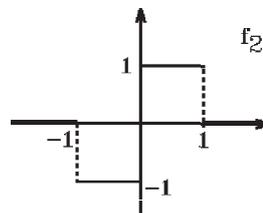
Aus 15.4 folgt  $F\left(\frac{\sin t}{t}\right)(s) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi f_1(-s) = \pi f_1(s)$  (da  $f_1$  gerade).

Also erhalten wir für die obige Funktion  $f_1$ :

$$F(f_1)(s) = 2 \frac{\sin s}{s} \quad , \quad F\left(\frac{\sin t}{t}\right)(s) = \pi f_1(s)$$

2.

$$f_2(t) = \begin{cases} -1 & , \text{falls } -1 < t < 0 \\ 1 & , \text{falls } 0 < t < 1 \\ 0 & , \text{falls } |t| > 1 \end{cases}$$



An den Sprungstellen soll gelten:  $f_2(-1) = -1/2$  ,  $f_2(0) = 0$  ,  $f_2(1) = 1/2$

$\Rightarrow f_2$  ist ungerade Funktion.

$$F(f_2)(s) = -2i \int_0^{\infty} f_2(t) \sin st \, dt = -2i \int_0^1 \sin st \, dt = 2i \left. \frac{\cos st}{s} \right]_{t=0}^1 = 2i \frac{\cos s - 1}{s} .$$

Aus 15.4 folgt  $F\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right)(s) = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi f_2(-s) = -i\pi f_2(-s) = \pi i f_2(s)$   
(da  $f_2$  ungerade).

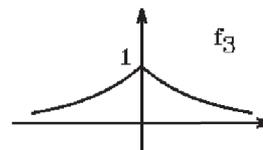
Also erhalten wir für die obige Funktion  $f_2$ :

$$F(f_2)(s) = 2i \frac{\cos s - 1}{s} \quad , \quad F\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right)(s) = \pi i f_2(s)$$

*Bemerkung:* In diesem Fall existiert das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t - 1}{t} \cos st \, dt$  nur als *Cauchyscher Hauptwert* (in diesem Fall = 0, da der Integrand ungerade ist).

3.

$$f_3(t) = e^{-|t|}$$



$\Rightarrow f_3$  ist gerade Funktion.

$$\begin{aligned}
 F(f_3)(s) &= 2 \int_0^\infty e^{-t} \cos st \, dt = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-t} e^{ist} \, dt = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{(-1+is)t} \, dt \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left. \frac{e^{(-1+is)t}}{-1+is} \right]_{t=0}^\infty = 2 \operatorname{Re} \frac{1}{1-is} = 2 \operatorname{Re} \frac{1+is}{1+s^2} = \frac{2}{1+s^2}.
 \end{aligned}$$

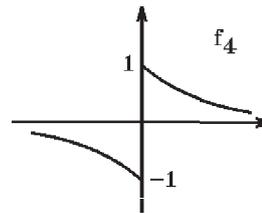
Aus 15.4 folgt  $F\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(s) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi f_3(-s) = \pi f_3(s) = \pi e^{-|s|}$  (da  $f_3$  gerade).

Also erhalten wir für die obige Funktion  $f_3(t) = e^{-|t|}$ :

$$\boxed{F(e^{-|t|})(s) = \frac{2}{1+s^2}, \quad F\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(s) = \pi e^{-|s|}}$$

4.

$$f_4(t) = \begin{cases} -e^{-t} & , \text{falls } t < 0 \\ 0 & , \text{falls } t = 0 \\ e^{-t} & , \text{falls } t > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow f_4$  ist ungerade Funktion.

$$\begin{aligned}
 F(f_4)(s) &= -2i \int_0^\infty e^{-t} \sin st \, dt = -2i \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-t} e^{ist} \, dt = -2i \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{(-1+is)t} \, dt \\
 &= -2i \operatorname{Im} \left. \frac{e^{(-1+is)t}}{-1+is} \right]_{t=0}^\infty = -2i \operatorname{Im} \frac{1}{1-is} = -2i \operatorname{Im} \frac{1+is}{1+s^2} = \frac{-2is}{1+s^2}.
 \end{aligned}$$

Aus 15.4 folgt  $F\left(\frac{t}{1+t^2}\right)(s) = \frac{-1}{2i} \cdot 2\pi f_4(-s) = \pi i f_4(-s) = -\pi i f_4(s)$   
(da  $f_4$  ungerade).

Also erhalten wir für die obige Funktion  $f_4(t)$ :

$$\boxed{F(f_4)(s) = \frac{-2is}{1+s^2}, \quad F\left(\frac{t}{1+t^2}\right)(s) = -\pi i f_4(s)}$$

5.

$$\boxed{F(e^{-t^2})(s) = \sqrt{\pi} e^{-s^2/4}}$$

denn:  $F(e^{-t^2})(s) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} \cos st \, dt = \sqrt{\pi} e^{-s^2/4}$  (vgl. Beispiel 2, S.268).  
(da  $f$  gerade)

**Definition 15.6 :** *Faltung*

$$\boxed{(f * g)(t) := \int_{-\infty}^\infty f(t-u)g(u) \, du}$$

heißt die *Faltung* von  $f$  und  $g$ , falls das uneigentliche Integral konvergent ist.

Analog zur Faltung bei der Laplace-Transformation gilt auch hier:

$$f * g = g * f .$$

Wir werden nun die wichtigsten Eigenschaften der Fourier-Transformation im folgenden Satz zusammenfassen. Dabei sollen alle beteiligten Funktionen die Voraussetzungen von Definition 15.3 erfüllen.

**Satz 15.7 :** *Eigenschaften der Fourier-Transformation*

- a)  $F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$  ,  $F(\alpha f) = \alpha F(f)$  ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  , (Linearität).
- b)  $F(f(\alpha t))(s) = \frac{1}{|\alpha|} F(f(t))\left(\frac{s}{\alpha}\right)$  , ( $\alpha \neq 0$ ) (Streckungseigenschaft).
- c)  $F(f(t + \alpha))(s) = e^{i\alpha s} F(f(t))(s)$  (Verschiebungseigenschaft).
- d)  $F(e^{-i\alpha t} f(t))(s) = F(f(t))(s + \alpha)$  .
- e)  $F(f'(t))(s) = is F(f(t))(s)$  (falls zusätzlich  $f$  stetig in  $\mathbb{R}$ ).
- f)  $F(f''(t))(s) = -s^2 F(f(t))(s)$  (falls zusätzlich  $f, f'$  stetig in  $\mathbb{R}$ ).
- g)  $F(t^n f(t))(s) = i^n \frac{d^n}{ds^n} (F(f(t))(s))$  .
- h)  $F(f_1 * f_2) = F(f_1) \cdot F(f_2)$  (Faltungseigenschaft).
- i)  $F(f_1 \cdot f_2)(s) = \frac{1}{2\pi} (F(f_1) * F(f_2))(s)$  .

*Beweis :*

Zu a) wegen der Linearität des Integrals gilt a).

Zu b) sei  $\alpha > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(f(\alpha t))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-is(u/\alpha)} \cdot \frac{1}{\alpha} du \\ &\quad \text{(Substitution } u = \alpha t \text{ , } dt = \frac{1}{\alpha} du) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(s/\alpha)u} du = \frac{1}{\alpha} F(f(t))\left(\frac{s}{\alpha}\right) . \end{aligned}$$

Für  $\alpha < 0$  werden bei der Substitution die Grenzen vertauscht, beim Zurücktauschen erhalten wir als Vorfaktor  $-\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|}$  (da  $\alpha < 0$ ).

Zu c)

$$\begin{aligned} F(f(t + \alpha))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \alpha) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-is(u-\alpha)} du = e^{i\alpha s} F(f(t))(s) . \\ &\quad \text{(Substitution } u = t + \alpha \text{ , } dt = du) \end{aligned}$$

Zu d)

$$F(e^{-i\alpha t} f(t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(s+\alpha)t} dt = F(f(t))(s + \alpha) .$$

Zu e)

$$F(f'(t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-ist} dt = \underbrace{f(t)e^{-ist}}_{=0} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} + is \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt$$

$$= isF(f(t))(s) . \quad (\text{da } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0)$$

Zu f)

$$F(f''(t))(s) = isF(f'(t))(s) = (is)(is)F(f(t))(s) = -s^2F(f(t))(s) .$$

Zu g) Induktion über  $n \in \mathbb{N}$ :

$n = 1$ :

$$\frac{d}{ds} \left( F(f(t))(s) \right) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-ist} dt = -iF(tf(t))(s)$$

(das Ableitungsintegral ist gleichmäßig konvergent, falls die Funktion  $tf(t)$  die Voraussetzungen von Definition 15.3 erfüllt, also  $\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)| dt$  konvergent ist)

$$\Rightarrow F(tf(t))(s) = iF'(f(t))(s) ,$$

$n \rightarrow n + 1$ :

$$F(t^{n+1}f(t))(s) = F(t \cdot t^n f(t))(s) = i \frac{d}{ds} F(t^n f(t))(s) = i^{n+1} \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}} F(f(t))(s) .$$

Zu h)

$$F(f_1 * f_2)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u) du \right) e^{-ist} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u) e^{-ist} dt du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v)f_2(u) e^{-is(v+u)} dv du$$

(Substitution  $v = t - u$  ,  $dt = dv$ )

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v)e^{-isv} dv \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-isu} du = F(f_1)(s) \cdot F(f_2)(s) .$$

Zu i)

Sei  $F(f_1) = F_1$  ,  $F(f_2) = F_2$  (jeweils die Fourier-Transformierte), dann folgt aus 15.4

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} F(F_1)(-t) , \quad f_2(t) = \frac{1}{2\pi} F(F_2)(-t)$$

$$\Rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( F(F_1)(-t) \cdot F(F_2)(-t) \right) = \frac{1}{(2\pi)^2} F(F_1 * F_2)(-t)$$

$\Rightarrow$  (wieder mit 15.4):

$$F(f_1 \cdot f_2)(s) = \frac{1}{(2\pi)^2} F(F((F_1 * F_2)(-t)))(s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot 2\pi(F_1 * F_2)(s) = \frac{1}{2\pi} (F_1 * F_2)(s) .$$

## Beispiele

1. Zu b)

$$F\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right)(s) = \frac{1}{a^2} F\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}\right)(s) = \frac{1}{a^2} \cdot aF\left(\frac{1}{1 + t^2}\right)(as) = \frac{\pi}{a} e^{-a|s|} \Rightarrow$$

$$F\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right)(s) = \frac{\pi}{a} e^{-a|s|} \quad , \quad a > 0$$

2. Zu c)

$$F\left(\frac{1}{t^2 + 2t + 5}\right)(s) = F\left(\frac{1}{(t+1)^2 + 4}\right)(s) = e^{is} F\left(\frac{1}{4 + t^2}\right)(s) = \frac{\pi}{2} e^{is} e^{-2|s|}.$$

3. Zu d)

$$F(f(t) \cos at)(s) = F\left(\frac{1}{2}f(t)(e^{iat} + e^{-iat})\right)(s) = \frac{1}{2}\left(F(f)(s-a) + F(f)(s+a)\right) \Rightarrow$$

$$F(f(t) \cos at)(s) = \frac{1}{2}\left(F(f)(s-a) + F(f)(s+a)\right)$$

$$F(f(t) \sin at)(s) = \frac{1}{2i}\left(F(f)(s-a) - F(f)(s+a)\right)$$

(2. Gleichung analog).

4. Zu e)

$$F\left(\frac{t}{(a^2 + t^2)^2}\right)(s) = -\frac{1}{2}F\left(\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right)'\right)(s) = -\frac{1}{2}isF\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right)(s) = -\frac{i\pi}{2a}se^{-a|s|} \Rightarrow$$

$$F\left(\frac{t}{(a^2 + t^2)^2}\right)(s) = -\frac{i\pi}{2a}se^{-a|s|}, \quad a > 0$$

5. Zu g)

$$F(te^{-|t|})(s) = iF'(e^{-|t|})(s) = i\left(\frac{2}{1+s^2}\right)' = \frac{-4is}{(1+s^2)^2} \Rightarrow$$

$$F(te^{-|t|})(s) = \frac{-4is}{(1+s^2)^2}$$

6. Zu g)

$$F(t^2 e^{-t^2})(s) = i^2 F''(e^{-t^2})(s) = -\sqrt{\pi}\left(e^{-s^2/4}\right)'' = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{s^2}{2}\right)e^{-s^2/4}.$$

7. Zu i)

$$F\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)(s) = \frac{1}{2\pi}\left(F\left(\frac{\sin t}{t}\right) * F\left(\frac{\sin t}{t}\right)\right)(s) = \frac{1}{2\pi}(\pi f_1(s) * \pi f_1(s))$$

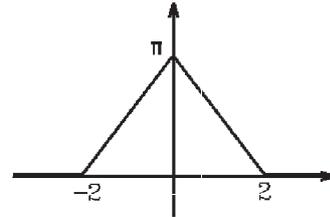
$$\text{mit } f_1(s) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |s| < 1 \\ 0, & \text{falls } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{vgl. Beispiel 1. S.593/594})$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)(s) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(w)f_1(s-w) dw = \frac{\pi}{2} \int_{s-1}^{s+1} f_1(w) dw$$

$$\text{da } f_1(s-w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |w-s| < 1 \\ 0, & \text{falls } |w-s| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } s-1 < w < s+1 \\ 0, & \text{falls } w < s-1 \text{ oder } w > s+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)(s) = \frac{\pi}{2} \int_{s-1}^{s+1} f_1(w) dw = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \int_{s-1}^1 dw & , \text{falls } -1 \leq s-1 \leq 1 \\ \int_{-1}^{s+1} dw & , \text{falls } -1 \leq s+1 \leq 1 \\ 0 & , \text{falls } s-1 > 1 \\ & \text{oder } s+1 < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)(s) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 2+s & , \text{falls } -2 \leq s \leq 0 \\ 2-s & , \text{falls } 0 \leq s \leq 2 \\ 0 & , \text{falls } |s| > 2 . \end{cases}$$



## Anwendung der Fourier-Transformation auf partielle DGL

**Beispiel 1.:** *Wärmeleitungsgleichung* in einem unendlich ausgedehnten Stab

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} & , \quad x > 0 , \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0 , \quad u(x, t) \text{ beschränkt für } x \rightarrow \infty & \quad (\text{Randbedingungen}) \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & \quad (\text{Anfangsbedingung}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_0^\infty c(\lambda) e^{-(\lambda a)^2 t} \sin \lambda x \, d\lambda \quad (\text{vgl. S.590})$$

$$\text{mit } u(x, 0) = \int_0^\infty c(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda = \varphi(x) .$$

Das ist (bis auf den Faktor  $(-2i)$ ) die  $\sin$ -Fourier-Transformierte von  $c(\lambda)$ , also

$$F(c(\lambda))(s) = -2i \int_0^\infty c(\lambda) \sin \lambda s \, d\lambda = -2i\varphi(s) \quad (\text{vgl. S.593}) .$$

Die Umkehrformel ergibt dann (vgl. S.593)

$$c(\lambda) = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty (-2i\varphi(s)) \sin \lambda s \, ds = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(s) \sin \lambda s \, ds \quad (\text{vgl. S.591}) .$$

Damit lautet die Lösung des obigen Problems:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \varphi(s) \sin \lambda s \, ds \right) e^{-(\lambda a)^2 t} \sin \lambda x \, d\lambda .$$

Man kann diese Lösung auch auf folgendem Weg erhalten:

Wendet man auf die Lösung der partiellen DGL die *Fourier-Transformation* bzgl. der Variablen  $x$  an (dabei wird die Variable  $t$  festgehalten), so erhält man:

$$U(s, t) := F(u(x, t))(s) = \int_{-\infty}^\infty u(x, t) e^{-isx} \, dx ,$$

$$U(s, 0) = \int_{-\infty}^\infty u(x, 0) e^{-isx} \, dx = F(\varphi(x))(s) ,$$

dabei muß  $\varphi$  nach  $(-\infty, 0)$  *ungerade* fortgesetzt werden, damit man eine  $\sin$ -Fourier-Transformierte erhält.

$$F(u_t(x, t))(s) = \int_{-\infty}^\infty u_t(x, t) e^{-isx} \, dx = U_t(s, t) \quad (\text{falls Differentiation nach } t \text{ erlaubt}),$$

$$F(u_{xx}(x, t))(s) = -s^2 F(u(x, t))(s) = -s^2 U(s, t) \quad (\text{vgl. Eigenschaft f), S.596}).$$

Aus der partiellen DGL  $u_t = a^2 u_{xx}$  wird dann

$$U_t + (as)^2 U = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL (bei festgehaltenem  $s$ ) lautet:

$$U(s, t) = c(s)e^{-(as)^2 t} .$$

$$U(s, 0) = c(s) = F(\varphi)(s) \Rightarrow U(s, t) = F(\varphi)(s)e^{-(as)^2 t} .$$

Mit Hilfe der Umkehrformel erhalten wir hieraus die Lösung des obigen Problems:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\varphi)(s)e^{-(as)^2 t} e^{isx} ds$$

( $u$  muß 2-mal nach  $x$  und 1-mal nach  $t$  stetig differenzierbar sein, und die Fourier-Transformation von  $\varphi$  muß existieren).

Die Randbedingung " $u(0, t) = 0$ " ist erfüllt, da  $\varphi$  ungerade, denn dann ist auch  $F(\varphi)$  ungerade, und es gilt:

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\varphi)(s)e^{-(as)^2 t} ds = 0 .$$

Die Randbedingung " $u$  beschränkt für  $x \rightarrow \infty$ " ist erfüllt, falls  $F(\varphi)$  die Voraussetzungen von Definition 15.3 erfüllt (denn  $|e^{isx}| = 1$ ).

Da die rechte Seite der Lösung (mit  $e^{isx} = e^{-i(-x)s}$ ) wieder eine Fourier-Transformation ist, folgt für die Lösung, falls jeweils die Fourier-Transformationen existieren:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} F\left(F(\varphi)(s)e^{-(as)^2 t}\right)(-x)$$

(hierbei wird die Variable  $t$  bei der Bildung der Fourier-Transformation festgehalten).

### Beispiel hierzu

$$\left[ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \quad , \quad u \text{ beschränkt für } x \rightarrow \infty \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ falls } x > 1 \end{cases} \end{array} \right]$$

$$\varphi \text{ ungerade fortsetzen} \Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ falls } -1 < x < 0 \\ 1 & , \text{ falls } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ falls } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(\varphi(x))(s) = 2i \frac{\cos s - 1}{s} \quad (\text{vgl. Beispiel 2, S.594})$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\pi} F\left(2i \frac{\cos s - 1}{s} e^{-s^2 t}\right)(-x) = \frac{i}{\pi} (-2i) \int_0^{\infty} \frac{\cos s - 1}{s} e^{-s^2 t} \sin(-x)s ds$$

(da ungerade Funktion)

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos s}{s} e^{-s^2 t} \sin xs ds \quad \text{ist die gesuchte Lösung.}$$

Das Integral selbst und die Integrale über die partiellen Ableitungen nach  $t$  bzw. 2-mal nach  $x$  sind gleichmäßig konvergent für  $x \geq 0$  ,  $t \geq \alpha > 0$  , denn:

$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \cos s}{s} = 0$  und  $\left| \frac{1 - \cos s}{s} \right| \leq K$ ,  $|\sin xs| \leq 1 \quad \forall x, s \geq 0$ ,  
 $e^{-s^2 t} \leq e^{-s^2 \alpha} \quad \forall t \geq \alpha$ ,  $\int_0^\infty s^k e^{-s^2 \alpha} ds$  konvergent für  $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}_0$ .  
 Also ist  $u$  2-mal nach  $x$  und 1-mal nach  $t$  stetig partiell differenzierbar.

**Beispiel 2.**

$$\begin{aligned}
 u_t &= a^2 u_{xx} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad t > 0 \\
 u(x, t) &\text{ beschränkt für } x \rightarrow \pm\infty \\
 u(x, 0) &= \varphi(x)
 \end{aligned}$$

Anwendung der *Fourier-Transformation* bzgl. der Variablen  $x$  ergibt:

$$F(u_t) = a^2 F(u_{xx}) \Rightarrow U_t = -(as)^2 U \Rightarrow U_t + (as)^2 U = 0 .$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL (bei festgehaltenem  $s$ ) lautet:

$$U(s, t) = c(s) e^{-(as)^2 t} .$$

$$U(s, 0) = c(s) = F(\varphi)(s) \Rightarrow U(s, t) = F(\varphi)(s) e^{-(as)^2 t} .$$

Mit Hilfe der Umkehrformel erhalten wir hieraus die Lösung des obigen Problems:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\varphi)(s) e^{-(as)^2 t} e^{isx} ds$$

( $u$  muß 2-mal nach  $x$  und 1-mal nach  $t$  stetig partiell differenzierbar sein, und die Fourier-Transformation von  $\varphi$  muß existieren).

Die Randbedingung "  $u$  beschränkt für  $x \rightarrow \pm\infty$  " ist erfüllt, falls  $F(\varphi)$  die Voraussetzungen von Definition 15.3 erfüllt.

Da die rechte Seite der Lösung (mit  $e^{isx} = e^{-i(-x)s}$ ) wieder eine Fourier-Transformation ist, folgt für die Lösung, falls jeweils die Fourier-Transformationen existieren:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} F\left(F(\varphi)(s) e^{-(as)^2 t}\right)(-x)$$

(hierbei wird die Variable  $t$  bei der Bildung der Fourier-Transformation festgehalten).

**Beispiel hierzu**

$$\begin{aligned}
 &[ u_t = a^2 u_{xx} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad t > 0 ] \\
 &[ u \text{ beschränkt für } x \rightarrow \pm\infty ] \\
 &[ u(x, 0) = \varphi(x) = e^{-x^2} ]
 \end{aligned}$$

$$F(\varphi(x))(s) = F(e^{-x^2})(s) = \sqrt{\pi} e^{-s^2/4} \quad (\text{vgl. Beispiel 5, S.595})$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\pi} F\left(\sqrt{\pi} e^{-s^2/4} e^{-(as)^2 t}\right)(-x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} F\left(e^{-(a^2 t + 1/4)s^2}\right)(-x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} F(e^{-(bs)^2})(-x) \quad \text{mit } b = \sqrt{a^2t + 1/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2t + 1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}b} F(e^{-s^2})\left(\frac{-x}{b}\right) \quad (\text{vgl. Eigenschaft b), S.596}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}b} \cdot \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{-x}{b}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{4a^2t + 1}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t + 1}} \\
\Rightarrow u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4a^2t + 1}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t + 1}}
\end{aligned}$$

ist die gesuchte Lösung ( $u$  ist für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , 2-mal nach  $x$  und 1-mal nach  $t$  stetig partiell differenzierbar).

### Beispiel 3. Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad t > 0 \\
u(x, t) &\text{ beschränkt für } x \rightarrow \pm\infty \\
u(x, 0) &= \varphi(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = \psi(x)
\end{aligned}$$

Anwendung der *Fourier-Transformation* bzgl. der Variablen  $x$  ergibt:

$$F(u_{tt}) = a^2 F(u_{xx}) \Rightarrow U_{tt} = -(as)^2 U \Rightarrow U_{tt} + (as)^2 U = 0 .$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL (bei festgehaltenem  $s$ ) lautet:

$$U(s, t) = c_1(s) \cos(ast) + c_2(s) \sin(ast) .$$

$$U(s, 0) = c_1(s) = F(\varphi)(s) \quad , \quad U_t(s, 0) = (as)c_2(s) = F(\psi)(s)$$

$$\Rightarrow U(s, t) = F(\varphi)(s) \cos(ast) + F(\psi)(s) \frac{\sin(ast)}{as} .$$

Mit Hilfe der Umkehrformel erhalten wir hieraus die Lösung des obigen Problems:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F(\varphi)(s) \cos(ast) + F(\psi)(s) \frac{\sin(ast)}{as} \right) e^{isx} ds$$

( $u$  muß 2-mal stetig partiell differenzierbar sein, und die Fourier-Transformationen von  $\varphi$  und  $\psi$  müssen existieren).

Die Randbedingung "u beschränkt für  $x \rightarrow \pm\infty$ " ist erfüllt, falls  $F(\varphi)$  und  $F(\psi)$  die Voraussetzungen von Definition 15.3 erfüllen.

Da die rechte Seite der Lösung (mit  $e^{isx} = e^{-i(-x)s}$ ) wieder eine Fourier-Transformation ist, folgt für die Lösung, falls jeweils die Fourier-Transformationen existieren:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} F\left( F(\varphi)(s) \cos(ast) + F(\psi)(s) \frac{\sin(ast)}{as} \right)(-x)$$

(hierbei wird die Variable  $t$  bei der Bildung der Fourier-Transformation festgehalten).

### Beispiel hierzu

$$\left[ \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad t > 0 \\ u \text{ beschränkt für } x \rightarrow \pm\infty \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = 0 \end{array} \right]$$

$$F(\varphi(x))(s) = F\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(s) = \pi e^{-|s|} \quad (\text{vgl. Beispiel 3, S.594/595}),$$

$$F(\psi(x))(s) \equiv 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} F(\pi e^{-|s|} \cos st)(-x) = \frac{1}{2} F(e^{-|s|} \cos st)(-x) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{2}{1+(-x-t)^2} + \frac{2}{1+(-x+t)^2} \right) \quad (\text{vgl. Beispiel 3, S.598 (cos-Eigenschaft)}) \end{aligned}$$

$$\text{und Beispiel 3, S.594/595 : } F(e^{-|s|})(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2} \right)$$

ist die gesuchte Lösung ( $u$  ist für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , 2-mal stetig partiell differenzierbar).

### Beispiel 4.

$$\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \quad , \quad u(x, t) \text{ beschränkt für } x \rightarrow \infty \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}$$

Damit die Randbedingung " $u(0, t) = 0$ " erfüllt ist, müssen hier die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  nach  $(-\infty, 0)$  ungerade fortgesetzt werden. Dann erhält man analog zu Beispiel 3. als Lösung dieses Problems:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} F\left(F(\varphi)(s) \cos(ast) + F(\psi)(s) \frac{\sin(ast)}{as}\right)(-x)$$

### Beispiel hierzu

$$\left[ \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \quad , \quad u \text{ beschränkt für } x \rightarrow \infty \\ u(x, 0) = \varphi(x) = 0 \quad , \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = e^{-x} \end{array} \right]$$

$$\psi(x) \text{ ungerade fortsetzen} \Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} -e^x & , \text{ falls } x < 0 \\ e^{-x} & , \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$

$$F(\varphi(x))(s) \equiv 0 \quad , \quad F(\psi(x))(s) = \frac{-2is}{1+s^2} \quad (\text{vgl. Beispiel 4, S.595})$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\pi} F\left(\frac{-2is}{1+s^2} \cdot \frac{\sin st}{s}\right)(-x) = \frac{-i}{\pi} F\left(\frac{\sin st}{1+s^2}\right)(-x)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{-i}{\pi} \cdot \frac{1}{2i} \left( \pi e^{-|x-t|} - \pi e^{-|x+t|} \right) \quad (\text{vgl. Beispiel 3, S.598 (sin-Eigenschaft)})$$

und Beispiel 3, S.594/595 :  $F\left(\frac{1}{1+s^2}\right)(x) = \pi e^{-|x|}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x, t) &= \frac{-1}{2} \left( e^{-|x+t|} - e^{-|x-t|} \right) = \frac{1}{2} \left( e^{-|x-t|} - e^{-|x+t|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} e^{-x} e^t - e^{-x} e^{-t} & , \text{falls } x \geq t > 0 \\ e^x e^{-t} - e^{-x} e^{-t} & , \text{falls } 0 \leq x < t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \begin{cases} e^{-x} \sinh t & , \text{falls } x \geq t > 0 \\ e^{-t} \sinh x & , \text{falls } 0 \leq x < t \end{cases}$$

ist die gesuchte Lösung.

### Beispiel 5. Potentialgleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xx} &= 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad t > 0 \\ u(x, t) &\text{ beschränkt für } x \rightarrow \pm\infty \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned}$$

Anwendung der *Fourier-Transformation* bzgl. der Variablen  $x$  ergibt:

$$F(u_{tt}) + F(u_{xx}) = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{tt} - s^2 U = 0 .$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL (bei festgehaltenem  $s$ ) lautet:

$$U(s, t) = c_1(s) \cosh(st) + c_2(s) \sinh(st) .$$

$$U(s, 0) = c_1(s) = F(\varphi)(s) \quad , \quad U_t(s, 0) = s c_2(s) = F(\psi)(s)$$

$$\Rightarrow U(s, t) = F(\varphi)(s) \cosh(st) + F(\psi)(s) \frac{\sinh(st)}{s} .$$

Mit Hilfe der Umkehrformel erhalten wir hieraus die Lösung des obigen Problems:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F(\varphi)(s) \cosh(st) + F(\psi)(s) \frac{\sinh(st)}{s} \right) e^{isx} ds .$$

Da die rechte Seite (mit  $e^{isx} = e^{-i(-x)s}$ ) wieder eine Fourier-Transformation ist, folgt für die Lösung, falls jeweils die Fourier-Transformationen existieren, und  $u$  2-mal stetig partiell differenzierbar ist:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} F \left( F(\varphi)(s) \cosh(st) + F(\psi)(s) \frac{\sinh(st)}{s} \right) (-x)$$

**Bemerkung :** Wir werden später noch eine Methode kennenlernen (*Residuensatz*), mit deren Hilfe man für viele Funktionen die Fourier-Transformation relativ leicht berechnen kann.

Die Eigenschaften der *Fourier-Transformation* von Satz 15.7, S.596 , sind alle so ähnlich wie die Eigenschaften der *Laplace-Transformation* (vgl. Satz 10.4, S.332 ).

Es gibt zwischen *Fourier- und Laplace-Transformation* im Komplexen folgenden Zusammenhang:

### Zusammenhang zwischen Fourier- und Laplace-Transformation

Sei  $f(t) = \begin{cases} g(t) & , \text{falls } t > 0 \\ 0 & , \text{falls } t < 0 \end{cases}$  , dann gilt

$$F(f(t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = \int_0^{\infty} g(t)e^{-(is)t} dt = L(g(t))(is) .$$

Also gilt

$$F(f(t))(s) = L(g(t))(is)$$

### Differenzenverfahren bei partiellen DGL

**Beispiel** *Dirichlet-Problem auf dem Rechteck*

$$u_{xx} + u_{yy} = f \quad \text{in } \overset{\circ}{M} , \quad u|_{\partial M} = \varphi$$

mit  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq a , 0 \leq y \leq b \right\}$  .

Man legt über das Rechteck ein Gitter

mit den Gitterpunkten  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ih \\ jk \end{pmatrix}$   
 $(0 \leq i \leq n , 0 \leq j \leq m)$ ,

$h$  ist die Schrittweite in  $x$ -Richtung ,  $k$  ist die Schrittweite in  $y$ -Richtung ,

$u_{i,j}$  sei eine Näherung für  $u(x_i, y_j)$ .

Die Randpunkte

$u_{0,j} = \varphi(0, y_j)$  ,  $u_{n,j} = \varphi(a, y_j)$  ,  $u_{i,0} = \varphi(x_i, 0)$  ,  $u_{i,m} = \varphi(x_i, b)$   
sind über die Randfunktion  $\varphi$  bekannt.

Gesucht sind Näherungswerte  $u_{i,j}$  ,  $(1 \leq i \leq n-1 , 1 \leq j \leq m-1)$ , für die inneren Gitterpunkte.

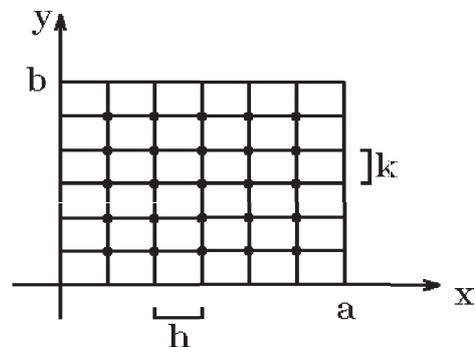
Ersetzen wir die partiellen Ableitungen  $u_{xx}(x_i, y_j)$  und  $u_{yy}(x_i, y_j)$  jeweils durch *Differenzenquotienten* (vgl **S.379**)

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) , \quad u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{k^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) ,$$

so erhalten wir anstelle der partiellen DGL die folgenden Differenzgleichungen:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{1}{k^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) = f(x_i, y_j)$$

$$(1 \leq i \leq n-1 , 1 \leq j \leq m-1).$$



Das sind  $(n-1)(m-1)$  viele Gleichungen für die  $(n-1)(m-1)$  vielen Unbekannten  $u_{i,j}$ , ( $1 \leq i \leq n-1$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ ).

Die Lösung dieses linearen GLS liefert  $u_{i,j}$  als Näherung für  $u(x_i, y_j)$  an den inneren Gitterpunkten  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}$ .

Für  $n = m$ ,  $h = k$ ,  $a = b$  erhalten wir die folgenden Gleichungen (nach Multiplikation mit  $(-h^2)$ ):

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} = -h^2 f_{ij} \quad (\text{mit } f_{ij} = f(x_i, y_j)).$$

Die durch die Randfunktion  $\varphi$  bekannten Werte  $u_{0,j}, u_{n,j}, u_{i,0}, u_{i,m}$  müssen noch auf die rechte Seite gebracht werden. Dann erhalten wir das folgende lineare GLS in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 4 & -1 & & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ -1 & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = -h^2 \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-1,n-1} \end{pmatrix} + \vec{d}$$

$$\text{mit } \vec{d} = \begin{pmatrix} u_{0,1} + u_{1,0} \\ u_{0,2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ u_{n,n-2} \\ u_{n-1,n} + u_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

Bei feiner Gitterunterteilung können hier sehr große GLS auftreten, die mit Hilfe des Gauß-Algorithmus nicht mehr in angemessener Zeit gelöst werden können. In diesen Fällen benutzt man zur Lösung des GLS "Iterative Verfahren", z.B. das "pcg-Verfahren" (vgl. Literatur).

## XVI Komplexe Funktionentheorie

**Vorbereitung:** Wiederholung aus Kapitel I, S.16 ff

$\mathcal{C} = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  Menge der komplexen Zahlen.

Sei  $z = x + iy \Rightarrow$

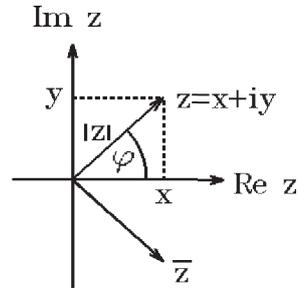
$x = \operatorname{Re} z$  Realteil von  $z$ ,

$y = \operatorname{Im} z$  Imaginärteil von  $z$ ,

$\bar{z} = x - iy$  ist die zu  $z = x + iy$  konjugiert komplexe Zahl,

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$  Betrag von  $z$ ,

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , falls  $z \neq 0$ .



*Polarkoordinatendarstellung:*

$z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  mit  $r = |z|$ ,  $\varphi = \operatorname{arg} z$ , ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ).

Es gilt:

$$\bar{z} = re^{-i\varphi}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}, \quad z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Ist  $a = |a|e^{i\varphi} \in \mathcal{C}$ , so gilt:

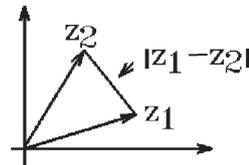
$$z^n = a \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

sind die  $n$   $n$ -ten Wurzeln aus  $a$ .

Mit  $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$  ist

$|z_1 - z_2|$  der Abstand

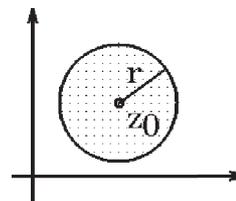
zwischen  $z_1$  und  $z_2$ .



### Beispiele

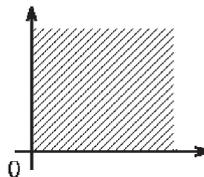
1. Kreisfläche um  $z_0$  mit Radius  $r$

$$\{z \in \mathcal{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$



2. 1. Quadrant

$$\{z \in \mathcal{C} : 0 \leq \operatorname{arg} z \leq \pi/2\}.$$



**1. Folgen und Reihen in  $\mathcal{C}$**  (vgl. S.98/99 , S.112/113 )

Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathcal{C}$  ist *konvergent* gegen  $z \in \mathcal{C}$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0 \Leftrightarrow \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z) \right\} .$$

**Definition 16.1 :** *der uneigentliche Punkt  $\infty$*

$$z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|z_n|} = 0 .$$

**Definition 16.2 :**  $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$  .

Eine *unendliche Reihe*  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  ist *konvergent*

$$\Leftrightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } s_n = \sum_{k=1}^n z_k \text{ ist konvergente Folge.}$$

Eine *unendliche Reihe*  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  ist *absolut konvergent*  $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$  ist konvergent.

Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n) \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n) \text{ sind konvergent}$$

(absolut konvergent) (absolut konvergent).

Absolute Konvergenz kann mit Hilfe des *Majoranten-, Wurzel- oder Quotientenkriteriums* nachgewiesen werden (vgl. S.103 ).

Aus *absoluter Konvergenz* folgt *Konvergenz*, denn

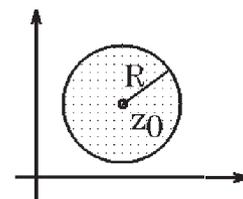
$$|\operatorname{Re}(z_n)| \leq |z_n| \text{ und } |\operatorname{Im}(z_n)| \leq |z_n| .$$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  mit  $a_n \in \mathcal{C}$  ( $n \geq 0$ ),  $z_0 \in \mathcal{C}$  fest,  $z \in \mathcal{C}$ , ist eine *Potenzreihe* um  $z_0$ .

Zu jeder Potenzreihe existiert eindeutig ein *Konvergenzradius*  $R$  mit  $0 \leq R \leq \infty$ .

Ist  $R = 0$ , so konvergiert die Potenzreihe nur in  $z_0$  .

Ist  $0 < R < \infty$ , so *konvergiert* die Potenzreihe in  $\{z \in \mathcal{C} : |z - z_0| < R\}$ , für  $|z - z_0| > R$  ist die Reihe *divergent*.



Ist  $R = \infty$ , so *konvergiert* die Potenzreihe für alle  $z \in \mathcal{C}$ .

## Beispiele

1.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow R = \infty, \text{ konvergent in } \mathcal{C},$$

$$\text{denn: } \left| \frac{z^{n+1}n!}{(n+1)!z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 < 1.$$

2.

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \Rightarrow R = \infty, \text{ konvergent in } \mathcal{C},$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow R = \infty, \text{ konvergent in } \mathcal{C}.$$

3.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow R = 1, \text{ konvergent f\u00fcr } |z| < 1.$$

## 2. Kurven in $\mathcal{C}$

**Definition 16.3 :** *Kurve in  $\mathcal{C}$*

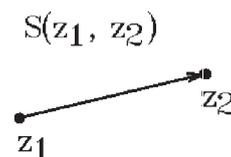
$$K = \{z \in \mathcal{C} : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

he\u00dft *Kurve in  $\mathcal{C}$* ,  $t$  ist der *Parameter*,  $[\alpha, \beta]$  der *Parameterbereich*.

### Beispiele

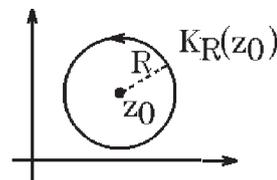
1. *Strecke zwischen  $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$*

$$S(z_1, z_2) = \{z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) : t \in [0, 1]\}.$$



2. *Kreislinie um  $z_0$  mit Radius  $R$*

$$K_R(z_0) = \{z(t) = z_0 + Re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}.$$



Da man  $\left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} : t \in [\alpha, \beta] \right\}$  als Kurve in  $\mathbb{R}^2$  auffassen kann, \u00fcbertragen sich alle Begriffe:

**Definition 16.4 :** Sei  $K = \{z \in \mathcal{C} : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ .

a)  $K$  heißt *glatt*, wenn  $x(t), y(t) \in C^1[\alpha, \beta]$  (also stetig differenzierbar in  $[\alpha, \beta]$ ) und  $|z'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \neq 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$ .

In diesem Fall heißt  $T_{z(t_0)} = \{z(\lambda) = z(t_0) + \lambda z'(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$  die *Tangente* an  $K$  im Punkt  $z(t_0)$  (hierbei ist  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ ).

b)  $K$  heißt *stückweise glatt*, wenn  $K$  aus endlich vielen glatten Stücken besteht.

c)  $K$  heißt *geschlossen*, wenn  $z(\alpha) = z(\beta)$ .

d) Eine (bis auf evt. Anfangs- und Endpunkt) *doppelpunktfreie* Kurve heißt *Jordan-Kurve*.

e) Eine geschlossene Jordan-Kurve heißt *positiv orientiert*, wenn beim Durchlaufen der Kurve das Innere zur *Linken* liegt.

f)  $(-K)$  sei die Kurve mit *umgekehrtem Durchlaufungssinn*.



stückweise glatte Kurve



Jordan-Kurve



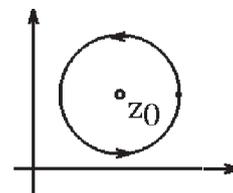
positiv orientierte Jordan-Kurve

### Beispiele

1.

$$K_R(z_0) = \{z(t) = z_0 + Re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$$

ist positiv orientierte Jordan-Kurve.



2.

$$S(z_1, z_2) = \{z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) : t \in [0, 1]\}$$

$$\Rightarrow -S(z_1, z_2) = \{z(t) = z_2 + t(z_1 - z_2) : t \in [0, 1]\}.$$



Es gilt: Die *Kurvenlänge* einer glatten Kurve  $K$  mit  $K = \{z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$  ist

$$L(K) = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

### Beispiel

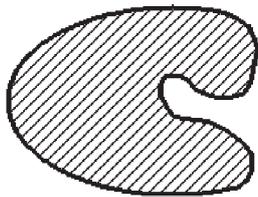
$$L(K_R(z_0)) = \int_0^{2\pi} |iRe^{it}| dt = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

### 3. Gebiete in $\mathcal{C}$

**Definition 16.5 :** *Gebiet*

$G \subset \mathcal{C}$  heißt *Gebiet*, wenn

- a)  $G$  *offen*, d.h.:  $\forall z_0 \in G \exists U_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\} \subset G$  ( $\delta > 0$ ), und
- b)  $G$  *zusammenhängend*, d.h.: je zwei Punkte lassen sich in  $G$  durch einen Polygonzug verbinden.



*zusammenhängend*

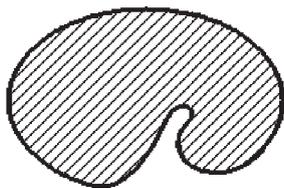


*nicht zusammenhängend*

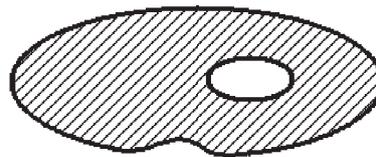
**Definition 16.6 :** *einfach zusammenhängendes Gebiet*

$G \subset \mathcal{C}$  heißt *einfach zusammenhängendes Gebiet*, wenn

- a)  $G$  *Gebiet* und
- b) jeder in  $G$  verlaufende, einfach geschlossene Polygonzug umschließt nur Punkte von  $G$ .



*einfach zusammenhängend*



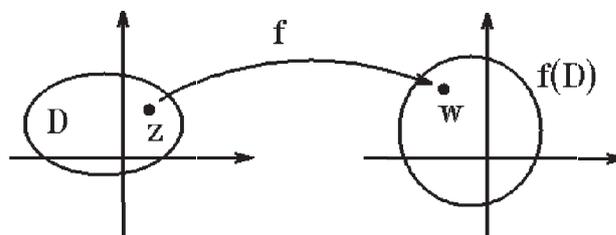
*nicht einfach zusammenhängend*

#### Beispiele

1.  $\mathcal{C}$  ist einfach zusammenhängendes Gebiet.
2.  $\{z \in \mathcal{C} : |z - z_0| < R\}$  ist einfach zusammenhängendes Gebiet.
3.  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$  ist *nicht* einfach zusammenhängend.

#### 4. Stetigkeit komplexwertiger Funktionen

Sei  $f : D \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  eine komplexwertige Funktion, die einen Bereich  $D$  einer komplexen Ebene (*Urbildebene*) in einen Bildbereich  $f(D)$  einer anderen komplexen Ebene (*Bildebene*) abbildet.



Mit  $z = x + iy$  sei  $f(z) = w = u + iv$ , also  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \Rightarrow u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$ . Wir schreiben also

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{mit} \quad u = \operatorname{Re}(f), \quad v = \operatorname{Im}(f)$$

Hierbei sind:  $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zwei reellwertige Funktionen.

Jede komplexwertige Funktion  $f$  lässt sich in dieser Weise in *Realteil* und *Imaginärteil* aufspalten:  $f = u + iv$ .

#### Beispiele

1.  $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$   
 $\Rightarrow \operatorname{Re}(e^z) = u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $\operatorname{Im}(e^z) = v(x, y) = e^x \sin y$ .
2.  $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$   
 $\Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $v(x, y) = 2xy$ .
3.  $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$   
 $\Rightarrow u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ .
4.  $f(z) = \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$  mit  
 $\cos iy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (iy)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{(2n)!} y^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} y^{2n} = \cosh y$ ,  
(da  $i^{2n} = (-1)^n$ )  
 analog erhalten wir  
 $\sin iy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (iy)^{2n+1} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} y^{2n+1}$

$\Rightarrow \sin iy = i \sinh y$ , also gilt:

$$\cos(iy) = \cosh(y) \quad , \quad \sin(iy) = i \sinh(y)$$

Hieraus folgt: (2. Gleichung analog)

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

**Definition 16.7 :** *Stetigkeit*

Sei  $f : D \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $z_0 \in D$ .

- a)  $f$  heißt *stetig* in  $z_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  mit  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$   
 $\forall z \in D$  mit  $|z - z_0| < \delta$ .
- b)  $f$  heißt *stetig* in  $D \Leftrightarrow f$  ist stetig  $\forall z \in D$ .

Genau wie in  $\mathbb{R}^2$  gilt auch in  $\mathcal{C}$ :

**Satz 16.8 :**

$f$  ist *stetig* in  $z_0 \in D \Leftrightarrow$  Für alle Folgen  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  gilt  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$ .

Da  $f(z_n) \rightarrow f(z_0) \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f(z_n)) \rightarrow \operatorname{Re}(f(z_0))$  und  $\operatorname{Im}(f(z_n)) \rightarrow \operatorname{Im}(f(z_0))$ , gilt :

**Satz 16.9 :** Sei  $f = u + iv$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ . Dann gilt

$f$  ist *stetig* in  $z_0 \Leftrightarrow u$  und  $v$  sind *stetig* in  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ .

Hieraus folgt sofort

**Satz 16.10 :** Summe, Differenz, Produkt und Quotient (falls Nenner  $\neq 0$ ) von in  $z_0$  stetigen Funktionen sind wieder stetig in  $z_0$ .

Ist  $g$  stetig in  $z_0$  und  $f$  stetig in  $g(z_0)$ , so ist auch  $h = f \circ g$  stetig in  $z_0$ .

Für stetige Funktionen gelten nun die folgenden Eigenschaften :

**Satz 16.11 :** Sei  $f : D \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  stetig in  $D$  und *eindeutig* (d.h.:  $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$  existiert). Dann gilt

- a) Ist  $M \subset D$  *offen*  $\Rightarrow f(M)$  ist *offen*  
und  $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$  ist *stetig* in  $f(M)$ .

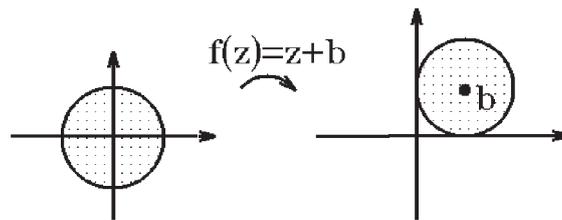
b) Ist  $M \cup \partial M \subset D$ , so gilt für die stetige, eineindeutige Abbildung  $f : D \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ :  
 Das Innere von  $M$  geht in das Innere von  $f(M)$  über,  
 der Rand von  $M$  geht in den Rand von  $f(M)$  über.

c) Ist  $M$  einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist auch  $f(M)$  einfach zusammenhängendes Gebiet.

*Beweis :* (anschaulich klar, ausführlicher Beweis siehe Literatur).

### Beispiele

1.  $f(z) = c$  konstante Abbildung ist stetig in  $\mathcal{C}$ , aber nicht eineindeutig.
2.  $f(z) = z$  identische Abbildung ist stetig und eineindeutig in  $\mathcal{C}$ .
3.  $f(z) = z + b$ ,  $b \in \mathcal{C}$  fest, Translation ist stetig und eineindeutig in  $\mathcal{C}$ .



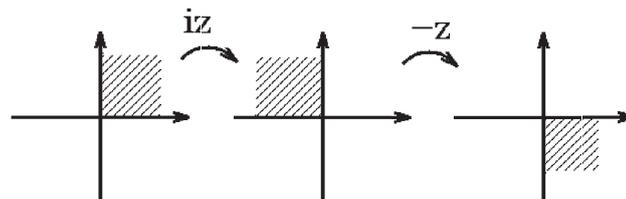
z.B.:  $f(z) = z + b$  mit  $b = 1 + i$ ,  $M$  Einheitskreis

4.  $f(z) = az$ ,  $a \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$  fest, Drehstreckung ist stetig und eineindeutig in  $\mathcal{C}$ .

Ist  $a = |a|e^{i\alpha}$ ,  $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow f(z) = |a||z|e^{i(\varphi+\alpha)}$ ,

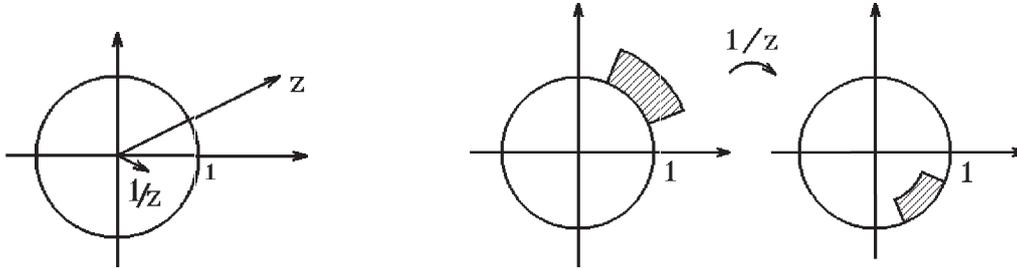
also erzeugt  $f(z) = az$  eine Drehung um den Winkel  $\alpha$  und eine Streckung mit dem Faktor  $|a|$ .

z.B.:  $f(z) = iz$  Drehung um  $\pi/2$ ,  $f(z) = -z$  Drehung um  $\pi$ .



5.  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$ , *Stürzung* ist stetig und eineindeutig in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ .

Ist  $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$ .



6. **Gebrochen lineare Abbildung**

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathcal{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0$$

Ist  $ad - bc = 0 \Rightarrow f$  ist konstant, denn:

ist  $d \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{(az + b)d}{(cz + d)d} = \frac{adz + bd}{(cz + d)d} = \frac{bcz + bd}{(cz + d)d} = \frac{b(cz + d)}{d(cz + d)} = \frac{b}{d}$   
 $\Rightarrow f$  ist konstant,

ist  $d = 0 \Rightarrow b = 0$  ( $c \neq 0$ , denn sonst wäre der Nenner = 0)

$\Rightarrow f(z) = \frac{az}{cz} = \frac{a}{c} \Rightarrow f$  ist konstant.

Es gelten folgende Eigenschaften für gebrochen lineare Abbildungen  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ :

a)  $f$  setzt sich zusammen aus *Translation*, *Drehstreckung* und *Stürzung*.

Denn:

Ist  $c = 0 \Rightarrow f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \Rightarrow f$  ist Drehstreckung und Translation.

Ist  $c \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az}{cz + d} + \frac{b}{cz + d} = \frac{acz + ad - ad}{c(cz + d)} + \frac{b}{cz + d}$   
 $= \frac{a(cz + d) - ad}{c(cz + d)} + \frac{b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right) \frac{1}{cz + d}$ , also gilt für  $c \neq 0$ :

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc - ad}{c}\right) \frac{1}{cz + d}$$

mit  $f_1(z) = cz$ ,  $f_2(z) = z + d$ ,  $f_3(z) = \frac{1}{z}$ ,  $f_4(z) = \left(\frac{bc - ad}{c}\right)z$  und  $f_5(z) = z + \frac{a}{c}$  gilt:  $f(z) = f_5(f_4(f_3(f_2(f_1(z))))))$ .

- b)  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  mit  $ad \neq bc$  ist *stetig* und *eineindeutig* in  $\mathcal{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ , falls  $c \neq 0$  (bzw. in  $\mathcal{C}$ , falls  $c = 0$ ) mit der *inversen Abbildung*

$$f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Also ist  $f^{-1}$  auch wieder eine *gebrochen lineare Abbildung* in  $\mathcal{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ , falls  $c \neq 0$  (bzw. in  $\mathcal{C}$ , falls  $c = 0$ ).

Es gilt:

$$\begin{aligned} c = 0 &\Rightarrow f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, f(\infty) = \infty \quad \text{eindeutig} \\ c \neq 0 &\Rightarrow f : \mathcal{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \quad \text{eindeutig} \\ &f(\infty) = \frac{a}{c}, f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \end{aligned}$$

Mit  $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$  gilt sogar:  $f : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  ist *eindeutig*.

*Denn:* (Bestimmung der inversen Abbildung)

$$\begin{aligned} w = \frac{az + b}{cz + d} &\Leftrightarrow (cz + d)w = az + b \Leftrightarrow z(cw - a) = -dw + b \\ \Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a} &\text{ mit } z \neq \frac{-d}{c}, w \neq \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

- c) Die Hintereinanderausführung zweier gebrochen linearer Abbildungen ergibt wieder eine gebrochen lineare Abbildung.

*Denn:*

Mit  $f_1(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $f_2(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  gilt

$$f(z) = f_1(f_2(z)) = \frac{a \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + b}{c \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + d} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Die gebrochen linearen Abbildungen bilden bzgl. der Hintereinanderausführung eine *Gruppe* mit dem *Einselement*:  $f(z) = z$  und dem *inversen Element*:  $f^{-1}$ .

Die weiteren Eigenschaften der gebrochen linearen Abbildungen fassen wir in folgendem Satz zusammen:

**Satz 16.12 :** *Eigenschaften gebrochen linearer Abbildungen*

- a)  $f$  ist durch 3 Punktepaare  $\begin{pmatrix} z_i \\ w_i \end{pmatrix}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), eindeutig bestimmt mit  $f(z_i) = w_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Hierbei müssen  $z_i$  und  $w_i$  paarweise verschieden sein, es kann aber ein  $z_i$  oder  $w_i$  gleich  $\infty$  sein.
- b) Ist  $f \neq id \Rightarrow f$  hat höchstens 2 Fixpunkte (hierbei ist  $id$  die Identitätsabbildung;  $\xi$  ist Fixpunkt, wenn  $f(\xi) = \xi$ ).
- c) *Kreisverwandtschaft*  
*Kreise und Geraden* werden durch  $f$  in *Kreise oder Geraden* abgebildet. Faßt man die *Geraden* als *Kreise durch  $\infty$*  auf, so gilt:  
 $f$  bildet *Kreise* in *Kreise* ab (*Kreisverwandtschaft*).
- d)  $f$  bildet *innere Punkte* in *innere Punkte* ab,  
 $f$  bildet *Randpunkte* in *Randpunkte* ab.
- e) Sind  $K_1$  und  $K_2$  *Kreise oder Geraden*  $\Rightarrow$   
 Es existiert eine gebrochen lineare Abbildung  $f$  mit  $f(K_1) = K_2$ .

*Beweis :*

- a) Sind  $z_1, z_2, z_3$  und  $w_1, w_2, w_3$  gegeben, so soll gelten:

$$f(z_i) = w_i = \frac{az_i + b}{cz_i + d}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Das sind 3 Gleichungen für die 4 Unbekannten  $a, b, c, d$ . Da aber  $a, b, c, d$  nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind (man kann den Bruch ja durch einen Faktor kürzen), ist immer eine Unbekannte frei wählbar.

Der Fall  $\infty$  ergibt:  $z_i = \infty \Rightarrow f(\infty) = w_i = \frac{a}{c}$  (falls  $w_i \neq \infty$ , sonst  $c = 0$ ),

bzw.  $w_i = \infty \Rightarrow f(z_i) = \infty \Rightarrow cz_i + d = 0$  (falls  $z_i \neq \infty$ , sonst  $c = 0$ ).

Das ergibt also auch jeweils eine Gleichung.

- b) Sind  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  verschiedene Fixpunkte, so muß gelten:

$$f(\xi_i) = \xi_i, \quad i = 1, 2, 3. \text{ Nach a) ist } f \text{ eindeutig bestimmt, also } f = id.$$

- c)  $f$  setzt sich zusammen aus Translation, Drehstreckung und Stürzung, also muß Eigenschaft c) für diese drei Abbildungen gezeigt werden:

*Translation:* geometrisch klar.

*Drehstreckung:*  $f(z) = az$ ,  $a = |a|e^{i\alpha} \in \mathcal{C}$ .

*Kreis:*  $z = z_0 + re^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  (Kreis um  $z_0$  mit Radius  $r$ ),

$$w = f(z) = az \Rightarrow w = az_0 + are^{i\varphi} = az_0 + |a|re^{i(\varphi+\alpha)}.$$

Dies ist wieder ein Kreis (um  $az_0$  mit Radius  $|a|r$ ).

*Gerade:*  $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow f(z) = w = az_1 + t(az_2 - az_1)$  ist wieder eine Gerade.

Stürzung:  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

Kreis:  $|z - z_0| = r$  (Kreis um  $z_0$  mit Radius  $r$ )  
 $\Rightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \Rightarrow$  (mit  $e = |z_0|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$ )

$$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + e = 0 \quad (\text{Kreis um } z_0 \text{ mit Radius } r)$$

( $e = 0 \Leftrightarrow |z_0| = r \Leftrightarrow$  Kreis geht durch 0).

Gerade:  $z = z_1 + t(z_2 - z_1) = \alpha + t\beta$  mit  $\beta \neq 0, t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{z - \alpha}{\beta} = t = \bar{t} = \frac{\bar{z} - \bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

$$\Rightarrow (z - \alpha)\bar{\beta} = (\bar{z} - \bar{\alpha})\beta \Rightarrow \bar{\beta}z - \beta\bar{z} = \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta.$$

Ist  $\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 0 \Rightarrow \bar{\beta}z - \beta\bar{z} = 0$  (Gerade durch 0).

Ist  $\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta \neq 0 \Rightarrow \frac{\bar{\beta}}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta}z + \frac{\beta}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}}\bar{z} = 1 \Rightarrow$  (mit  $\gamma = \frac{\bar{\beta}}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta}$ )

$\gamma z + \bar{\gamma}\bar{z} = 1$  (Gerade nicht durch 0).

Also erhalten wir insgesamt:

$$\bar{\beta}z - \beta\bar{z} = 0 \quad (\text{Gerade durch } 0) \quad , \quad \gamma z + \bar{\gamma}\bar{z} = 1 \quad (\text{Gerade nicht durch } 0)$$

Wenden wir nun die Abbildung  $w = f(z) = \frac{1}{z}$  (Stürzung) an, so erhalten wir:

Kreis:  $z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + e = 0, e \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{\bar{z}_0}{w} - \frac{z_0}{\bar{w}} + e = 0 \Rightarrow ew\bar{w} - z_0 w - \bar{z}_0 \bar{w} + 1 = 0$$

für  $e \neq 0 \Rightarrow$  Kreis, für  $e = 0 \Rightarrow$  Gerade.

Geht der ursprüngliche Kreis durch 0 (also  $e = 0$ ), so entsteht eine Gerade, andernfalls entsteht ein Kreis.

Gerade:  $\bar{\beta}z - \beta\bar{z} = 0 \Rightarrow \frac{\bar{\beta}}{w} - \frac{\beta}{\bar{w}} = 0 \Rightarrow \beta w - \bar{\beta}\bar{w} = 0$  (Gerade durch 0),

$\gamma z + \bar{\gamma}\bar{z} = 1 \Rightarrow \frac{\gamma}{w} + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{w}} = 1 \Rightarrow w\bar{w} - \bar{\gamma}w - \gamma\bar{w} = 0$  (Kreis durch 0).

d) folgt aus Satz 16.11, **S.613**, da  $f$  stetig und eineindeutig ist.

e) Ein Kreis ist durch 3 Punkte eindeutig bestimmt (eine Gerade durch 2 Punkte). Wählt man jeweils 3 Punkte auf  $K_1$  und auf  $K_2$ , so kann man nach a) die gebrochen lineare Abbildung bestimmen.

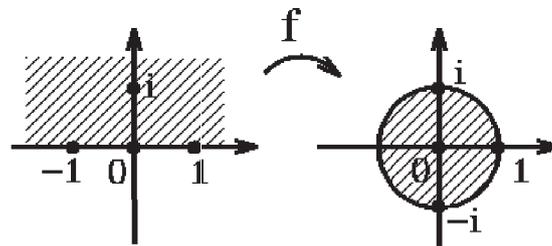
## Beispiele

1. *Gesucht:* Eine gebrochen lineare Abbildung, die die obere Halbebene auf das Innere des Einheitskreises abbildet.

Also:  $G = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ ,  $f(G) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ .

Da der Rand von  $G$  in den Rand von  $f(G)$  abgebildet wird, muß also die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abgebildet werden.

Wir wählen jeweils 3 Punkte auf der reellen Achse und auf der Einheitskreislinie,  
z.B.:  $-1 \rightarrow -i$  ,  $0 \rightarrow 1$  ,  $1 \rightarrow i$



$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} , \quad f(0) = \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow b = 1 \quad (\text{falls man } d = 1 \text{ wählt}),$$

$$f(1) = \frac{a+1}{c+1} = i \Rightarrow a+1 = ic+i ,$$

$$f(-1) = \frac{-a+1}{-c+1} = -i \Rightarrow -a+1 = ic-i$$

$$\Rightarrow 2ic = 2 \Rightarrow c = -i \Rightarrow a = 1+i-1 = i \Rightarrow a = i \Rightarrow f(z) = \frac{iz+1}{-iz+1} .$$

Da das Innere ins Innere abgebildet wird, reicht zur Überprüfung, ob  $G$  nach  $f(G)$  abgebildet wird, ein innerer Punkt von  $G$ , z.B.:  $z_0 = i \in G \Rightarrow f(i) = 0 \in f(G)$ .

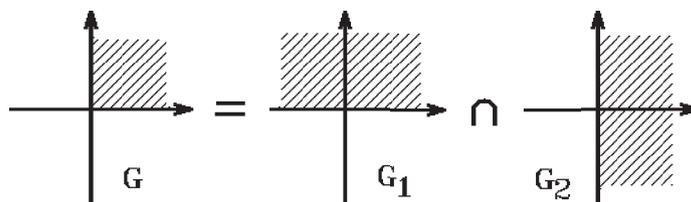
Also gilt:

$f(z) = \frac{iz+1}{-iz+1}$  bildet die obere Halbebene auf das Innere des Einheitskreises ab.

2. Gegeben:  $f(z) = \frac{iz+1}{-iz+1}$  ,  $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 , \operatorname{Im} z > 0\}$  .

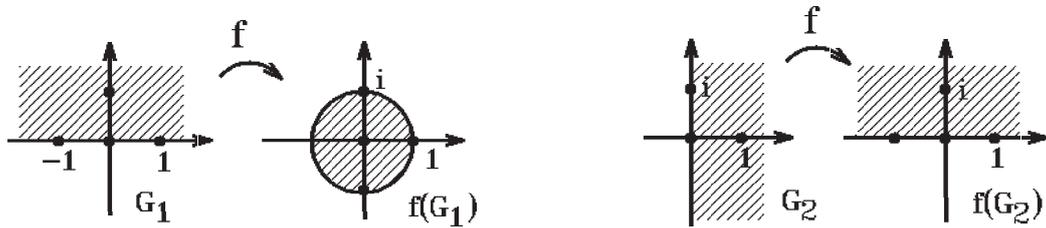
Gesucht:  $f(G)$ .

Da  $G = G_1 \cap G_2$  mit  $G_1$ : obere Halbebene ,  $G_2$ : rechte Halbebene , bilden wir zunächst  $G_1$  und  $G_2$  ab. Das hat den Vorteil, daß die Ränder von  $G_1$  und  $G_2$  ganze Geraden sind. Damit müssen diese Ränder wieder in ganze Geraden oder Kreise abgebildet werden. Es gilt dann  $f(G) = f(G_1 \cap G_2) = f(G_1) \cap f(G_2)$



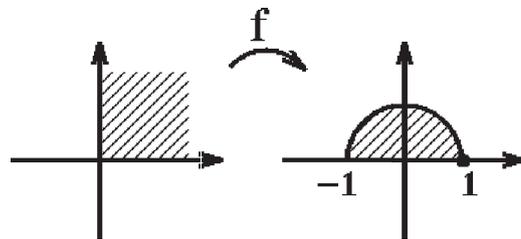
Wir wählen nun wieder jeweils 3 Punkte auf den Rändern und einen inneren Punkt.  
Dann erhalten wir die folgende Tabelle:

$z$	$0$	$\infty$	$i$	$1$
$f(z)$	$1$	$-1$	$0$	$i$



(siehe Beispiel 1)

Damit erhalten wir insgesamt das Ergebnis:  $f(G) = f(G_1) \cap f(G_2)$

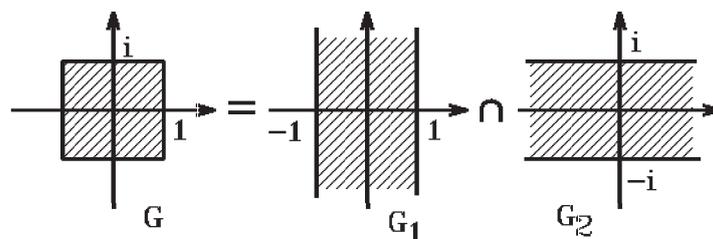


$$f(G) = \{w \in \mathcal{C} : |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}.$$

3. Gegeben:  $f(z) = \frac{iz + 1}{-iz + 1}$ ,  $G = \{z \in \mathcal{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1, -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$ .

Gesucht:  $f(G)$ .

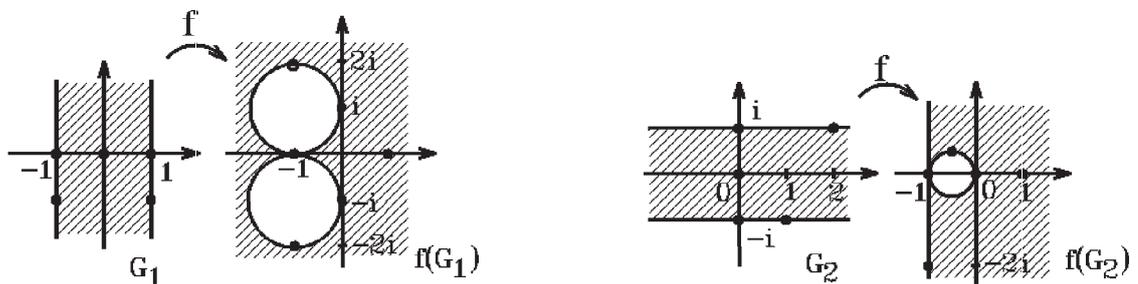
$G = G_1 \cap G_2$  mit  $G_1 = \{z \in \mathcal{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ ,  $G_2 = \{z \in \mathcal{C} : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$ .



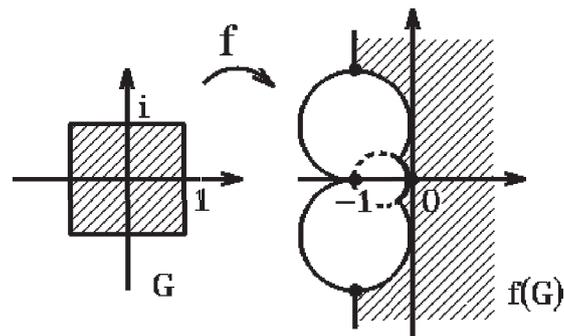
Wir wählen nun wieder jeweils 3 Punkte auf den Rändern und einen inneren Punkt. Dann erhalten wir die folgende Tabelle:

$z$	0	$\infty$	$i$	1	-1	$-i$	$1-i$	$-1-i$
$f(z)$	1	-1	0	$i$	$-i$	$\infty$	$2i-1$	$-1-2i$

$z$	$2+i$
$f(z)$	$-1/2 + i/2$



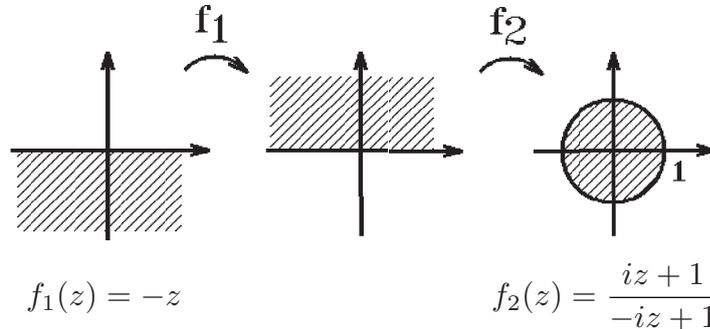
Damit erhalten wir insgesamt das Ergebnis:  $f(G) = f(G_1) \cap f(G_2)$



$$f(G) = \left\{ w \in \mathcal{D} : \begin{array}{l} |w - (-1+i)| > 1, \quad |w - (-1-i)| > 1, \\ |w - (-1/2)| > 1/2, \quad \operatorname{Re} w > -1 \end{array} \right\}.$$

4. *Gesucht:* Eine gebrochen lineare Abbildung, die die *untere Halbebene* auf das *Innere des Einheitskreises* abbildet.

Wir drehen zunächst die untere Halbebene um  $\pi$  in die obere Halbebene und benutzen dann Beispiel 1. Also:



Insgesamt erhalten wir dann:

$$f(z) = f_2(f_1(z)) = \frac{i(-z) + 1}{-i(-z) + 1} = \frac{-iz + 1}{iz + 1} = \frac{z + i}{-z + i}.$$

5. *Gesucht:* Das *Innere des Einheitskreises* soll auf die *rechte Halbebene* abgebildet werden.

Nach Beispiel 1. bildet  $f(z) = \frac{iz + 1}{-iz + 1}$  die obere Halbebene auf das Innere des Einheitskreises ab. Also bildet  $f^{-1}$  das Innere des Einheitskreises auf die obere Halbebene ab. Anschließend drehen wir noch um  $-\pi/2$ . Dann landen wir in der rechten Halbebene.

Wir bestimmen zunächst  $f^{-1}$ :

$$w = \frac{iz + 1}{-iz + 1} \Rightarrow (-iz + 1)w = iz + 1 \Rightarrow (i + iw)z = w - 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{w - 1}{iw + i} = \frac{-iw + i}{w + 1}.$$

$$\text{Also: } f_1(z) = \frac{-iz + i}{z + 1}, \quad f_2(z) = e^{-i\pi/2}z = -iz.$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\Rightarrow f(z) = f_2(f_1(z)) = -i \frac{-iz + i}{z + 1} = \frac{-z + 1}{z + 1}.$$

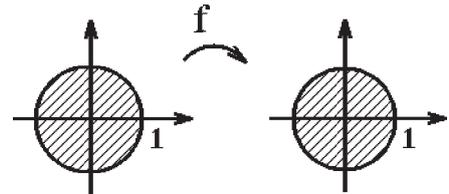
Also bildet  $f(z) = \frac{-z + 1}{z + 1}$  das Innere des Einheitskreises auf die rechte Halbebene ab.

### Allgemeine gebrochen lineare Abbildungen mit:

- a) *Das Innere des Einheitskreises auf sich*

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1}$$

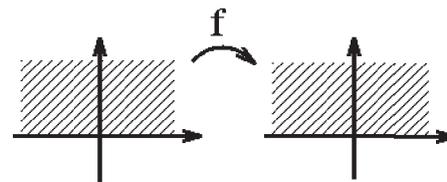
mit  $\varphi \in \mathbb{R}$ ,  $|z_0| < 1$ .



b) Die obere Halbebene auf sich

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

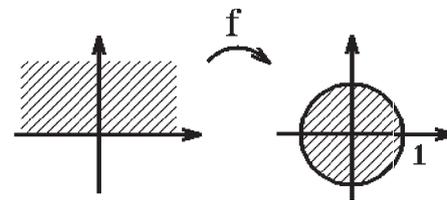
mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ .



c) Die obere Halbebene auf den Einheitskreis

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

mit  $\varphi \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Im } z_0 > 0$ .



z.B.:  $f(z) = \frac{iz + 1}{-iz + 1} = \frac{-z + i}{z + i} = (-1) \frac{z - i}{z + i}$ , also  $z_0 = i$ ,  $\varphi = \pi$

(vgl. Beispiel 1., S.618/619).

Wir behandeln nun weitere komplexe Abbildungen:

## 7. Potenzfunktion

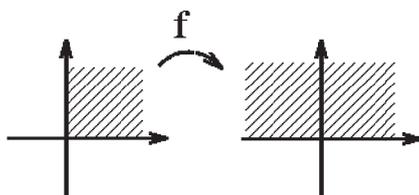
$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$f$  ist stetig in  $\mathcal{C}$ , aber für  $n \geq 2$  nicht eineindeutig in  $\mathcal{C}$ .

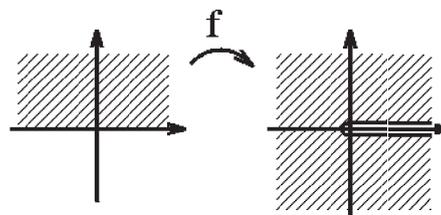
Ist  $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow w = f(z) = |z|^n e^{in\varphi}$ , d.h.: der Winkel wird mit  $n$  multipliziert.

Beispiele

- $f(z) = z^2$ ,  $G = \{z \in \mathcal{C} : 0 < \arg z < \pi/2\} \Rightarrow f(G) = \{w \in \mathcal{C} : 0 < \arg w < \pi\}$ .
- $f(z) = z^2$ ,  $G = \{z \in \mathcal{C} : 0 < \arg z < \pi\}$   
 $\Rightarrow f(G) = \{w \in \mathcal{C} : 0 < \arg w < 2\pi\} = \mathcal{C} \setminus \{z = x \in [0, \infty)\}$ .

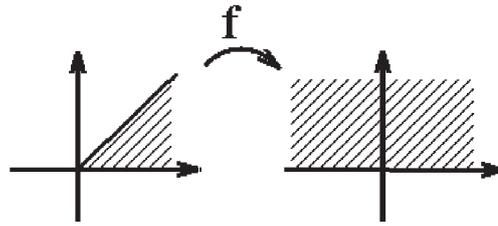


Beispiel 1.



Beispiel 2.

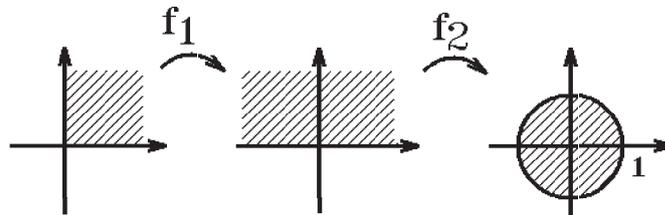
3.  $f(z) = z^4$ ,  $G = \{z \in \mathcal{C} : 0 < \arg z < \pi/4\} \Rightarrow f(G) = \{w \in \mathcal{C} : 0 < \arg w < \pi\}$ .



4. *Gesucht:* Das Innere des 1. Quadranten soll auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden.

Mit  $f_1(z) = z^2$ ,  $f_2(z) = \frac{iz + 1}{-iz + 1}$  gilt:

$$f(z) = f_2(f_1(z)) = \frac{iz^2 + 1}{-iz^2 + 1} = \frac{-z^2 + i}{z^2 + i}.$$



## 8. Exponential-Funktion

$$f(z) = e^z$$

$f$  ist stetig in  $\mathcal{C}$ , aber nicht eindeutig in  $\mathcal{C}$ .

Es gelten folgende Eigenschaften:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{Potenzreihe mit Konvergenzradius } R = \infty.$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \Rightarrow |e^{iy}| = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

$$|e^z| = |e^x| |e^{iy}| = e^x, \quad \arg(e^z) = y.$$

Also gilt

$$|e^z| = e^x, \quad \arg(e^z) = y, \quad \text{falls } z = x + iy$$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{da } e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Also ist die  $e$ -Funktion bzgl. des *Imaginärteils* von  $z$   $2\pi$ -periodisch, also in ganz  $\mathcal{C}$  nicht eineindeutig. Es gilt:

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Denn:

$$\begin{aligned} e^{z_1} = e^{z_2} &\Rightarrow |e^{z_1}| = |e^{z_2}| \quad \text{und} \quad \arg(e^{z_1}) = \arg(e^{z_2}) \\ &\Rightarrow e^{\operatorname{Re}(z_1)} = e^{\operatorname{Re}(z_2)} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

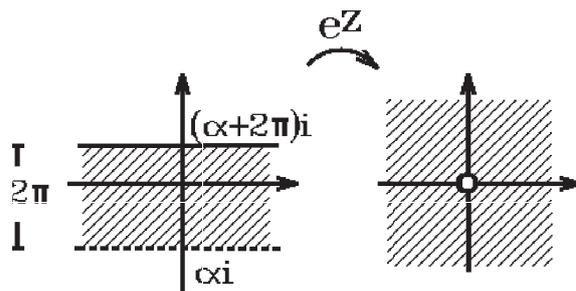
(umgekehrte Richtung siehe oben).

Weiter gilt, da  $|e^z| = e^x \neq 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathcal{C}$

$$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

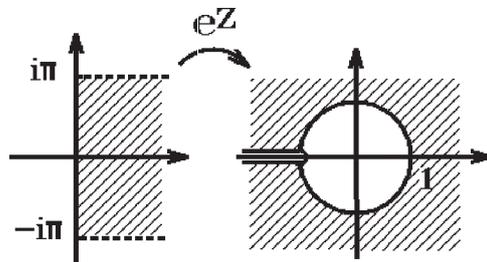
Also bildet  $e^z$  jeden *Streifen parallel zur reellen Achse der Breite  $< 2\pi$*  eineindeutig ab, also für  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt :

$$e^z : S_\alpha = \{z \in \mathcal{C} : \alpha < \operatorname{Im} z \leq \alpha + 2\pi\} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0\} \quad \text{eindeutig}$$



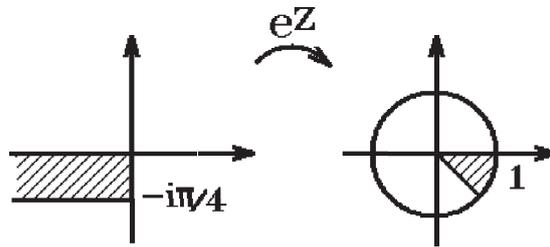
### Beispiele

1.  $f(z) = e^z$ ,  $G = \{z \in \mathcal{C} : \operatorname{Re} z > 0, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$   
 $\Rightarrow f(G) = \{w \in \mathcal{C} : |w| > 1, -\pi < \arg w < \pi\}$ .



Denn:  $\operatorname{Re} z = x > 0 \Rightarrow |e^z| = e^x > 1$ ;  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi \Rightarrow -\pi < \arg(e^z) < \pi$ .

2.  $f(z) = e^z$  ,  $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, -\pi/4 < \operatorname{Im} z < 0\}$   
 $\Rightarrow f(G) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1, -\pi/4 < \operatorname{arg} w < 0\}$  .



Denn:

$$\operatorname{Re} z = x < 0 \Rightarrow |e^z| = e^x < 1 \quad ; \quad -\pi/4 < \operatorname{Im} z < 0 \Rightarrow -\pi/4 < \operatorname{arg}(e^z) < 0 .$$

## 9. sin - ,cos - Funktion

$$f(z) = \sin z \quad , \quad f(z) = \cos z$$

$f$  ist stetig in  $\mathbb{C}$ , aber nicht eineindeutig in  $\mathbb{C}$ .

Es gelten folgende Eigenschaften: (vgl. S.136 ff , S.613 )

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad , \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad , \quad R = \infty .$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \quad ,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \quad ,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad ,$$

$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z \quad , \quad \cos(z + 2k\pi) = \cos z \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad ,$$

$\sin$  ,  $\cos$  -Funktionen sind  $2\pi$ -periodisch bzgl. des Realteils von  $z$  ,

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \quad , \quad \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad ,$$

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad ,$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad .$$

Anders als im Reellen nehmen  $\cos z$  und  $\sin z$  jeden Wert in  $\mathbb{C}$  an, denn Real- und Imaginärteil können jeden Wert in  $\mathbb{R}$  annehmen.

$\sin z$  und  $\cos z$  haben die gleichen Nullstellen wie die reellen  $\sin$  - und  $\cos$  -Funktionen ; es kommen keine Nullstellen hinzu, denn:

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 = e^0 \Leftrightarrow 2iz = 0 + 2k\pi i \Leftrightarrow z = k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

$$\begin{aligned} \cos z = 0 &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow 2iz = i\pi + 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

10. **sinh - ,cosh - Funktion**

$$f(z) = \sinh z \quad , \quad f(z) = \cosh z$$

$f$  ist stetig in  $\mathcal{C}$ , aber nicht eineindeutig in  $\mathcal{C}$ .

Es gelten folgende Eigenschaften:

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad , \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad , \quad R = \infty .$$

$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) \quad , \quad \cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) .$$

$$\begin{aligned} \cosh(iz) &= \cos(z) \quad , \quad \cos(iz) = \cosh(z) \\ \sinh(iz) &= i \sin(z) \quad , \quad \sin(iz) = i \sinh(z) \end{aligned}$$

Denn:

$$\cosh(iz) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z \quad , \quad \cos iz = \cosh(i(iz)) = \cosh(-z) = \cosh(z)$$

(alle anderen analog).

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow \cos iz = 0 \Leftrightarrow iz = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad , \quad l \in \mathbb{Z} .$$

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow \sin iz = 0 \Leftrightarrow iz = l\pi \quad , \quad l \in \mathbb{Z} \quad , \text{ also gilt}$$

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad , \quad \sinh z = 0 \Leftrightarrow z = ik\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

$$\cosh(z) = \cosh(x + iy) = \cosh x \cosh iy + \sinh x \sinh iy \Rightarrow$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \quad ,$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \quad (\text{analog}).$$

$$|\cosh z| = \sqrt{\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y} \quad ,$$

da  $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$  und  $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ , folgt hieraus:

$$|\cosh z| = \sqrt{\cos^2 y + \sinh^2 x} \quad ,$$

$$|\sinh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y} \quad (\text{analog}).$$

**5. Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen**

**Definition 15.13 :** differenzierbar

Sei  $f : D \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ,  $z_0 \in D$  innerer Punkt.

$f$  heißt (komplex) differenzierbar in  $z_0 \in D \Leftrightarrow$  es existiert ein  $a \in \mathcal{C}$

$$\text{mit } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \quad , \quad (z \in D \setminus \{z_0\}).$$

$f'(z_0) := a$  heißt dann *Ableitung* von  $f$  in  $z_0$ .

## Beispiele

- $f(z) = c$  (konstant,  $c \in \mathcal{C}$ ),  

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = 0 \Rightarrow f(z) = c \text{ ist differenzierbar in } \mathcal{C} \text{ mit}$$

$$f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}.$$
- $f(z) = z$  (Identitätsabbildung),  

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1 \Rightarrow f(z) = z \text{ ist differenzierbar in } \mathcal{C} \text{ mit}$$

$$f'(z) = 1 \quad \forall z \in \mathcal{C}.$$

Spalten wir die Funktion  $f$  in Real- und Imaginärteil auf, also

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{mit} \quad z = x + iy,$$

so wollen wir nun untersuchen, unter welchen Voraussetzungen an  $u$  und  $v$  die Funktion  $f$  differenzierbar ist:

Betrachten wir die Funktion  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und mit  $z_0 = x_0 + iy_0$  die Stelle  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in D$ , so gilt (vgl. S.272): Die Funktion  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  ist in  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  genau dann differenzierbar, wenn eine  $(2, 2)$ -Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  existiert mit

$$\lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) - a_{11}(x - x_0) - a_{12}(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0) - a_{21}(x - x_0) - a_{22}(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Existieren diese Grenzwerte, so ist:

$$a_{11} = u_x(x_0, y_0), \quad a_{12} = u_y(x_0, y_0), \quad a_{21} = v_x(x_0, y_0), \quad a_{22} = v_y(x_0, y_0).$$

Nun gilt aber

$$f \text{ (komplex) differenzierbar in } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - a(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0 \quad (\text{da } \left| \frac{z - z_0}{z - z_0} \right| = 1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (a_1 + ia_2)((x - x_0) + i(y - y_0))}{|z - z_0|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re} \left( \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (a_1 + ia_2)((x - x_0) + i(y - y_0))}{|z - z_0|} \right) = 0 \quad \text{und}$$

$$\operatorname{Im} \left( \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (a_1 + ia_2)((x - x_0) + i(y - y_0))}{|z - z_0|} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) - a_1(x - x_0) - (-a_2)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0) - a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

$\Leftrightarrow$   $u$  und  $v$  sind (reell) differenzierbar in  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  mit

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad , \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

*Cauchy – Riemannsches DGL*

Also gilt

**Satz 16.14 :** Sei  $f = u + iv : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ,  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$  (innerer Punkt).

Dann gilt:  $f$  ist in  $z_0$  (komplex) differenzierbar

$\Leftrightarrow$   $u$  und  $v$  sind in  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  (reell) differenzierbar mit

$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$  und  $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$  (Cauchy-Riemannsches DGL).

Es gilt dann:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

**Bemerkung :** Kriterium für reelle Differenzierbarkeit (vgl. Satz 8.23, S.264 )

Existieren in einer Umgebung von  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  die partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$ , und sind diese dort stetig, so sind  $u$  und  $v$  in  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  (reell) differenzierbar.

### Beispiele

1.  $f(z) = \bar{z}$  , also  $u(x, y) = x$  ,  $v(x, y) = -y$  (stetig partiell differenzierbar in  $\mathbb{R}^2$ ),  
 $u_x = 1 \neq v_y = -1 \Rightarrow f$  ist nirgends differenzierbar.
2.  $f(z) = |z|^2$  , also  $u(x, y) = x^2 + y^2$  ,  $v(x, y) \equiv 0$   
(stetig partiell differenzierbar in  $\mathbb{R}^2$ ),  
 $u_x = 2x = v_y = 0$  nur für  $x = 0$  ,  $u_y = 2y = -v_x = 0$  nur für  $y = 0$   
 $\Rightarrow f$  ist nur in  $z = 0$  differenzierbar mit  $f'(0) = 0$  .
3.  $f(z) = \operatorname{Re} z$  , also  $u(x, y) = x$  ,  $v(x, y) \equiv 0$  (stetig partiell differenzierbar in  $\mathbb{R}^2$ ),  
 $u_x = 1 \neq v_y = 0 \Rightarrow f$  ist nirgends differenzierbar.
4.  $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y \Rightarrow u(x, y) = e^x \cos y$  ,  $v(x, y) = e^x \sin y$   
(stetig partiell differenzierbar in  $\mathbb{R}^2$ ),  
 $u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y)$  ,  $u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y) \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$   
 $\Rightarrow f(z) = e^z$  ist differenzierbar in  $\mathbb{C}$  mit  $(e^z)' = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$  ,  
denn:  $(e^z)' = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$  .

Da die komplexe Differenzierbarkeit über den Grenzwert des Differenzenquotienten definiert ist (also analog wie die reelle Differenzierbarkeit von reellen Funktionen), gelten viele Eigenschaften wie bei reellen Funktionen (die Beweise verlaufen alle analog).

**Satz 16.15 :** Seien  $f$  und  $g$  in  $z_0 \in D(f) \subset \mathcal{C}$  differenzierbar. Dann gilt:

- a)  $f$  ist stetig in  $z_0$ .
- b)  $f + g$  ist differenzierbar in  $z_0$  mit  $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$ .
- c)  $f \cdot g$  ist differenzierbar in  $z_0$  mit  $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$  (Produktregel).
- d)  $\frac{f}{g}$  ist differenzierbar in  $z_0$  (falls  $g(z_0) \neq 0$ ) mit  $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$  (Quotientenregel).
- e) Ist  $f$  in  $z_0$  differenzierbar und  $g$  in  $f(z_0)$  differenzierbar, so ist  $h = g \circ f$  in  $z_0$  differenzierbar mit  $h'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$  (Kettenregel).

### Beispiele

1.  $\sin' z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})' = \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$ ,  
 $\cos' z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})' = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z$   
 $\Rightarrow \sin' z = \cos z$ ,  $\cos' z = -\sin z \quad \forall z \in \mathcal{C}$ .
2.  $f(z) = z^n \Rightarrow f'(z) = nz^{n-1}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\forall z \in \mathcal{C}$ .
3.  $f(z) = e^{\sin z} \Rightarrow f'(z) = \cos z e^{\sin z} \quad \forall z \in \mathcal{C}$ .

**Definition 16.16 :** holomorph

- a)  $f : D \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  heißt holomorph in  $z_0 \in D$ , wenn  $f$  in einer ganzen Umgebung von  $z_0$  differenzierbar ist.
- b)  $f$  heißt holomorph in  $D$ , wenn  $f$  in jedem  $z \in D$  holomorph ist.

### Bemerkung :

Ist  $G$  Gebiet und  $f$  differenzierbar in  $G \Rightarrow f$  ist holomorph in  $G$ .

Denn:

Sei  $z_0 \in G \Rightarrow \exists U(z_0) \subset G$  (da  $G$  Gebiet, also offen). Da  $f$  differenzierbar in  $G \Rightarrow f$  ist differenzierbar in  $U(z_0) \Rightarrow f$  ist holomorph in  $z_0$ .

Da  $z_0 \in G$  beliebig  $\Rightarrow f$  ist holomorph in  $G$ .

Ist  $G$  kein Gebiet, so gilt diese Aussage i.a. nicht.

## Beispiele

1.  $f(z) = |z|^2 \Rightarrow f$  ist nur in  $z_0 = 0$  differenzierbar (vgl. Beispiel 2, S.629)  
 $\Rightarrow f$  ist *nirgends* holomorph.
2.  $f(z) = z^n$ ,  $f(z) = e^z$ ,  $f(z) = \sin z$ ,  $f(z) = \cos z$ ,  $f(z) = \sinh z$ ,  $f(z) = \cosh z$   
sind *holomorph* in  $\mathcal{C}$  (da jeweils differenzierbar in  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}$  Gebiet).

Anders als bei reeller Differenzierbarkeit gilt für holomorphe Funktionen der folgende Satz, dessen Beweis wir erst später zeigen werden:

### Satz 16.17 :

Sei  $G \subset \mathcal{C}$  Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $G$ .

Dann gilt:  $f$  ist *beliebig oft differenzierbar* (also auch *beliebig oft holomorph*) in  $G$ .

*Beweis* : (später).

Da für eine in  $G$  holomorphe Funktion  $f = u + iv$  gilt:

$u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  in  $G \Rightarrow u_{xx} = v_{yx}$ ,  $u_{yy} = -v_{xy} = -v_{yx}$  in  $G$  (da alle partiellen Ableitungen höherer Ordnung existieren und stetig sind), also gilt

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{in } G$$

(2. Gleichung analog).

Also gilt der folgende Satz:

### Satz 16.18 :

Sei  $G \subset \mathcal{C}$  Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $G$ .

Dann sind  $u = \operatorname{Re}(f)$  und  $v = \operatorname{Im}(f)$  *harmonische Funktionen* in  $G$ ,

d.h.: es gilt  $\Delta u = 0$  und  $\Delta v = 0$  in  $G$ .

Hieraus folgt: Nur *harmonische* Funktionen können Real - oder Imaginärteil einer in einem Gebiet  $G$  *holomorphen* Funktion  $f$  sein.

## Beispiel

Für welche  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$  ist  $u(x, y) = x\varphi(y)$  der Realteil einer in  $\mathcal{C}$  holomorphen Funktion  $f$ ? Wie lautet dann die Funktion  $f(z)$ ?

*Notwendige Bedingung:*

$$\Delta u = 0, \text{ also } u_x = \varphi(y), u_{xx} = 0, u_y = x\varphi'(y), u_{yy} = x\varphi''(y)$$

$$\Rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = x\varphi''(y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = cy + d \quad \text{mit } c, d \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = cxy + dx, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

*Bestimmung des zugehörigen Imaginärteils:*

Es muß gelten:  $v_y = u_x = cy + d$  und  $v_x = -u_y = -cx$   
 $\Rightarrow v(x, y) = \int (cy + d) dy + h(x) = \frac{c}{2}y^2 + dy + h(x)$  ,  
 $v_x = h'(x) = -u_y = -cx \Rightarrow h(x) = -\frac{c}{2}x^2 + e$  ,  $e \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow v(x, y) = \frac{c}{2}(y^2 - x^2) + dy + e$  ,  $c, d, e \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = cxy + dx + i\left(\frac{c}{2}(y^2 - x^2) + dy + e\right)$   
 $= \frac{c}{2}\left(2xy + i(y^2 - x^2)\right) + d(x + iy) + ie = -\frac{ic}{2}z^2 + dz + ie$  ,  $c, d, e \in \mathbb{R}$   
(da  $z = x + iy$  und  $z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \Rightarrow -iz^2 = 2xy + i(y^2 - x^2)$  ).

## 6. Umkehrfunktionen

### a) Lokale Umkehrbarkeit

Sei  $f : D \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ,  $z_0 \in D$  (innerer Punkt). Ist  $f$  holomorph in  $z_0$ , so existiert  $U(z_0) \subset D$  mit  $f$  ist holomorph in  $U(z_0)$ . Da  $U(z_0)$  Gebiet  $\Rightarrow f$  ist beliebig oft holomorph in  $U(z_0)$ . Also ist  $f'(z)$  stetig in  $U(z_0)$ .

#### Satz 16.19 : Lokale Umkehrfunktion

Ist  $f : D \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $z_0 \in D$  (innerer Punkt) mit  $f'(z_0) \neq 0$ , so existiert eine Umgebung  $\tilde{U}(z_0) \subset D$  mit:  $f : \tilde{U}(z_0) \rightarrow f(\tilde{U}(z_0))$  ist eineindeutig. Die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(\tilde{U}(z_0)) \rightarrow \tilde{U}(z_0)$  ist holomorph in  $w_0 = f(z_0)$  mit

$$f^{-1}'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \quad , \quad w_0 = f(z_0) \quad , \quad z_0 = f^{-1}(w_0)$$

*Beweis :*

$u_x, u_y, v_x, v_y$  sind stetig in  $U\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$ , da  $f'$  stetig in  $U(z_0)$ .

Da  $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \hat{U}\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) \subset U\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$  mit

$$\det \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} = u_x^2(x, y) + v_x^2(x, y) = |f'(z)|^2 \neq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \hat{U}\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right).$$

Also ist die Funktion  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  nach Satz 8.39 (S.287) lokal umkehrbar. Es existiert also

$\tilde{U}(z_0) \subset D$  mit:  $f : \tilde{U}(z_0) \rightarrow f(\tilde{U}(z_0))$  ist eineindeutig. Für die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  mit  $f^{-1} : f(\tilde{U}(z_0)) \rightarrow \tilde{U}(z_0)$  gilt mit  $w = f(z), \tilde{w} = f(\tilde{z})$ :

$$\lim_{w \rightarrow \tilde{w}} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(\tilde{w})}{w - \tilde{w}} = \lim_{z \rightarrow \tilde{z}} \frac{z - \tilde{z}}{f(z) - f(\tilde{z})} = \frac{1}{f'(\tilde{z})} \quad \forall \tilde{w} \in f(\tilde{U}(z_0)) .$$

### Beispiele

- $f(z) = z^n$  ,  $n \geq 2 \Rightarrow f$  holomorph in  $\mathcal{C}$  mit  $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow f$  ist lokal umkehrbar in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ ,  $f$  ist aber nicht global umkehrbar in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ , da  $f$  nicht eineindeutig in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$  (vgl. S.623).

Z.B.:  $n = 2$ :  $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \Rightarrow$  für  $f^{-1}(w) = w^{1/2}$  lokal in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ :  
 $f^{-1}'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{2z} = \frac{1}{2w^{1/2}}$  (da  $f^{-1}(w) = z \Leftrightarrow z^2 = w$ ).

2.  $f(z) = e^z \Rightarrow f$  holomorph in  $\mathcal{C}$  mit  $f'(z) = e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}$   
 $\Rightarrow f$  ist lokal umkehrbar in  $\mathcal{C}$ ,  $f$  ist aber nicht global umkehrbar in  $\mathcal{C}$ , da  $f$  nicht eineindeutig in  $\mathcal{C}$  (vgl. S.624).

Für  $f^{-1}(w)$  folgt lokal:  $f^{-1}'(w) = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}$  (da  $f^{-1}(w) = z \Leftrightarrow e^z = w$ ).

b) Globale Umkehrbarkeit

**Beispiel 1. Potenzfunktion**

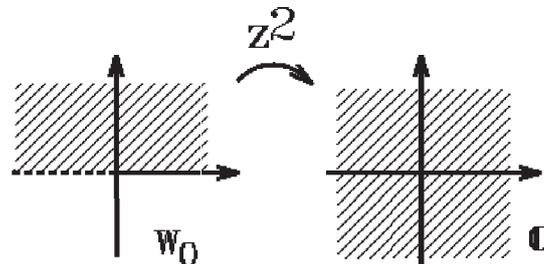
$$f(z) = z^2$$

Da für  $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow w = f(z) = z^2 = |z|^2 e^{i2\varphi}$ , wird der Winkelbereich des Urbildes verdoppelt. Also gilt für jede Halbebene  $W_\alpha = \{z \in \mathcal{C} : \alpha \leq \arg z < \alpha + \pi\}$ :

$f : W_\alpha \rightarrow \mathcal{C}$  ist eineindeutig, und es existiert  $f^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow W_\alpha$ .

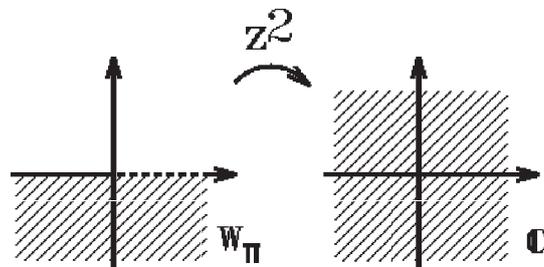
Z.B.:  $f : W_0 = \{z \in \mathcal{C} : 0 \leq \arg z < \pi\} \rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow f^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow W_0$  mit

$f^{-1} : w = |w|e^{i\varphi}$  (mit  $0 \leq \varphi < 2\pi$ )  $\mapsto f^{-1}(w) = \sqrt{|w|}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ .



Oder:  $f : W_\pi = \{z \in \mathcal{C} : \pi \leq \arg z < 2\pi\} \rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow f^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow W_\pi$  mit

$f^{-1} : w = |w|e^{i\varphi}$  (mit  $0 \leq \varphi < 2\pi$ )  $\mapsto f^{-1}(w) = \sqrt{|w|}e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)}$ .



Unter dem *Hauptwert* verstehen wir

$$f^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow W_0 = \{z \in \mathcal{C} : 0 \leq \arg z < \pi\}$$

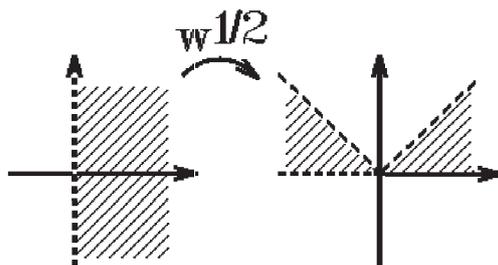
$$w \mapsto w^{1/2} = \sqrt{|w|} e^{i\frac{\varphi}{2}} \quad , \quad w = |w|e^{i\varphi} \quad , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

**Beispiel hierzu:**  $f^{-1}$  *Hauptwert*

$$G = \{w \in \mathcal{C} : -\pi/2 < \arg w < \pi/2\}$$

$$= \{w = |w|e^{i\varphi} \in \mathcal{C} : 0 \leq \varphi < \pi/2, 3\pi/2 < \varphi < 2\pi\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(G) = \{z = w^{1/2} = |z|e^{i\psi} : 0 \leq \psi < \pi/4, 3\pi/4 < \psi < \pi\} .$$



*Allgemeiner Fall:*  $f(z) = z^n$  ,  $n \in \mathbb{N}$  ,  $n \geq 2$  .

$$f(z) = z^n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad n \geq 2$$

Analog wird hier jeder *Winkelbereich*  $W_\alpha = \{z \in \mathcal{C} : \alpha \leq \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n}\}$  eindeutig auf  $\mathcal{C}$  abgebildet.

Unter dem *Hauptwert* verstehen wir

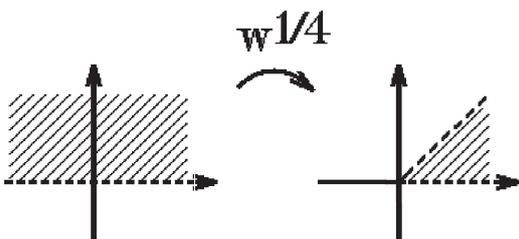
$$f^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow W_0 = \{z \in \mathcal{C} : 0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$$

$$w \mapsto w^{1/n} = \sqrt[n]{|w|} e^{i\frac{\varphi}{n}} \quad , \quad w = |w|e^{i\varphi} \quad , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

**Beispiel hierzu:**  $f^{-1}$  *Hauptwert* ,  $n = 4$  :

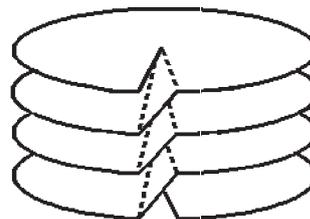
$$G = \{w \in \mathcal{C} : 0 < \arg w < \pi\} = \{w = |w|e^{i\varphi} \in \mathcal{C} : 0 < \varphi < \pi\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(G) = \{z = w^{1/4} = |z|e^{i\psi} : 0 < \psi < \pi/4\} .$$



**Bemerkung :** *Riemannsche Fläche*

Um eine "globale" Umkehrfunktion auf ganz  $\mathcal{C}$  zu erhalten, müßte man  $\mathcal{C}$  in  $n$  Winkelbereiche aufteilen und jeden dieser Winkelbereiche auf eine  $\mathcal{C}$ -Ebene abbilden. Diese  $n$   $\mathcal{C}$ -Ebenen müßte man dann "aneinanderheften". Auf dieser "Riemannschen Fläche" ist dann  $f^{-1}$  eindeutig erklärt.

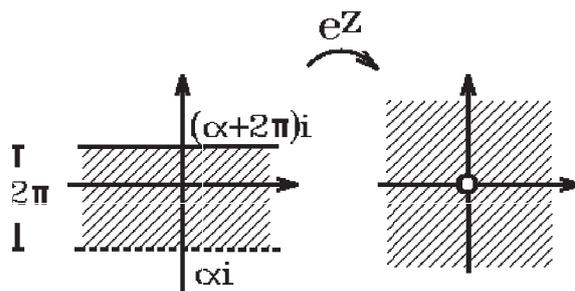


**Beispiel 2.** *Exponentialfunktion*

$$f(z) = e^z$$

Da  $f(z) = e^z$   $2\pi$ -periodisch bzgl. des Imaginärteils von  $z$  ist, also  $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ , bildet  $f(z) = e^z$  jeden Streifen parallel zur reellen Achse der Breite  $< 2\pi$ , also

$S_\alpha = \{z \in \mathcal{C} : \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}, \alpha < \operatorname{Im} z \leq \alpha + 2\pi\}$  eindeutig auf  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$  ab.  
 $\Rightarrow e^z : S_\alpha \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0\}$  eindeutig mit  $f^{-1} : \mathcal{C} \setminus \{0\} \rightarrow S_\alpha$ .



$$\begin{aligned} e^z = w &\Leftrightarrow e^{x+iy} = e^x e^{iy} = w = |w| e^{i\varphi} \Leftrightarrow e^x = |w| \quad \text{und} \quad \varphi = y + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \ln |w| \quad \text{und} \quad y = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z = \ln |w| + i(\arg w + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also gilt

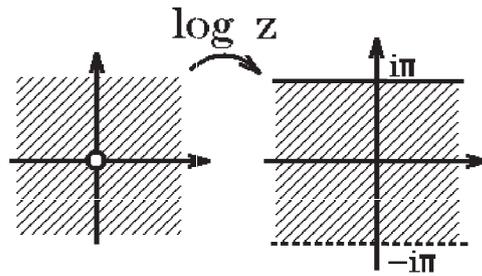
$$\log_{(\alpha)} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad \text{mit} \quad \alpha < \arg z + 2k\pi \leq \alpha + 2\pi$$

Unter dem *Hauptwert* verstehen wir

$$f^{-1} : \mathcal{C} \setminus \{0\} \rightarrow S_{-\pi} = \{z \in \mathcal{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

Damit erhalten wir für den *Hauptwert*:

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \quad \text{mit} \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$



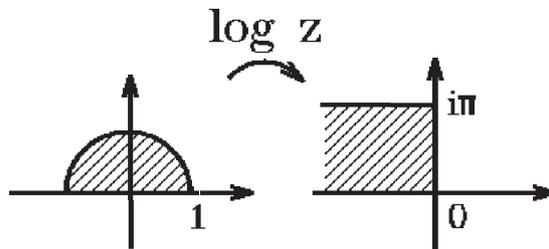
$\log z$  Hauptwert

**Beispiel hierzu:**  $\log z$  Hauptwert

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \Rightarrow \log(G) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0, 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}.$$

$$\text{Denn: } w = \log z = \ln |z| + i \arg z = \operatorname{Re} w + i \operatorname{Im} w,$$

$$|z| < 1 \Rightarrow \operatorname{Re} w = \ln |z| < 0, \quad 0 < \arg z < \pi \Rightarrow 0 < \operatorname{Im} w = \arg z < \pi.$$



**Bemerkung :** *Riemannsche Fläche*

Auch hier kann man wieder mit Hilfe einer *Riemannschen Fläche* eine "globale" Umkehrfunktion  $\log z$  erhalten. In diesem Fall müssen unendlich viele  $\mathbb{C}$ -Ebenen "aneinandergeheftet" werden.

**Bemerkung :**

Für  $z = x > 0$  gilt für den *Hauptwert*:  $\log z = \ln x$ , ( $z = x > 0$ ).

Also ist der *Hauptwert*  $\log z$  die Erweiterung der reellen  $\ln x$  Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Bemerkung :** *Ableitung von  $\log z$*

Als Umkehrfunktion der holomorphen Funktion  $e^z$  ist  $\log z$  in  $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$  holomorph mit der Ableitung:

$$\log' z = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \Rightarrow \log' z = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

**Beispiele für den Hauptwert**  $\log z = \ln |z| + i \arg z$ , ( $-\pi < \arg z \leq \pi$ ).

$$\log(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi, \quad \log(1) = \ln 1 = 0,$$

$$\log(i) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}, \quad \log(-i) = \ln 1 + i\frac{-\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2}.$$

### Beispiel 3. Allgemeine Potenzfunktion

$$f(z) = z^a = e^{a \log z}, \quad a \in \mathbb{C}$$

Hierbei wird für den *Hauptwert* von  $z^a$  der *Hauptwert* von  $\log z$  genommen.

**Beispiele für den Hauptwert:**

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}, \quad (-1)^i = e^{i \log(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}.$$

**Bemerkung :**

Für  $z = x > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , gilt  $z^a = e^{a \ln x} = x^a$ .

**Bemerkung :**

Für  $a = 1/n$  erhalten wir:

$$z^{1/n} = e^{(1/n) \log z} = e^{(1/n)(\ln |z| + i \arg z)} = e^{(1/n) \ln |z|} e^{i(1/n) \arg z}$$

$$\Rightarrow z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z}{n}}, \quad (-\pi < \arg z \leq \pi).$$

Dies stimmt mit dem Hauptwert der Umkehrfunktion von  $z^n$  im Bereich  $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z \leq \pi\}$  überein.

**Bemerkung :** *Ableitung von  $f(z) = z^a$*

$f(z) = z^a$  ist holomorph in  $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$  mit der Ableitung

$$(z^a)' = (e^{a \log z})' = \frac{a}{z} e^{a \log z} = a z^{a-1}.$$

### Beispiel 4. sin-, cos-Funktion

$$\sin z = w \Rightarrow \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = w \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 2iw$$

$$\Rightarrow e^{2iz} - 1 = 2iwe^{iz} \Rightarrow e^{2iz} - 2iwe^{iz} - w^2 = 1 - w^2$$

$$\Rightarrow (e^{iz} - iw)^2 = 1 - w^2 \Rightarrow e^{iz} - iw = (1 - w^2)^{1/2} \quad (\text{Hauptwert benutzen})$$

$$\Rightarrow e^{iz} = iw + (1 - w^2)^{1/2} \Rightarrow iz = \log(iw + (1 - w^2)^{1/2}) \quad (\text{Hauptwert benutzen})$$

$$\Rightarrow z = -i \log(iw + (1 - w^2)^{1/2}).$$

Also definieren wir als *Hauptwert*

$$\arcsin z = -i \log(iw + (1 - z^2)^{1/2})$$

$$\arccos z = -i \log(z + i(1 - z^2)^{1/2})$$

(2. Gleichung analog).

Hierbei muß bei der Potenzfunktion und bei der  $\log$ -Funktion jeweils der Hauptwert genommen werden.

**Beispiel hierzu:**

$$\arcsin 1 = -i \log(i) = -i(i\pi/2) = \pi/2,$$

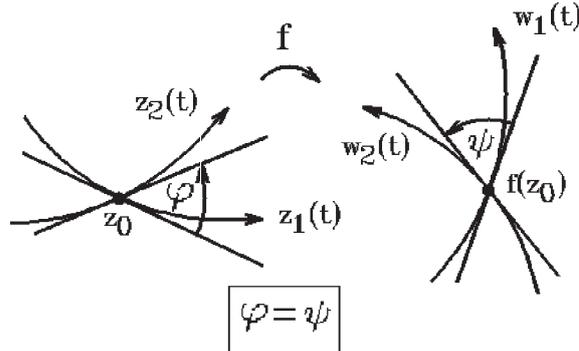
$$\arcsin i = -i \log(i \cdot i + (1 - i^2)^{1/2}) = -i \log(-1 + \sqrt{2}) = -i \ln(\sqrt{2} - 1).$$

## 7. Konforme Abbildungen

**Definition 16.21 :** *winkeltreu*

Sei  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$  (innerer Punkt).

$f$  heißt *winkeltreu* in  $z_0$ , wenn für alle Kurven  $\{z = z_1(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ ,  $\{z = z_2(t) : t \in [\gamma, \delta]\}$ , die sich in  $z_0$  schneiden und die in  $z_0$  Tangenten besitzen, auch die Bildkurven  $\{w = w_1(t) = f(z_1(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$ ,  $\{w = w_2(t) = f(z_2(t)) : t \in [\gamma, \delta]\}$  in  $f(z_0)$  Tangenten besitzen und die *Winkel zwischen den Tangentenvektoren nach Größe und Drehsinn übereinstimmen*.



**Satz 16.22 :**

Ist  $f$  holomorph in  $z_0$  mit  $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$  ist *winkeltreu* in  $z_0$ .

*Beweis :*

Seien  $\{z = z_1(t) : t \in [-1, 1]\}$ ,  $\{z = z_2(t) : t \in [-1, 1]\}$  zwei Kurven mit  $z_1(0) = z_2(0) = z_0$  und

$\{w = w_1(t) = f(z_1(t)) : t \in [-1, 1]\}$ ,  $\{w = w_2(t) = f(z_2(t)) : t \in [-1, 1]\}$  die Bildkurven. Dann gilt:

$z_1'(0) \neq 0$ ,  $z_2'(0) \neq 0$  (da Tangenten existieren)

$\Rightarrow w_1'(0) = f'(z_1(0))z_1'(0) = f'(z_0)z_1'(0) \neq 0$  und

$\Rightarrow w_2'(0) = f'(z_2(0))z_2'(0) = f'(z_0)z_2'(0) \neq 0$  (da  $f'(z_0) \neq 0$ )

$\Rightarrow \frac{w_2'(0)}{w_1'(0)} = \frac{z_2'(0)}{z_1'(0)}$ .

Ist  $z_k'(0) = |z_k'(0)|e^{i\varphi_k}$ ,  $w_k'(0) = |w_k'(0)|e^{i\psi_k}$ , ( $k = 1, 2$ ), so folgt

$|\frac{z_2'(0)}{z_1'(0)}|e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = |\frac{w_2'(0)}{w_1'(0)}|e^{i(\psi_2 - \psi_1)}$

$\Rightarrow e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = e^{i(\psi_2 - \psi_1)} \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \psi_2 - \psi_1 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$  die Winkel stimmen nach Größe und Drehsinn überein.

**Definition 16.23 :** *streckentreu*

Sei  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$  (innerer Punkt).

$f$  heißt *streckentreu* in  $z_0$ , wenn eine Konstante  $K > 0$  existiert mit

$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = K > 0$ .

D.h. ungefähr: Die Verhältnisse der Strecken von  $z$  nach  $z_0$  und der entsprechenden Bildstrecken von  $f(z)$  nach  $f(z_0)$  sind im Grenzverhalten gleich.

**Satz 16.24 :**

Ist  $f$  holomorph in  $z_0$  mit  $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$  ist streckentreu in  $z_0$ .

*Beweis :*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)| > 0 .$$

**Definition 16.25 :** lokal konform , konform

Sei  $f : G \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ,  $G$  Gebiet.

- a)  $f$  heißt lokal konform in  $G$ , wenn  $f$  in allen  $z \in G$  winkel- und streckentreu ist.
- b)  $f$  heißt konform in  $G$ , wenn  $f$  lokal konform und eineindeutig in  $G$  ist.

**Satz 16.26 :**

Sei  $f : G \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ,  $G$  Gebiet.

- a) Ist  $f$  holomorph in  $G$  mit  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$   
 $\Rightarrow f$  ist lokal konform in  $G$ .
- b) Ist  $f$  holomorph in  $G$  mit  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$  und eineindeutig in  $G$   
 $\Rightarrow f$  ist konform in  $G$ .

*Beweis :* Diese Aussagen folgen sofort aus Satz 16.22 und Satz 16.24.

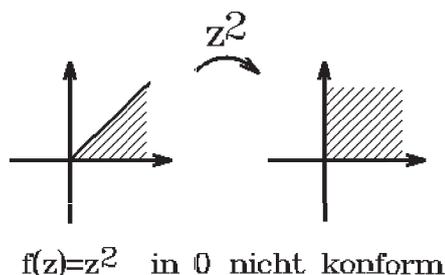
**Beispiele**

- 1.  $f(z) = az$  ,  $a \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$  fest (Drehstreckung).  
 $f$  ist holomorph in  $\mathcal{C}$  mit  $f'(z) = a \neq 0$  ,  $f$  ist eineindeutig in  $\mathcal{C}$  (Gebiet)  
 $\Rightarrow f$  ist konform in  $\mathcal{C}$ .
- 2.  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  ,  $ad - bc \neq 0$  (gebrochen lineare Abbildung).  
 $f$  ist holomorph und eineindeutig in  $\mathcal{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$  ,  
 $f'(z) = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$  in  $\mathcal{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$   
 $\Rightarrow f$  ist konform in  $\mathcal{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ .
- 3.  $f(z) = z^n$  ,  $n \geq 2$  (Potenzfunktion).  
 $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$  , also:  
 $f$  ist holomorph mit  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$   
 $\Rightarrow f$  ist lokal konform in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ .

Da  $f$  eindeutig in jedem Winkelbereich  $W_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n}\} \Rightarrow$   
 $f$  ist *konform* in jedem Winkelbereich  $W_\alpha \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit Winkel  $< \frac{2\pi}{n}$ .

$f$  ist in  $z = 0$  nicht (lokal) konform, denn in  $z = 0$  werden die Winkel mit dem Faktor  $n$  multipliziert.

Z.B.:  $f(z) = z^2$



4.  $f(z) = e^z$  (*Exponentialfunktion*).

$f'(z) = e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ , also:

$f$  ist holomorph mit  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$  ist *lokal konform* in  $\mathbb{C}$ .

Da  $f$  eindeutig in jedem Streifen  $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$  (parallel zur reellen Achse)  $\Rightarrow$

$f$  ist *konform* in jedem Streifen  $S_\alpha \subset \mathbb{C}$  der Breite  $< 2\pi$ .

5.  $f(z) = \log z$  (*Logarithmusfunktion*, *Hauptwert*).

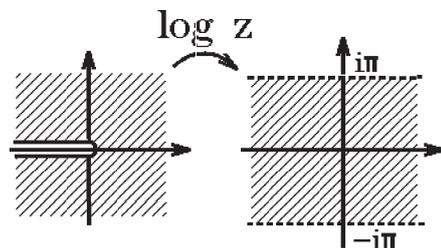
$f'(z) = \frac{1}{z} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ , also:

$f$  ist holomorph mit  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

$\Rightarrow f$  ist *lokal konform* in  $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ .

Da  $f$  eindeutig in  $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \Rightarrow$

$f$  ist *konform* in  $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ .



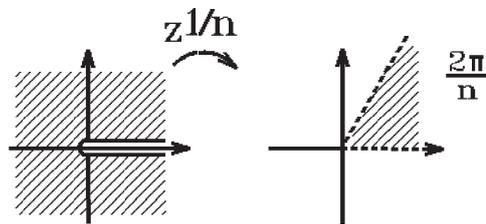
6.  $f(z) = z^{1/n}$  (*Wurzelfunktion*, *Hauptwert*).

$f'(z) = \frac{1}{n} z^{1/n-1} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ , also:

$f$  ist holomorph mit  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\Rightarrow f$  ist lokal konform in  $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ .

Da  $f$  eindeutig in  $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \Rightarrow f$  ist konform in  $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ .



### Satz 16.27 :

Seien  $f_1 : G_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f_2 : G_2 = f_1(G_1) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G_1, G_2$  Gebiete.

Ist  $f_1$  konform in  $G_1$  und  $f_2$  konform in  $G_2 = f_1(G_1)$

$\Rightarrow f = f_2 \circ f_1$  ist konform in  $G_1$ .

*Beweis :*

Eine Hintereinanderschichtung von streckentreuen, winkeltreuen und eindeutigen Abbildungen besitzt wieder diese Eigenschaften.

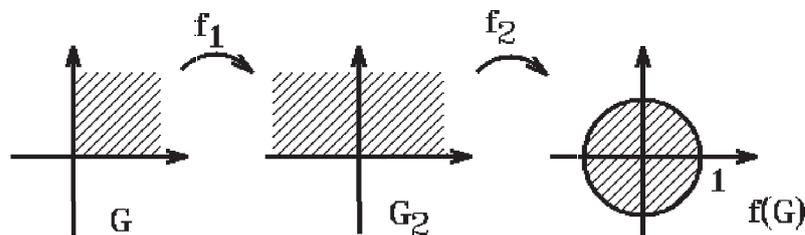
### Beispiele

1.  $f(z) = \frac{-z^2 + i}{z^2 + i}$ ,  $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ .

*Gesucht:*  $f(G)$ . *Frage:* Bildet  $f$  das Gebiet  $G$  konform auf  $f(G)$  ab?

Wir zerlegen  $f$  in die folgenden "Standardabbildungen"

$f_1(z) = z^2$ ,  $f_2(z) = \frac{-z + i}{z + i}$ , die wir einfacher untersuchen können. Es gilt dann  $f(z) = f_2(f_1(z))$ .



$$G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi/2\} \Rightarrow G_2 = f_1(G) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi\}$$

$$\Rightarrow f(G) = f_2(G_2) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$$

(vgl. Beispiel 1, S.618 :  $f(z) = \frac{iz + 1}{-iz + 1} = \frac{-z + i}{z + i}$ ).

$f_1$  ist konform in  $G$ , da  $z = 0 \notin G$  und der Winkelbereich einen Winkel  $< (2\pi/2) = \pi$  hat,  
 $f_2$  ist konform in  $G_2$ , da gebrochen lineare Abbildung mit  $(-i) \notin G_2$   
 $\Rightarrow f$  ist konform in  $G$ , also:  
 $f$  bildet  $G$  konform auf  $f(G) = \{w \in \mathcal{C} : |w| < 1\}$  ab.

2.  $f(z) = \left(\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}\right)^2 + i$ ,  $G = \{z \in \mathcal{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$ .

Gesucht:  $f(G)$ . Frage: Bildet  $f$  das Gebiet  $G$  konform auf  $f(G)$  ab?

Wir zerlegen  $f$  in die folgenden "Standardabbildungen"

$f_1(z) = 2iz$ ,  $f_2(z) = e^z$ ,  $f_3(z) = \frac{z+1}{z-1}$ ,  $f_4(z) = z^2$ ,  $f_5(z) = z+i$ .

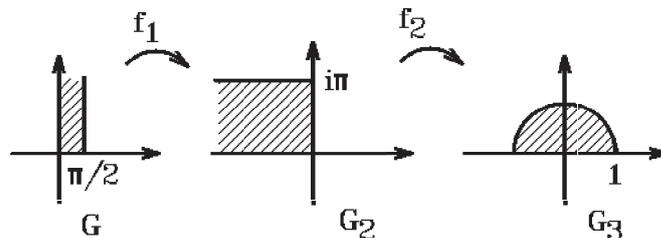
Es gilt dann  $f(z) = f_5(f_4(f_3(f_2(f_1(z))))))$ .

$G = \{z \in \mathcal{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$

$\Rightarrow G_2 = f_1(G) = \{z \in \mathcal{C} : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$

(Drehstreckung: Drehung um den Winkel  $\pi/2$ , Streckung mit dem Faktor 2)

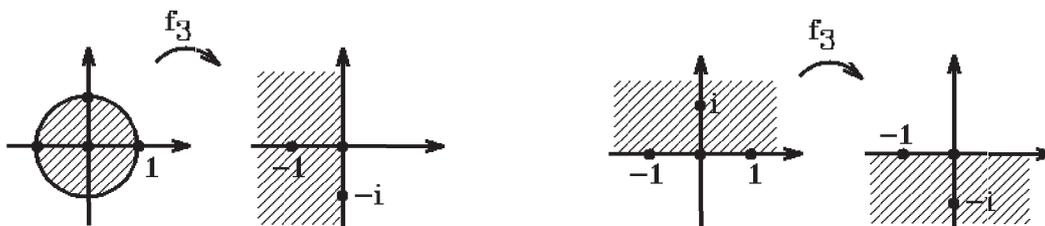
$\Rightarrow G_3 = f_2(G_2) = \{z \in \mathcal{C} : |z| < 1, 0 < \arg z < \pi\}$  ( $e^z$ -Funktion).



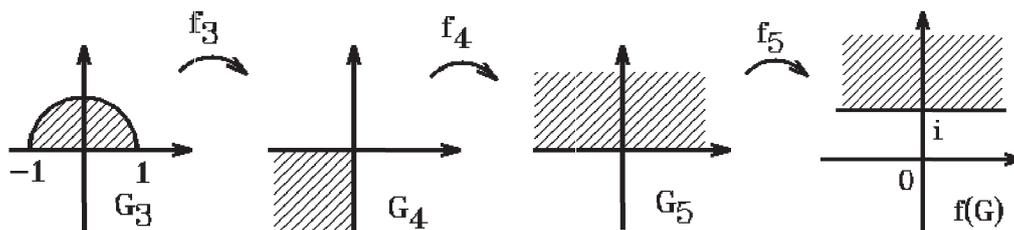
Nebenrechnung:  $f_3(z) = \frac{z+1}{z-1}$  (gebrochen lineare Abbildung)

$z$	1	$\infty$	-1	0	$i$
$f_3(z)$	$\infty$	1	0	-1	$-i$

Es gilt die Kreisverwandtschaft:



Also gilt



$$G_4 = f_3(G_3) = \{z \in \mathcal{C} : \pi < \arg z < 3\pi/2\},$$

$$G_5 = f_4(G_4) = \{z \in \mathcal{C} : 2\pi < \arg z < 3\pi\} = \{z \in \mathcal{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \quad (f_4(z) = z^2),$$

$$f(G) = f_5(G_5) = \{w \in \mathcal{C} : \operatorname{Im} w > 1\}.$$

$f_1$  ist konform in  $G$ , da Drehstreckung,

$f_2$  ist konform in  $G_2$ , da Streifenbreite  $< 2\pi$ ,

$f_3$  ist konform in  $G_3$ , da  $z = 1 \notin G_3$ ,

$f_4$  ist konform in  $G_4$ , da  $z = 0 \notin G_4$  und Winkelbereich  $< \pi$ ,

$f_5$  ist konform in  $G_5$ , da Translation (konform in  $\mathcal{C}$ )

$\Rightarrow f$  ist konform in  $G$ , also:

$f$  bildet  $G$  konform auf  $f(G) = \{w \in \mathcal{C} : \operatorname{Im} w > 1\}$  ab.

*Frage:* Seien  $G_1, G_2$  zwei Gebiete in  $\mathcal{C}$ . Gibt es eine *konforme* Abbildung  $f : G_1 \rightarrow G_2$  mit  $f(G_1) = G_2$ ?

Die Antwort auf diese Frage liefert der folgende Satz, den ich hier ohne Beweis zitieren möchte:

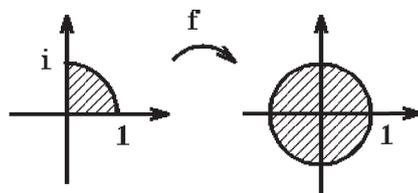
**Satz 16.28 :** *Riemannscher Abbildungssatz*

Seien  $G_1, G_2 \subset \mathcal{C}$  einfach zusammenhängende Gebiete mit  $G_1 \neq \mathcal{C}$ ,  $G_2 \neq \mathcal{C}$ .

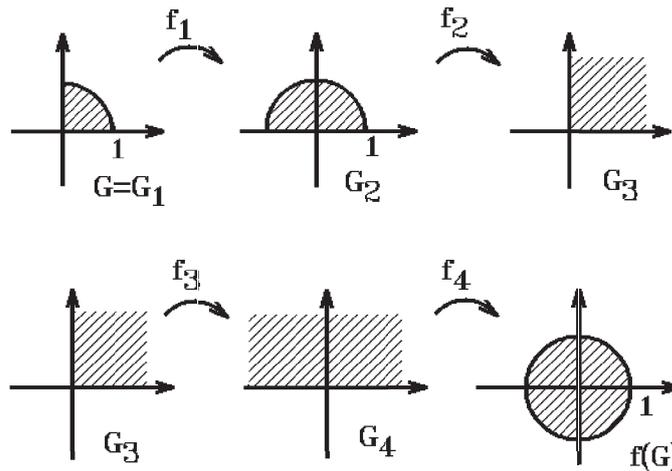
Dann existiert eine *konforme* Abbildung  $f : G_1 \rightarrow G_2$  mit  $f(G_1) = G_2$ .

### Beispiele

- $G = \{z \in \mathcal{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $\tilde{G} = \{w \in \mathcal{C} : |w| < 1\}$ .



*Gesucht:*  $f$  konform mit  $f(G) = \tilde{G}$ .



Also:  $f_1(z) = z^2$  ,  $f_2(z) = \frac{-iz + i}{z + 1}$  (vgl. Umkehrabbildung aus Beispiel 2, S.619),

$f_3(z) = z^2$  ,  $f_4(z) = \frac{iz + 1}{-iz + 1}$  (vgl. Beispiel 1, S.618).

Insgesamt erhalten wir dann

$$f(z) = f_4(f_3(f_2(f_1(z)))) = f_4\left(\left(\frac{-iz^2 + i}{z^2 + 1}\right)^2\right) = \frac{i\left(\frac{-iz^2 + i}{z^2 + 1}\right)^2 + 1}{-i\left(\frac{-iz^2 + i}{z^2 + 1}\right)^2 + 1}$$

$$= (-i) \frac{z^4 + 2iz^2 + 1}{z^4 - 2iz^2 + 1}.$$

$f_1$  ist konform in  $G_1 = G$ , da  $z = 0 \notin G_1$  und der Winkelbereich  $< \pi$ ,

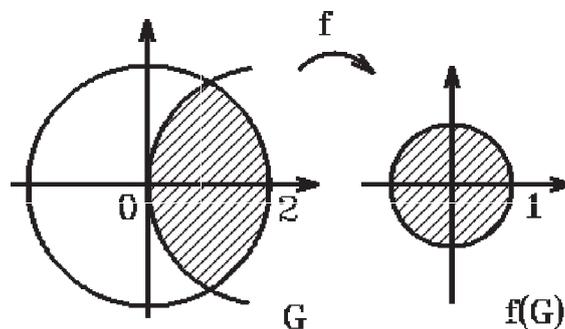
$f_2$  ist konform in  $G_2 = f_1(G_1)$ , da  $(-1) \notin G_2$ ,

$f_3$  ist konform in  $G_3 = f_2(G_2)$ , da  $z = 0 \notin G_3$  und der Winkelbereich  $< \pi$ ,

$f_4$  ist konform in  $G_4 = f_3(G_3)$ , da  $(-i) \notin G_4$ .

Da die Einzelabbildungen  $f_k$  jeweils in  $G_k$  konform sind  $\Rightarrow$   
 $f$  bildet  $G$  konform auf  $\tilde{G}$  ab.

2.  $G = \{z \in \mathcal{C} : |z| < 2, |z - 2| < 2\}$  ,  $\tilde{G} = \{w \in \mathcal{C} : |w| < 1\}$  .



Gesucht:  $f$  konform mit  $f(G) = \tilde{G}$  .

Schnittpunkte der beiden Kreise:

$$x^2 + y^2 = 4, (x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow z_1 = 1 - i\sqrt{3}, z_2 = 1 + i\sqrt{3} \text{ sind die Schnittpunkte.}$$

Wir bilden nun mit Hilfe einer gebrochen linearen Abbildung folgende Punkte ab:  
 $z_1 \rightarrow 0, z_2 \rightarrow \infty, 1 \rightarrow 1$ .

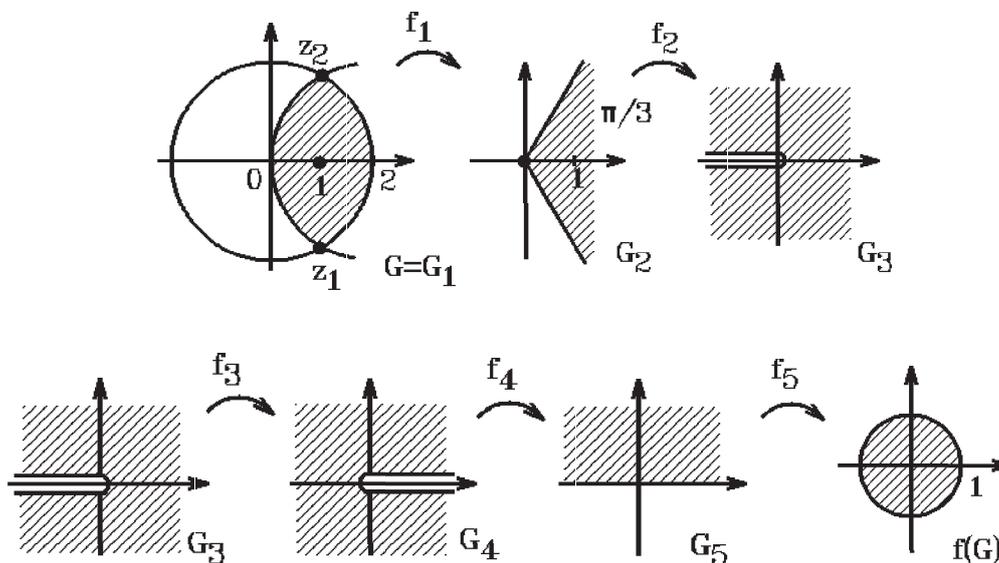
Dann erhalten wir:

$$f_1(z) = a \frac{z - (1 - i\sqrt{3})}{z - (1 + i\sqrt{3})}, f_1(1) = a \frac{i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f_1(z) = \frac{-z + 1 - i\sqrt{3}}{z - 1 - i\sqrt{3}}.$$

Da  $f_1(0) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-1 - i\sqrt{3}} = -\frac{(1 - i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$  und

$f_1(2) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = -\frac{(1 + i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$ , gilt



Anschließend wenden wir die Abbildungen  $f_2(z) = z^3, f_3(z) = -z, f_4(z) = z^{1/2}$   
 und  $f_5(z) = \frac{iz + 1}{-iz + 1}$  an.

Dann erhalten wir:  $f(z) = f_5(f_4(f_3(f_2(f_1(z))))))$ , und es gilt  $f(G) = \tilde{G}$ .

$f_1$  ist konform in  $G_1 = G$ , da  $(1 + i\sqrt{3}) \notin G_1$ ,

$f_2$  ist konform in  $G_2 = f_1(G_1)$ , da  $z = 0 \notin G_2$  und der Winkelbereich  $< 2\pi/3$ ,

$f_3$  ist konform in  $G_3 = f_2(G_2)$ , da Drehung,

$f_4$  ist konform in  $G_4 = f_3(G_3)$ , da  $\{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \not\subset G_4$ ,

$f_5$  ist konform in  $G_5 = f_4(G_4)$ , da  $(-i) \notin G_5$ .

Da alle Einzelabbildungen  $f_k$  jeweils in  $G_k$  konform sind, ist auch  $f$  in  $G$  konform.

## 8. Komplexe Kurvenintegrale

Sei  $K = \{z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$  eine Kurve in  $\mathcal{C}$ , und sei  $f : D \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $K \subset D$  und  $f$  stetig auf  $K$ , dann wollen wir definieren, was wir unter dem Integral von  $f$  entlang  $K$  verstehen wollen:  $\int_K f(z) dz$ .

Zunächst definieren wir analog zur Riemann-Summe (vgl. S.194) die *Riemann-Stieltjes-Summe*:

**Definition 16.29 :** *Riemann-Stieltjes-Summe*

Sei  $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  eine Zerlegung von  $[\alpha, \beta]$ ,  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), Zwischenpunkte. Dann heißt

$$S_Z(f, \vec{\tau}) = \sum_{k=1}^n f(z(\tau_k))(z(t_k) - z(t_{k-1}))$$

*Riemann-Stieltjes-Summe* von  $f$  bzgl. der Zerlegung  $Z$ .

Existiert nun ein  $I \in \mathcal{C}$  mit  $\lim_{|Z| \rightarrow 0} S_Z(f, \vec{\tau}) = I$  unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Wahl der Zwischenpunkte, so nennen wir diesen Wert  $I$  das (Riemann-Stieltjes) *Integral* von  $f$  entlang  $K$ .

**Definition 16.30 :** *Riemann-Stieltjes Integral*

Existiert ein  $I \in \mathcal{C}$  mit:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  so, daß aus  $|Z| < \delta$  bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte  $\tau_k$  folgt:  $|S_Z(f, \vec{\tau}) - I| < \epsilon$ , so heißt

$$I = \int_K f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) dz(t)$$

das (Riemann-Stieltjes) *Integral* von  $f$  entlang  $K$ .

### Beispiele

Sei  $K = \{z(t) : t \in [\alpha, \beta], z(\alpha) = a, z(\beta) = b\}$  eine beliebige stückweise glatte Kurve zwischen  $a$  und  $b$  in  $\mathcal{C}$ .

1.

$$\int_K dz = \int_{\alpha}^{\beta} dz(t) = b - a$$



Denn:

$$\begin{aligned} \int_K dz &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} S_Z(f, \vec{\tau}) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (z(t_k) - z(t_{k-1})) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} (z(t_n) - z(t_0)) \\ &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} (b - a) = b - a. \end{aligned}$$

2.

$$\int_K z \, dz = \int_\alpha^\beta z(t) \, dz(t) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$



Denn:

$$\begin{aligned} \int_K z \, dz &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} S_Z(f, \vec{\tau}) \\ &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n z(t_{k-1})(z(t_k) - z(t_{k-1})) \quad (\text{Zwischenpunkte } \tau_k = t_{k-1}) \\ &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n z(t_k)(z(t_k) - z(t_{k-1})) \quad (\text{Zwischenpunkte } \tau_k = t_k) \\ \Rightarrow 2 \int_K z \, dz &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (z(t_k) + z(t_{k-1}))(z(t_k) - z(t_{k-1})) \\ &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (z^2(t_k) - z^2(t_{k-1})) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} (z^2(t_n) - z^2(t_0)) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} (b^2 - a^2) = b^2 - a^2. \end{aligned}$$

Ist  $K$  geschlossen, so gilt:  $\int_K dz = \int_K z \, dz = 0$ .

Daß das Integral  $\int_K z \, dz$  überhaupt für stückweise glatte Kurven existiert, zeigt der folgende Satz 16.31 und die anschließende Bemerkung:

**Satz 16.31 :**

Sei  $K = \{z(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$  eine glatte Kurve in  $\mathcal{C}$ , sei  $f$  stetig auf  $K$ .

Dann existiert das Integral  $\int_K f(z) \, dz$  mit

$$\int_K f(z) \, dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) \, dz(t) = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t) \, dt.$$

Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_K f(z) \, dz \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(z(t))z'(t)| \, dt.$$

*Beweis :*

$$\begin{aligned} S_Z(f, \vec{\tau}) &= \sum_{k=1}^n f(z(\tau_k))(z(t_k) - z(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( u(z(\tau_k)) + iv(z(\tau_k)) \right) \left( (x(t_k) - x(t_{k-1})) + i(y(t_k) - y(t_{k-1})) \right) \\ & \quad (\text{mit } f = u + iv, z(t) = x(t) + iy(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n u(z(\tau_k))x'(\xi_k)\Delta t_k - \sum_{k=1}^n v(z(\tau_k))y'(\eta_k)\Delta t_k \\
&\quad + i \sum_{k=1}^n v(z(\tau_k))x'(\xi_k)\Delta t_k + i \sum_{k=1}^n u(z(\tau_k))y'(\eta_k)\Delta t_k .
\end{aligned}$$

Wählen wir  $\tau_k = \xi_k$  bzw.  $\tau_k = \eta_k$ , so sind diese 4 Summen Riemann-Summen für die stetigen reellen Funktionen  $ux'$ ,  $vy'$ ,  $vx'$  und  $uy'$ , die gegen die Integrale

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^{\beta} u(z(t))x'(t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} v(z(t))y'(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(z(t))x'(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} u(z(t))y'(t) dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left( u(z(t)) + iv(z(t)) \right) \left( x'(t) + iy'(t) \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt
\end{aligned}$$

konvergieren. Nun muß nur noch gezeigt werden, daß die Konvergenz unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte  $\tau_k$  gilt (vgl. Literatur).

Die Abschätzung folgt durch Abschätzung der Riemann-Stieltjes-Summe.

**Bemerkung** : Satz 16.31 gilt auch für *stückweise glatte* Kurven.

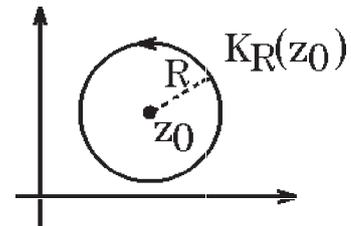
*Denn*: Man muß für den Beweis das Intervall  $[\alpha, \beta]$  aufspalten und dann jeweils Satz 16.31 benutzen.

### Beispiel

$$K_R(z_0) = \{z(t) = z_0 + Re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$$

positiv orientierter Kreis um  $z_0$  mit Radius  $R$ .

$K_R(z_0)$  ist eine glatte und geschlossene Kurve.



Wir untersuchen das Integral  $\int_{K_R(z_0)} f(z) dz$  für die Funktion

$$f(z) = (z - z_0)^m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$f$  ist stetig auf  $K_R(z_0)$  (die Singularität  $z = z_0$  (für  $m < 0$ ) liegt nicht auf der Kurve, sondern im Inneren von  $K_R(z_0)$ ).

$$\text{Mit } z(t) = z_0 + Re^{it} \Rightarrow z'(t) = iRe^{it}, \quad f(z) = (z - z_0)^m = (Re^{it})^m.$$

Damit erhalten wir für das Integral

$$\begin{aligned}
&\int_{K_R(z_0)} (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^m iRe^{it} dt = iR^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt \\
&= R^{m+1} \begin{cases} \left[ \frac{e^{i(m+1)t}}{2\pi i} \right]_{t=0}^{2\pi} & , \text{falls } m \neq -1 \\ \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt & , \text{falls } m = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{R^{m+1}}{2\pi i} (e^{i(m+1)2\pi} - 1) & , \text{falls } m \neq -1 \\ 2\pi i & , \text{falls } m = -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \text{falls } m \neq -1 \\ 2\pi i & , \text{falls } m = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Also gilt für  $m \in \mathbb{Z}$ :

$$\boxed{\int_{K_R(z_0)} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & , \text{falls } m \neq -1 \\ 2\pi i & , \text{falls } m = -1 \end{cases}}$$

Z.B.:  $\int_{K_R(z_0)} (z - z_0)^3 dz = 0$  ,  $\int_{K_R(z_0)} \frac{1}{(z - z_0)^2} dz = 0$  , aber

$$\int_{K_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

*Zusammenhang zwischen komplexem Kurvenintegral und Kurvenintegral in  $\mathbb{R}^2$*

Sei  $f = u + iv$  ,  $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$  bzw.  $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , dann gilt

$$\int_K f(z) dz = \int_K (u + iv)(dx + idy) = \int_K (u dx - v dy) + i \int_K (v dx + u dy) .$$

Die *Integrabilitätsbedingungen* entsprechen den *Cauchy-Riemannschesen DGL*, denn  $(-v)_x = u_y$  ,  $u_x = v_y$ .

Will man das Integral  $\int_K (u dx + (-v) dy)$  berechnen, so gilt

$$\int_K (u dx + (-v) dy) = \operatorname{Re} \int_K f(z) dz \quad \text{mit} \quad f(z) = u + iv .$$

**Beispiel**

$$\int_{K_R(0)} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) = \operatorname{Re} \int_{K_R(0)} \frac{i}{z} dz = \operatorname{Re}(i \cdot 2\pi i) = -2\pi .$$

(vgl. letztes Beispiel)

Denn:  $f(z) = \frac{i}{z} = \frac{i\bar{z}}{|z|^2} = \frac{i(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y) .$

**Satz 16.32 :** *Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals*

Sei  $K$  eine stückweise glatte Kurve in  $\mathbb{C}$ ,  $f, f_1, f_2$  seien stetig auf  $K$  ,  $c \in \mathbb{C}$ .  
Dann gilt

a) *Linearität*

$$\int_K (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_K f_1(z) dz + \int_K f_2(z) dz \quad , \quad \int_K cf(z) dz = c \int_K f(z) dz .$$

b) Setzt sich  $K$  aus  $K_1$  und  $K_2$  zusammen, so gilt

$$\int_{K_1+K_2} f(z) dz = \int_{K_1} f(z) dz + \int_{K_2} f(z) dz .$$

c) Mit  $L(K) =$  Länge von  $K$  gilt die Abschätzung

$$\left| \int_K f(z) dz \right| \leq \max_{z \in K} |f(z)| L(K) .$$

d) Für die Kurve  $(-K)$  (umgekehrter Durchlaufungssinn) gilt

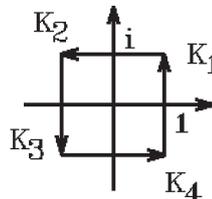
$$\int_{-K} f(z) dz = - \int_K f(z) dz .$$

*Beweis :* Alle Eigenschaften folgen sofort aus der Definition der Riemann-Stieltjes-Summe und der Definition des (Riemann-Stieltjes) Integrals.

### Beispiel

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 ,$$

$$f(z) = \frac{1}{z} .$$



*Gesucht:*  $\int_K \frac{1}{z} dz .$

$$\begin{aligned} K_1 : z(t) &= 1 + it , t \in [-1, 1] \Rightarrow z'(t) = i , \\ -K_2 : z(t) &= t + i , t \in [-1, 1] \Rightarrow z'(t) = 1 , \\ -K_3 : z(t) &= -1 + it , t \in [-1, 1] \Rightarrow z'(t) = i , \\ K_4 : z(t) &= t - i , t \in [-1, 1] \Rightarrow z'(t) = 1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_K \frac{1}{z} dz &= \int_{K_1} \frac{1}{z} dz - \int_{-K_2} \frac{1}{z} dz - \int_{-K_3} \frac{1}{z} dz + \int_{K_4} \frac{1}{z} dz \\ &= \int_{-1}^1 \frac{i}{1+it} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{t+i} dt - \int_{-1}^1 \frac{i}{-1+it} dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{t-i} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{i(1-it)}{1+t^2} - \frac{t-i}{1+t^2} + \frac{i(1+it)}{1+t^2} + \frac{t+i}{1+t^2} \right) dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{i+t-t+i+i-t+t+i}{1+t^2} dt = 4i \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 8i \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 8i \arctan 1 = 8i \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi i . \end{aligned}$$

Für  $K_R(0)$  galt ebenfalls  $\int_{K_R(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i .$

Daß dies kein Zufall ist, werden die nächsten Sätze zeigen.

## 9. Cauchyscher Integralsatz

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze der komplexen Funktionentheorie. Er wird auch Hauptsatz der Funktionentheorie genannt.

### Satz 16.33 : Cauchyscher Integralsatz

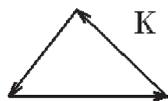
Sei  $G \subset \mathcal{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet, sei  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $G$ . Dann gilt für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve  $K$ , die ganz in  $G$  verläuft

$$\boxed{\int_K f(z) dz = 0}$$

*Beweis* : Der Beweis verläuft in 3 Schritten

a)  $K$  sei der Rand  
eines Dreiecks

$$\Rightarrow \int_K f(z) dz = 0 .$$

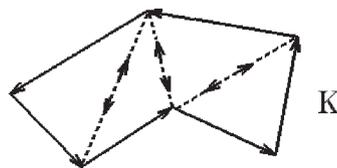


b)  $K$  sei ein geschlossener  
Polygonzug

$\Rightarrow$  aufteilen in Dreiecke.

Die Integrale über die inneren Wege  
heben sich auf, da sie 2-mal durchlaufen  
werden (1-mal in umgekehrter Richtung)

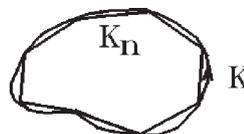
$$\Rightarrow \int_K f(z) dz = 0 .$$



c)  $K$  sei geschlossen, stückweise glatt

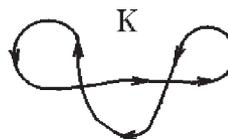
$\Rightarrow$   $K$  wird durch Polygonzüge  $K_n$   
approximiert. Dann gilt für  $n \rightarrow \infty$  :

$$0 = \int_{K_n} f(z) dz \rightarrow \int_K f(z) dz = 0 .$$



$K$  kann auch Doppelpunkte haben

$\Rightarrow$  aufteilen in die einzelnen  
doppelpunktfreien geschlossenen  
Kurvenstücke.



Zu a)

$\Delta$  wird aufgeteilt in 4 kongruente  
Dreiecke  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$   
durch Verbindung der Mittelpunkte  
der Dreiecksseiten.

$\Delta$  und  $\Delta_k$  seien jeweils die  
positiv orientierten Randkurven  
der entsprechenden Dreiecke. Dann gilt

$$\int_{\Delta} f(z) dz = \int_{\Delta_1} f(z) dz + \int_{\Delta_2} f(z) dz + \int_{\Delta_3} f(z) dz + \int_{\Delta_4} f(z) dz$$

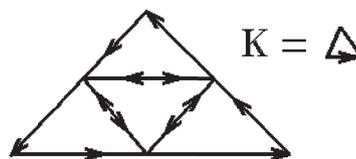
(da die Integrale über die inneren Strecken sich gegenseitig aufheben)

$$\Rightarrow |I| = \left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\Delta_k} f(z) dz \right| .$$

Also gilt für eins dieser 4 Dreiecke, welches wir nun mit  $\Delta_1$  bezeichnen wollen:

$$\left| \int_{\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} |I| .$$

Für die Länge von  $\Delta_1$  gilt:  $L(\Delta_1) = \frac{1}{2} L(\Delta)$ .



Für  $\Delta_1$  wird nun wieder das gleiche gemacht, also Aufteilung in 4 kongruente Dreiecke. Dann kann man wieder ein Dreieck  $\Delta_2$  auswählen, für das gilt:

$$\left| \int_{\Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^2} |I| \quad , \quad L(\Delta_2) = \frac{1}{2^2} L(\Delta).$$

Fahren wir in gleicher Weise fort, so erhalten wir eine Folge  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von ineinandergeschachtelten Dreiecken, die alle in  $G$  liegen und für die gilt:

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^n} |I| \quad , \quad L(\Delta_n) = \frac{1}{2^n} L(\Delta).$$

Sei  $z_n$  aus dem Inneren von  $\Delta_n$ , dann gilt für  $n \rightarrow \infty$  :

$z_n \rightarrow z_0$  mit  $z_0 \in G$  (da  $G$  einfach zusammenhängendes Gebiet).

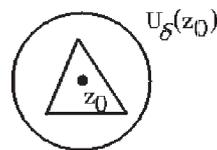
Sei nun  $\epsilon > 0$ . Da  $f$  holomorph in  $G$  ist, existiert  $U_\delta(z_0) \subset G$  mit

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0| \quad \forall z \in U_\delta(z_0).$$

Ab einem  $N \in \mathbb{N}$  sind alle  $\Delta_n$  in  $U_\delta(z_0)$  ,  $n \geq N$ .

Für diese  $n \geq N$  gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Delta_n} f(z_0) dz \right| + \left| \int_{\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0) dz \right| \\ &\leq \epsilon \max_{z \in \Delta_n} |z - z_0| L(\Delta_n) + |f(z_0)| \left| \int_{\Delta_n} dz \right| + |f'(z_0)| \left| \int_{\Delta_n} z dz - z_0 \int_{\Delta_n} dz \right|. \end{aligned}$$



Da  $\int_{\Delta_n} dz = 0$  und  $\int_{\Delta_n} z dz = 0$  (vgl. S.647), gilt

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \epsilon \max_{z \in \Delta_n} |z - z_0| L(\Delta_n).$$

Da  $\max_{z \in \Delta_n} |z - z_0| \leq L(\Delta_n)$ , folgt hieraus zusammen mit obiger Eigenschaft

$$\frac{1}{4^n} |I| \leq \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \epsilon L^2(\Delta_n) = \epsilon \frac{1}{4^n} L^2(\Delta) \quad \Rightarrow \quad |I| \leq \epsilon L^2(\Delta).$$

$$\text{Da } \epsilon > 0 \text{ beliebig } \Rightarrow I = 0 \Rightarrow \int_K f(z) dz = 0.$$

**Bemerkung :** *Gegenbeispiel*

$G$  muß *einfach zusammenhängend* sein, und  $f$  muß *holomorph* in  $G$  sein, denn:

$$\int_{K_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{vgl. S.649}).$$

$f(z) = \frac{1}{z}$  ist holomorph in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , aber  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist *nicht* einfach zusammenhängend.

**Bemerkung :** Auch bei Kurvenintegralen in  $\mathbb{R}^2$  mußten die *Integrabilitätsbedingungen* in einem *einfach zusammenhängenden Gebiet* gelten, um zu folgern, daß Kurvenintegrale über geschlossene Kurven in  $G$  gleich Null sind.

## Beispiele

1.  $f(z) = (z - z_0)^n$ ,  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$  ist holomorph in  $\mathcal{C}$ ,  
 $\mathcal{C}$  ist einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Rightarrow$

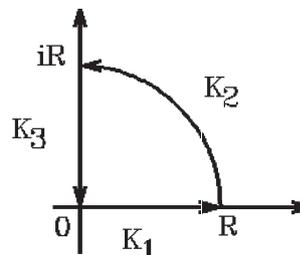
$\int_K (z - z_0)^n dz = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle *geschlossenen*, stückweise glatten Kurven  $K$  in  $\mathcal{C}$ .

2.

Sei  $K$  die folgende Kurve :

$$\int_K e^{-z} dz = 0,$$

da  $f(z) = e^{-z}$  holomorph in  $\mathcal{C}$ ,  
 und  $K$  geschlossene, stückweise glatte Kurve in  $\mathcal{C}$ .



Nun berechnen wir das Integral direkt:

$$\begin{aligned} K_1 : z = t, t \in [0, R] &\Rightarrow dz = dt, \\ K_2 : z = Re^{it}, t \in [0, \pi/2] &\Rightarrow dz = iRe^{it} dt, \\ -K_3 : z = it, t \in [0, R] &\Rightarrow dz = idt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_K e^{-z} dz = \int_{K_1} e^{-z} dz + \int_{K_2} e^{-z} dz - \int_{-K_3} e^{-z} dz \\ &= \int_0^R e^{-t} dt + \int_0^{\pi/2} e^{-Re^{it}} iRe^{it} dt - \int_0^R e^{-it} i dt \\ &= -e^{-t} \Big|_0^R + iR \int_0^{\pi/2} e^{-R(\cos t + i \sin t)} e^{it} dt + e^{-it} \Big|_0^R \\ &= (1 - e^{-R}) + iR \int_0^{\pi/2} e^{-R \cos t} e^{i(t - R \sin t)} dt + (e^{-iR} - 1). \end{aligned}$$

Da  $I = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} I = \operatorname{Im} I = 0$ , also

$$(1 - e^{-R}) - R \int_0^{\pi/2} e^{-R \cos t} \sin(t - R \sin t) dt + (\cos R - 1) = 0 \quad \text{und}$$

$$R \int_0^{\pi/2} e^{-R \cos t} \cos(t - R \sin t) dt - \sin R = 0, \quad \text{also gilt für alle } R > 0:$$

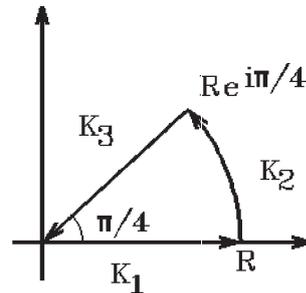
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{-R \cos t} \cos(t - R \sin t) dt &= \frac{\sin R}{R} \\ \int_0^{\pi/2} e^{-R \cos t} \sin(t - R \sin t) dt &= \frac{\cos R - e^{-R}}{R} \end{aligned}$$

Damit ist es uns gelungen, zwei schwierige reelle Integrale mit Hilfe komplexer Integrale zu berechnen. Dabei haben wir für das komplexe Integral den Cauchyschen Integralsatz benutzt.

3. Wir wollen nun die reellen Integrale  $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$  und  $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$  mit Hilfe eines komplexen Integrals berechnen. Dazu berechnen wir

$\int_{K_R} e^{iz^2} dz$  entlang der folgenden Kurve  $K_R$ :

$$\begin{aligned} K_1 &: z = t, \quad t \in [0, R] \Rightarrow dz = dt, \\ K_2 &: z = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi/4] \Rightarrow dz = iRe^{it} dt, \\ -K_3 &: z = te^{i\pi/4}, \quad t \in [0, R] \Rightarrow dz = e^{i\pi/4} dt. \end{aligned}$$



$I = \int_{K_R} e^{iz^2} dz = 0$ , da  $f(z) = e^{iz^2}$  holomorph in  $\mathcal{C}$  und  $K_R$  geschlossene, stückweise glatte Kurve in  $\mathcal{C}$ .

Direkte Berechnung:

$$I = 0 = \int_{K_R} e^{iz^2} dz = \int_{K_1} e^{iz^2} dz + \int_{K_2} e^{iz^2} dz - \int_{-K_3} e^{iz^2} dz \quad \text{mit}$$

$$\int_{K_1} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{it^2} dt = \int_0^R \cos(t^2) dt + i \int_0^R \sin(t^2) dt,$$

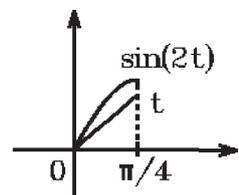
$$\int_{K_2} e^{iz^2} dz = \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2it}} iRe^{it} dt = iR \int_0^{\pi/4} e^{i(R^2 e^{2it} + t)} dt$$

$$= iR \int_0^{\pi/4} e^{i(R^2 \cos 2t + t)} e^{-R^2 \sin 2t} dt,$$

also

$$\left| \int_{K_2} e^{iz^2} dz \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2t} dt \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 t} dt,$$

da in  $[0, \pi/4]$  gilt:  $\sin 2t \geq t$ .



Also gilt

$$\left| \int_{K_2} e^{iz^2} dz \right| \leq \left[ -\frac{1}{R} e^{-R^2 t} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{R} (1 - e^{-R^2 \pi/4}) < \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

$$\int_{K_3} e^{iz^2} dz = - \int_0^R e^{it^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4} dt = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt \quad (\text{da } e^{i\pi/2} = i).$$

Da  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (vgl. S.408), gilt insgesamt für  $R \rightarrow \infty$

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} e^{iz^2} dz = \int_0^\infty \cos(t^2) dt + i \int_0^\infty \sin(t^2) dt - e^{i\pi/4} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Da  $e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ , folgt hieraus für den Realteil bzw. Imaginärteil:

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Die nächsten Sätze sind unmittelbare Folgerungen aus dem *Cauchyschen Integralsatz*.

**Satz 16.34 :** *wegunabhängig*

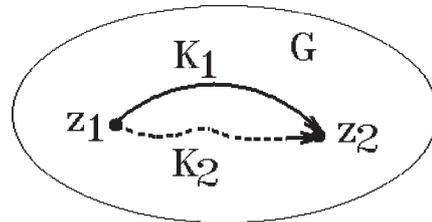
Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein *einfach zusammenhängendes Gebiet*, sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  *holomorph* in  $G$  und seien  $z_1, z_2 \in G$ .

Dann hat das Integral für alle stückweise glatten Kurven  $K(z_1, z_2)$ , die die Punkte  $z_1$  und  $z_2$  in  $G$  verbinden, den gleichen Wert. Also ist dann das Integral *wegunabhängig*,

und wir schreiben 
$$\int_{K(z_1, z_2)} f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz .$$

*Beweis :*

Seien  $K_1$  und  $K_2$  zwei stückweise glatte Kurven von  $z_1$  nach  $z_2$   
 $\Rightarrow K = K_1 + (-K_2)$  ist *geschlossene*,  
 stückweise glatte Kurve in  $G \Rightarrow$



$$0 = \int_K f(z) dz = \int_{K_1} f(z) dz - \int_{K_2} f(z) dz \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

**Bezeichnung :** Sei  $K$  eine geschlossene Jordankurve (d.h.: doppeltpunktfrei), dann bezeichnen wir mit

$I(K)$  das *Innere* von  $K$  ,  $A(K)$  das *Äußere* von  $K$  ,  
 $\bar{I}(K) = I(K) \cup K$  das Innere von  $K$  einschließlich  $K$  ,  
 $\bar{A}(K) = A(K) \cup K$  das Äußere von  $K$  einschließlich  $K$  .

**Satz 16.35 :**

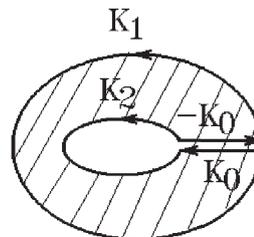
Seien  $K_1$  und  $K_2$  zwei *geschlossene, positiv orientierte*, stückweise glatte Jordankurven (d.h.: doppeltpunktfrei) mit  $K_2 \subset I(K_1)$ . Sei  $f$  *holomorph* im Ringgebiet  $\bar{R}(K_1, K_2)$  (zwischen  $K_1$  und  $K_2$  einschließlich  $K_1$  und  $K_2$ ).

Dann gilt 
$$\int_{K_1} f(z) dz = \int_{K_2} f(z) dz .$$

*Beweis :*

Wir führen eine Hilfskurve  $K_0$  ein, die die Kurven  $K_1$  und  $K_2$  verbindet.

$K = K_1 + K_0 + (-K_2) + (-K_0)$  ist geschlossene, stückweise glatte Kurve.



$R(K_1, K_2) \setminus \{K_0\}$  ist einfach zusammenhängendes Gebiet, wo  $f$  holomorph ist.

$K_n$  seien geschlossene Kurven in  $R(K_1, K_2) \setminus \{K_0\}$  mit  $K_n \rightarrow K$  für  $n \rightarrow \infty$ .

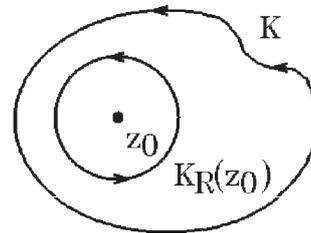
Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt  $\int_{K_n} f(z) dz = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_{K_n} f(z) dz &\rightarrow \int_K f(z) dz = 0 \Rightarrow \\ 0 &= \int_K f(z) dz = \int_{K_1} f(z) dz + \int_{K_0} f(z) dz - \int_{K_2} f(z) dz - \int_{K_0} f(z) dz \\ &= \int_{K_1} f(z) dz - \int_{K_2} f(z) dz \Rightarrow \text{Behauptung.} \end{aligned}$$

### Beispiel

Es gilt für alle geschlossenen, positiv orientierten, stückweise glatten Jordankurven mit  $z_0 \in I(K)$

$$\int_K \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$



Denn:

$$\int_{K_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i \quad (\text{vgl. S.649}).$$

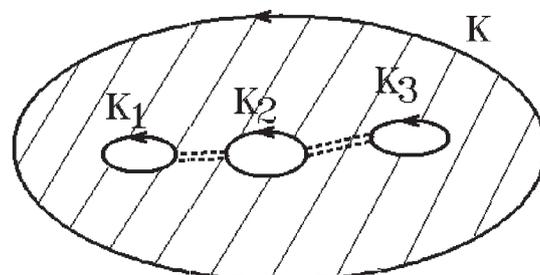
**Bemerkung :** Ein analoger Satz gilt für reelle Kurvenintegrale in  $\mathbb{R}^2$  (vgl. Satz 13.16, S.441).

### Satz 16.36 :

Seien  $K, K_1, K_2, \dots, K_n$  geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurven mit  $K_i \subset I(K) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $K_i \subset A(K_j) \quad \forall i \neq j$ .

Sei  $f$  holomorph in  $\bar{I}(K) \setminus \{I(K_1) \cup I(K_2) \cup \dots \cup I(K_n)\}$  (also  $f$  muß nicht holomorph im Inneren der Kurven  $K_i$  sein). Dann gilt

$$\int_K f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{K_i} f(z) dz$$



..... zusätzliche Hilfskurven

*Beweis :*

Wir verbinden die Kurven  $K_i$  mit Hilfskurven. Zusammen mit diesen Hilfskurven wird  $K_1 + K_2 + \dots + K_n$  eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve. Für diese geschlossene Jordankurve können wir zusammen mit der Kurve  $K$  den Satz 16.35 anwenden. Da die Hilfskurven 2-mal durchlaufen werden (1-mal in umgekehrter Richtung), heben sich die Integrale über diese Hilfskurven gegenseitig auf. Damit erhalten wir insgesamt

$$\int_K f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{K_i} f(z) dz .$$

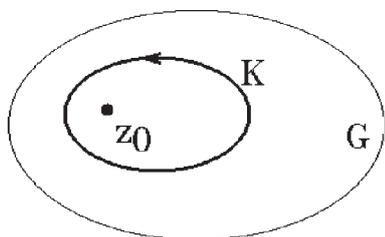
## 10. Cauchysche Integralformel

**Satz 16.37 :** *Cauchysche Integralformel*

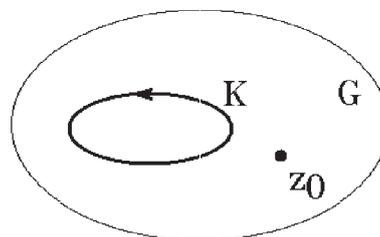
Sei  $G \subset \mathcal{C}$  Gebiet, sei  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $G$ .

$K$  sei eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve mit  $\bar{I}(K) \subset G$ . Dann gilt die *Cauchysche Integralformel*

<p>a) <math>\int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad \forall z_0 \in I(K)</math></p> <p>b) <math>\int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \quad \forall z_0 \in A(K)</math></p>
---



Fall a)



Fall b)

*Beweis :*

b) Da  $z_0 \in A(K) \Rightarrow \frac{f(z)}{z - z_0}$  ist holomorph in  $\bar{I}(K)$ . Da  $I(K)$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz:  $\int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$ .

a) Sei  $z_0 \in I(K)$ , und sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Dann gilt

$$\int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \int_K \frac{1}{z - z_0} dz$$

mit  $\int_K \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$  (vgl. S.656).

Sei  $K_r(z_0)$  ein Kreis um  $z_0$  mit  $r$  so klein, daß

$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \forall z \in K_r(z_0)$  (das geht, da  $f$  stetig), dann gilt

$$\left| \int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\epsilon}{r} L(K_r(z_0)) = \frac{\epsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\epsilon.$$

(nach Satz 16.35)

Da  $\epsilon > 0$  beliebig  $\Rightarrow \int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$ .

Damit erhalten wir insgesamt  $\int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$ .

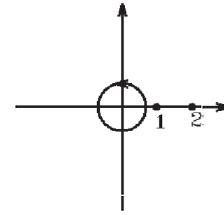
### Beispiele

1.

Gesucht:  $I_R = \int_{K_R(0)} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz$ ,  $R > 0, R \neq 1, R \neq 2$ .

1. Fall:  $0 < R < 1 \Rightarrow I_R = 0$ ,

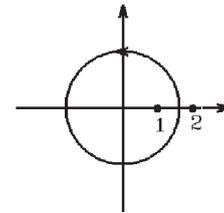
denn die Singularitäten  $z_1 = 1$  und  $z_2 = 2$  liegen im Äußeren von  $K_R(0)$  (Integrand ist holomorph in  $\bar{I}(K_R(0))$ ).



2. Fall:  $1 < R < 2$

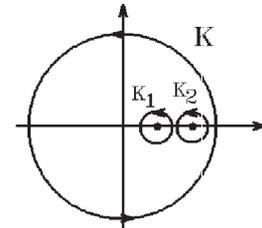
$$I_R = \int_{K_R(0)} \frac{\left(\frac{e^z}{z-2}\right)}{z-1} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-2}\right)_{|z=1} = -2\pi i e,$$

denn  $\frac{e^z}{z-2}$  ist holomorph in  $\bar{I}(K_R(0))$  (da Singularität  $z_2 = 2$  im Äußeren von  $K_R(0)$ ).



3. Fall:  $R > 2$

Seien  $K_1$  ein kleiner Kreis um  $z_1 = 1$  und  $K_2$  ein kleiner Kreis um  $z_2 = 2$ , dann gilt nach Satz 16.36:



$$\int_{K_R(0)} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz = \int_{K_1} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz + \int_{K_2} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz.$$

$$\int_{K_1} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz = \int_{K_1} \frac{\left(\frac{e^z}{z-2}\right)}{z-1} dz = -2\pi i e \quad (\text{nach Fall 2.}),$$

$$\int_{K_2} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz = \int_{K_2} \frac{\left(\frac{e^z}{z-1}\right)}{z-2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-1}\right)_{|z=2} = 2\pi i e^2.$$

Damit erhalten wir im 3. Fall:  $I_R = -2\pi i e + 2\pi i e^2 = 2\pi i (e^2 - e)$ .

Alle drei Fälle zusammen ergeben:

$$\int_{K_R(0)} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz = \begin{cases} 0 & , \text{falls } 0 < R < 1 \\ -2\pi i e & , \text{falls } 1 < R < 2 \\ 2\pi i (e^2 - e) & , \text{falls } R > 2. \end{cases}$$

2.

Sei  $f$  holomorph in  $\bar{I}(K_R(z_0))$ , dann gilt mit der Parameterdarstellung für  $K_R(z_0)$ :  $z(t) = z_0 + Re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $dz = iRe^{it}dt$ :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} iRe^{it} dt \Rightarrow$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt .$$

**Bemerkung :**

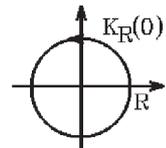
Satz 16.37 (Cauchysche Integralformel) besagt, daß die Funktionswerte von  $f$  im Inneren von  $K$  bereits durch die Werte auf  $K$  festgelegt sind.

Als eine Anwendung von Satz 16.37 (Cauchysche Integralformel) beweisen wir nun die *Poissonsche Integralformel*:

**Satz 16.38 :** *Poissonsche Integralformel*

Sei  $f$  holomorph in  $\bar{I}(K_R(0))$ . Dann gilt für  $0 \leq r < R$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ :

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(t - \varphi) + r^2} f(Re^{it}) dt$$



*Beweis :*

Für  $z_0 = 0 = 0e^{i\varphi}$  (also  $r = 0$ ) folgt die Behauptung aus obigem Beispiel 2.

Sei  $z_0 \in I(K_R(0))$  mit  $0 < |z_0| < R$ , also  $z_0 = re^{i\varphi}$  mit  $0 < r < R$ , dann gilt

$$\int_{K_R(0)} \left( \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}} \right) f(z) dz = \int_{K_R(0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{K_R(0)} \frac{f(z)}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}} dz = 2\pi i f(z_0),$$

da das 2. Integral = 0 ist, denn:  $|\frac{R^2}{\bar{z}_0}| > \frac{R^2}{R} = R \Rightarrow \frac{R^2}{\bar{z}_0} \in A(K_R(0))$ .

Also gilt

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(0)} \left( \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}} \right) f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(0)} \left( \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z\bar{z}_0 - R^2} \right) f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(0)} \frac{z\bar{z}_0 - R^2 - z\bar{z}_0 + |z_0|^2}{(z - z_0)(z\bar{z}_0 - R^2)} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(0)} \frac{R^2 - |z_0|^2}{(z - z_0)(R^2 - z\bar{z}_0)} f(z) dz . \end{aligned}$$

Mit  $z(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $dz = iRe^{it}dt$ ,  $z_0 = re^{i\varphi}$ ,  $0 < r < R$ , gilt dann

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{(Re^{it} - re^{i\varphi})(R^2 - rRe^{it}e^{-i\varphi})} f(Re^{it}) iRe^{it} dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
f(re^{i\varphi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{(Re^{it} - re^{i\varphi})(Re^{-it} - re^{-i\varphi})} f(Re^{it}) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - rRe^{i(t-\varphi)} - rRe^{-i(t-\varphi)}} f(Re^{it}) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(t - \varphi)} f(Re^{it}) dt .
\end{aligned}$$

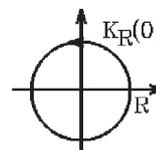
Ist  $f(z) = u + iv$ , so gilt für den Realteil  $u$  von  $f$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(t - \varphi)} u(R, t) dt .$$

Da  $f$  holomorph in  $I(K_R(0)) \Rightarrow u$  ist *harmonisch* in  $I(K_R(0))$  (vgl. Satz 16.18, S.631), also gilt:  $\Delta u = 0$  in  $I(K_R(0))$ .

Damit erhalten wir:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(t - \varphi)} h(t) dt$$



ist *Lösung* des inneren *Dirichlet-Problems* für den Kreis, d.h.:

$$\Delta u = 0 \text{ in } I(K_R(0)) \quad , \quad u|_{K_R(0)} = h$$

Dies ist die *Integraldarstellung* der Lösung des inneren Dirichlet-Problems für den Kreis.

## 11. Erweiterte Cauchysche Integralformel

Eine wichtige Eigenschaft *holomorpher* Funktionen (die im Reellen *kein* Analogon hat) liefert der folgende Satz.

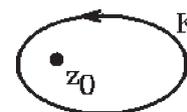
**Satz 16.39 :** *Erweiterte Cauchysche Integralformel*

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet, sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$ .

a) Dann existieren in  $G$  alle Ableitungen  $f^{(n)}(z) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , und diese Ableitungen sind wieder *holomorph* in  $G$ .

b) Sei  $K$  eine *geschlossene, positiv orientierte*, stückweise glatte Jordankurve mit  $\bar{I}(K) \subset G$ . Dann gilt  $\forall z_0 \in I(K)$  die *erweiterte Cauchysche Integralformel*

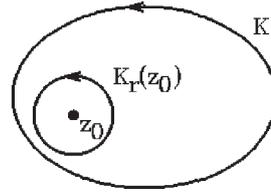
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$



D.h.: Differentiation und Integration dürfen vertauscht werden.

Beweis :

Sei  $z_0 \in I(K)$ , dann existiert ein Kreis  $K_r(z_0)$  um  $z_0$  mit  $\bar{I}(K_r(z_0)) \subset G$ .  
 Nach der (einfachen) Cauchyschen Integralformel (vgl. Satz 16.37, S.657) gilt dann:



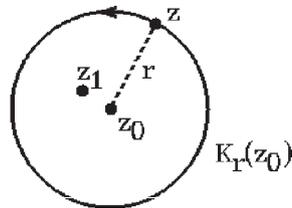
$$(*) \quad f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_1} dz \quad \forall z_1 \in I(K_r(z_0)), \text{ also auch f\u00fcr } z_0 .$$

Zu zeigen ist:  $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz .$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{K_r(z_0)} \left\{ \frac{1}{z_1 - z_0} \left( \frac{f(z)}{z - z_1} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right) - \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right\} dz \right| \\ & \quad \text{((*) benutzen f\u00fcr } z_1 \text{ und } z_0) \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{K_r(z_0)} f(z) \left\{ \frac{1}{(z - z_1)(z - z_0)} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right\} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{K_r(z_0)} f(z) \frac{z_1 - z_0}{(z - z_1)(z - z_0)^2} dz \right| \\ &\leq |z_1 - z_0| \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{2}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r = |z_1 - z_0| \frac{2M}{r^2} \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } z_1 \rightarrow z_0 \end{aligned}$$

mit  $M = \max_{z \in K_r(z_0)} |f(z)|$   
 und  $|z_1 - z_0| < \frac{r}{2}$   
 und  $|z - z_1| > \frac{r}{2}$ .



Also gilt f\u00fcr alle  $z_0 \in I(K)$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz .$$

(nach Satz 16.35)

Mit Hilfe dieser Formel zeigt man genauso, da\u00df gilt:

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz .$$

Mit vollst\u00e4ndiger Induktion erh\u00e4lt man die allgemeine Formel.

Da  $z_0 \in G$  beliebig, folgt also, da\u00df  $f$  in  $G$  beliebig oft differenzierbar ist, und da  $G$  Gebiet, die Ableitungsfunktionen in  $G$  holomorph sind.

## Beispiele

1. 
$$\int_{K_r(z_0)} \frac{e^z}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} (e^z)^{(n)}|_{z=z_0} = \frac{2\pi i}{n!} e^{z_0} \quad \forall z_0 \in \mathcal{C} \quad (\text{da } e^z \text{ holomorph in } \mathcal{C}).$$

Direkte Berechnung:

$K_r(z_0) : z(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi], dz = ire^{it} dt,$

$$\begin{aligned} \int_{K_r(z_0)} \frac{e^z}{(z - z_0)^{n+1}} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{z_0 + re^{it}}}{(re^{it})^{n+1}} ire^{it} dt = ie^{z_0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{r(\cos t + i \sin t)}}{r^n e^{int}} dt \\ &= \frac{ie^{z_0}}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{r \cos t} e^{i(r \sin t - nt)} dt = \frac{2\pi i}{n!} e^{z_0} \quad (\text{von oben}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{r \cos t} e^{i(r \sin t - nt)} dt = \frac{2\pi r^n}{n!}.$$

Damit erhalten wir für den Realteil bzw. Imaginärteil für alle  $r \geq 0, n \in \mathbb{N}_0$ :

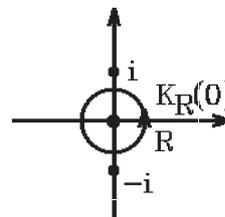
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{r \cos t} \cos(r \sin t - nt) dt &= \frac{2\pi r^n}{n!} \\ \int_0^{2\pi} e^{r \cos t} \sin(r \sin t - nt) dt &= 0 \end{aligned}$$

2.

Gesucht:  $I_R = \int_{K_R(0)} \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 1)} dz, R > 0, R \neq 1.$

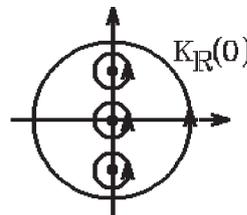
1. Fall:  $0 < R < 1$

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{K_R(0)} \frac{\left(\frac{\sin z}{z^2 + 1}\right)}{(z - 0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} \left(\frac{\sin z}{z^2 + 1}\right)' \Big|_{z=0} \\ &= 2\pi i \left(\frac{(z^2 + 1) \cos z - 2z \sin z}{(z^2 + 1)^2}\right) \Big|_{z=0} = 2\pi i \\ &\quad (\text{da } \left(\frac{\sin z}{z^2 + 1}\right) \text{ holomorph in } \bar{I}(K_R(0))). \end{aligned}$$



2. Fall:  $R > 1$

Wir wählen jeweils kleine Kreise um die drei Singularitäten  $z_1 = -i, z_2 = 0, z_3 = i$ , dann gilt nach Satz 16.36, S.656:



$$I_R = \int_{K_\delta(-i)} \frac{\left(\frac{\sin z}{z^2(z+i)}\right)}{(z - (-i))} dz + \int_{K_\delta(0)} \frac{\left(\frac{\sin z}{z^2+1}\right)}{(z - 0)^2} dz + \int_{K_\delta(i)} \frac{\left(\frac{\sin z}{z^2(z-i)}\right)}{(z - i)} dz$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i \left( \frac{\sin z}{z^2(z-i)} \right) \Big|_{z=-i} + 2\pi i + 2\pi i \left( \frac{\sin z}{z^2(z+i)} \right) \Big|_{z=i} \quad (\text{der mittlere Term s. Fall 1.}) \\
&= 2\pi i \left( \frac{\sin(-i)}{2i} + 1 + \frac{\sin i}{-2i} \right) = 2\pi i \left( 1 - \frac{\sin i}{i} \right) = 2\pi i(1 - \sinh 1).
\end{aligned}$$

**Satz 16.40 :**

Sei  $G \subset \mathcal{C}$  Gebiet, sei  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $G$ . Dann gilt:  
 $f$  konstant in  $G \Leftrightarrow f'(z) = 0 \quad \forall z \in G$ .

*Beweis :*

” $\Rightarrow$ ” klar.

” $\Leftarrow$ ”  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$  (Cauchy-Riemannsche DGL)  
 $\Rightarrow \text{grad } u = \text{grad } v = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G$   
 $\Rightarrow u$  und  $v$  konstant in  $G \Rightarrow f$  konstant in  $G$ .

**Satz 16.41 :** *Cauchysche Ungleichung*

Sei  $G \subset \mathcal{C}$  Gebiet, sei  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $G$ . Sei  $K_r(z_0)$  ein Kreis um  $z_0$  mit  $\bar{I}(K_r(z_0)) \subset G$ . Dann gilt die *Cauchysche Ungleichung* für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  :

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n} \quad \text{mit} \quad M = \max_{z \in K_r(z_0)} |f(z)|$$

*Beweis :*

Die erweiterte Cauchysche Integralformel liefert

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

**Satz 16.42 :** *Liouville*

Eine in ganz  $\mathcal{C}$  holomorphe und beschränkte Funktion ist konstant.

*Beweis :*

Sei  $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathcal{C}$ , sei  $z_0 \in \mathcal{C}$ ,  $r > 0$ .

Nach Satz 16.41 folgt dann:  $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$

$\Rightarrow f'(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathcal{C} \Rightarrow f$  konstant in  $\mathcal{C}$  (nach Satz 16.40).

Aus diesem Satz folgt nun der *Fundamentalsatz der Algebra*, den wir in Kapitel I, Satz 1.39, S.22, zitiert haben:

**Satz 16.43 :** *Fundamentalsatz der Algebra*

a) Jedes Polynom vom Grad  $n > 0$  (d.h.: nicht konstant) hat *mindestens* eine Nullstelle in  $\mathcal{C}$ .

- b) Jedes Polynom vom Grad  $n > 0$  hat genau  $n$  Nullstellen in  $\mathcal{C}$ .
- c) Jedes Polynom  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  vom Grad  $n > 0$  kann in  $\mathcal{C}$  in lineare Faktoren zerlegt werden:  
 $p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$ , wobei  $z_1, z_2, \dots, z_n$  die Nullstellen von  $p(z)$  sind.

*Beweis :*

a) *Annahme:*  $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{p(z)}$  ist holomorph in  $\mathcal{C}$  (als Quotient holomorpher Funktionen mit Nenner  $\neq 0$ ).

Da  $|p(z)| \rightarrow \infty$  für  $|z| \rightarrow \infty \Rightarrow f$  ist beschränkt in  $\mathcal{C}$

$\Rightarrow f$  ist konstant in  $\mathcal{C}$  (nach Satz von Liouville)

$\Rightarrow p$  ist konstant  $\Rightarrow \text{grad } p(z) = 0 \Rightarrow$  Widerspruch zu  $n > 0$ .

Daß  $|p(z)| \rightarrow \infty$  für  $|z| \rightarrow \infty$ , folgt aus der Eigenschaft, daß für große  $|z|$  für  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  gilt:

$$\left| \frac{p(z)}{a_n z^n} \right| = \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n} \right| \geq 1 - \epsilon \quad \text{für } |z| \text{ hinreichend groß}$$

$$\Rightarrow |p(z)| \geq (1 - \epsilon) |a_n| |z|^n \rightarrow \infty \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty.$$

b)c) Da  $p(z)$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathcal{C}$  besitzt, z.B.:  $z_1$ , kann man diese Nullstelle mit Hilfe des Horner-Schemas (vgl. S.14) abspalten. Wir erhalten dann:  $p(z) = (z - z_1)q(z)$  mit  $\text{grad } q(z) = n - 1$ . Wenden wir auf  $q(z)$  wieder a) an, so besitzt auch  $q(z)$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathcal{C}$ , z.B.:  $z_2$  (falls  $n \geq 2$ ). Diese Nullstelle kann man wieder abspalten. Fahren wir so fort, so erhalten wir die Aussagen b) und c).

Für *holomorphe* Funktionen gilt eine ähnliche Aussage wie für *harmonische* Funktionen (vgl Satz 13.34, S.477). Das ist kein Zufall, denn der Real- und Imaginärteil von  $f$  sind ja harmonische Funktionen. Für holomorphe Funktionen gilt der folgende Satz:

**Satz 16.44 :** *Maximumprinzip*

Eine in einem *beschränkten* Gebiet  $G$  *holomorphe* aber *nicht konstante* Funktion  $f$ , die in  $G \cup \partial G$  stetig ist, nimmt ihr *Maximum* nicht im Inneren von  $G$ , sondern auf dem *Rand*  $\partial G$  von  $G$  an, d.h.: es existiert ein  $z_0 \in \partial G$  mit  $\max_{z \in G \cup \partial G} |f(z)| = |f(z_0)|$ .

*Beweis :*

$f$  sei holomorph in  $G$ , aber nicht konstant in  $G$ .

*Annahme:*  $\exists z_0 \in G$  mit  $|f(z_0)| = \max_{z \in G \cup \partial G} |f(z)| \Rightarrow |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in G$ .

Sei  $K_r(z_0)$  der größte Kreis um  $z_0$ , der mitsamt seinem Inneren noch ganz in  $G$  liegt, also  $\bar{I}(K_r(z_0)) \subset G$ ,  $r$  möglichst groß.

Wir wollen zeigen:  $f(z) = f(z_0) \quad \forall z \in I(K_r(z_0))$ .

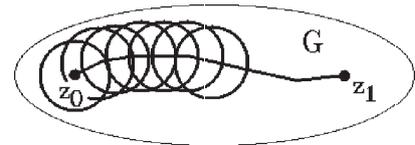
*Annahme:*  $\exists z_1 \in I(K_r(z_0))$  mit  $|f(z_1)| < |f(z_0)|$

$\Rightarrow z_1 \in K_{\tilde{r}}(z_0)$  mit  $0 < \tilde{r} < r$ .

Wegen der Stetigkeit gilt auf einem Stück Kreisbogen  $K_{\tilde{r}}(z_0)$

$|f(z)| < |f(z_0)|$ , auf dem ganzen Kreis gilt:  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ .  
 $\Rightarrow |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{\tilde{r}}(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \tilde{r}e^{it}) dt \right|$   
 (vgl. Cauchysche Integralformel, S.657, und Beispiel 2, S.659)  
 $< \frac{1}{2\pi} |f(z_0)| \cdot 2\pi = |f(z_0)| \Rightarrow$  Widerspruch  
 $\Rightarrow f(z) = f(z_0) \quad \forall z \in I(K_r(z_0)) \Rightarrow f$  konstant in  $I(K_r(z_0))$ .

Sei nun  $z_1 \in G$  beliebig. Dann existiert in  $G$   
 ein Polygonzug von  $z_0$  nach  $z_1$  (da  $G$  Gebiet).  
 Mit Hilfe von endlich vielen Kreisen entlang dieses  
 Polygonzuges kommt man von  $z_0$  nach  $z_1$ .  
 Für jeden dieser Kreise gilt dann nach dem 1. Teil  
 des Beweises, daß  $f$  konstant im Inneren dieser  
 Kreise ist. Also gilt  $f(z_1) = f(z_0)$ .



Da  $z_1 \in G$  beliebig  $\Rightarrow f(z) = f(z_0) \quad \forall z \in G$   
 $\Rightarrow f$  ist konstant in  $G \Rightarrow$  Widerspruch.

Also wird für eine nicht- konstante holomorphe Funktion das Maximum nicht im  
 Inneren von  $G$ , sondern auf dem Rand  $\partial G$  von  $G$  angenommen.

### Beispiel

*Gesucht:*  $\max_{|z| \leq 1} |z^2 - 1|$ .

Nach dem Maximumprinzip gilt:

$$\begin{aligned}
 \max_{|z| \leq 1} |z^2 - 1| &= \max_{|z|=1} |z^2 - 1| = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |e^{2i\varphi} - 1| = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \sqrt{(\cos 2\varphi - 1)^2 + \sin^2 2\varphi} \\
 &= \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \sqrt{2 - 2 \cos 2\varphi} = 2 \Leftrightarrow 2\varphi = \pi, 3\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\
 &\Leftrightarrow z = e^{i\pi/2}, e^{i3\pi/2} \Leftrightarrow z = \pm i.
 \end{aligned}$$

Also gilt:  $\max_{|z| \leq 1} |z^2 - 1| = 2$ , das Maximum wird angenommen bei  $z = \pm i$ .

## 12. Stammfunktionen

Gewisse komplexe Integrale können auch mit Hilfe von *Stammfunktionen* berechnet  
 werden. Dazu muß natürlich das komplexe Integral *wegunabhängig* sein.

### Definition 16.45 : Stammfunktion

Sei  $G \subset \mathcal{C}$  Gebiet, seien  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$  und  $F : G \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $G$ .

$F$  heißt *Stammfunktion* von  $f$  in  $G \Leftrightarrow F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$ .

Da  $F$  als holomorphe Funktion in  $G$  beliebig oft holomorph ist, muß auch  $f$  holomorph  
 in  $G$  sein. Also nur holomorphe Funktionen können Stammfunktionen besitzen.

Wie im Reellen unterscheiden sich zwei Stammfunktionen nur durch eine Konstante, denn für  $h(z) = F_2(z) - F_1(z)$  mit  $F_1'(z) = F_2'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$  gilt:  
 $h'(z) = 0 \quad \forall z \in G \Rightarrow h$  konstant in  $G \Rightarrow F_2(z) = F_1(z) + c, \quad c \in \mathcal{C}, \quad \forall z \in G.$

*Frage:* Wann besitzt eine holomorphe Funktion eine Stammfunktion ?

Kann man mit Hilfe einer Stammfunktion ein komplexes Integral berechnen ?

**Satz 16.46 :**

Sei  $G \subset \mathcal{C}$  ein *einfach zusammenhängendes Gebiet*, sei  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$  *holomorph* in  $G$ .

Dann ist  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in G, \quad z_0 \in G$  fest,

*Stammfunktion* von  $f$  in  $G$ .

Ist  $F$  Stammfunktion von  $f$  in  $G$ , so gilt für beliebige  $z_1, z_2 \in G$  und für beliebige in  $G$  verlaufende stückweise glatte Kurven  $K(z_1, z_2)$  von  $z_1$  nach  $z_2$

$$\int_{K(z_1, z_2)} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

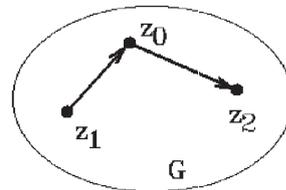
*Beweis :*

Nach Satz 16.34 ist das Integral  $\int_{K(z_1, z_2)} f(z) dz$  wegunabhängig.

Für  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  gilt also

$$\begin{aligned} F(z_2) - F(z_1) &= \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

(Weg von  $z_1$  nach  $z_2$  über  $z_0$ ).



Zu zeigen bleibt:  $F$  ist differenzierbar in  $z \in G$  mit  $F'(z) = f(z)$ .

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta - f(z) \right| \quad (h \in \mathcal{C} \setminus \{0\}).$$

Wählen wir  $K(z, z+h) : \zeta(t) = z + t(z+h-z) = z + th, \quad t \in [0, 1], \quad d\zeta = hdt,$   
 (Strecke von  $z$  nach  $z+h$ ), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) h dt - f(z) \right| = \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt \right| \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} |f(z+th) - f(z)| < \epsilon \quad \text{für } |h| < \delta, \text{ da } f \text{ stetig in } z. \end{aligned}$$

$\Rightarrow F'(z) = f(z)$ . Da  $z \in G$  beliebig  $\Rightarrow F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$

$\Rightarrow F$  ist Stammfunktion von  $f$  in  $G$ .

## Beispiele

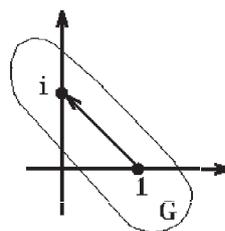
1. Sei  $K(1, i)$  die Strecke von 1 nach  $i$ . Dann gilt

$$\int_{K(1,i)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \Big|_1^i = \frac{-1}{i} + 1 = 1 + i .$$

Denn:

$G$  ist einfach zusammenhängendes Gebiet,

$f(z) = \frac{1}{z^2}$  ist holomorph in  $G$ .



2. Für den *Hauptwert* von  $\log z$  gilt

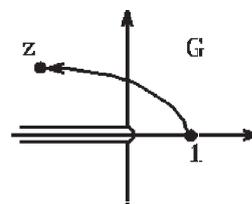
$$\log z = \int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta \quad \forall z \in \mathcal{C} \setminus \{z = x : x \leq 0\}$$

Denn:

$G$  ist einfach zusammenhängendes Gebiet,

$f(z) = \frac{1}{z}$  ist holomorph in  $G$ .

$$\Rightarrow \int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta = \log \zeta \Big|_1^z = \log z .$$



## 13. Reihenentwicklung komplexer Funktionen

### a) Funktionenfolgen

Seien  $f_n : G \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , komplexwertige Funktionen auf einem Gebiet  $G$ , dann heißt  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine *Funktionenfolge* auf  $G$ .

**Definition 16.47 :** *Konvergenz von Funktionenfolgen*

- a)  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *punktweise konvergent* in  $G$  gegen  $f$   
 $\Leftrightarrow f_n(z)$  konvergiert gegen  $f(z) \quad \forall z \in G$   
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) \quad \forall z \in G$ .

$f : G \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$  heißt dann *Grenzfunktion* der Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- b)  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *gleichmäßig konvergent* in  $G$  gegen  $f$   
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{z \in G} |f_n(z) - f(z)| \right) = 0$ .

- c)  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *kompakt konvergent* in  $G$   
 $\Leftrightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert *gleichmäßig* in jeder kompakten Teilmenge  $T \subset G$ .  
*( $T$  kompakt  $\Leftrightarrow T$  abgeschlossen und beschränkt).*

Sind alle Funktionen  $f_n$  der Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *holomorph* in  $G$ , und liegt *kompakte Konvergenz* in  $G$  vor, so gilt der folgende Satz:

**Satz 16.48 :**

Sei  $G \subset \mathcal{C}$  Gebiet, für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n$  holomorph in  $G$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere kompakt in  $G$  gegen  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$ . Dann gilt :

- a) Die Grenzfunktion  $f$  ist holomorph in  $G$ .
- b) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und für alle  $z \in G$  gilt
 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z) \quad \text{mit kompakter Konvergenz in } G.$$
 (D.h.: Differentiation und Grenzprozeß dürfen vertauscht werden).
- c) Für jede stückweise glatte Kurve  $K$  in  $G$  gilt
 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(z) dz = \int_K f(z) dz .$$
 (D.h.: Integration und Grenzprozeß dürfen vertauscht werden).

**Bemerkung :** Dieser Satz besitzt im Reellen kein Analogon.

*Beweis :*

Wie im Reellen zeigt man, daß die Grenzfunktion stetig ist (da alle  $f_n$  stetig sind und gleichmäßige Konvergenz vorliegt).

- c) Sei  $K \subset G$  stückweise glatte Kurve  $\Rightarrow K$  ist kompakt  
 $\Rightarrow (f_n)$  konvergiert gleichmäßig auf  $K$  gegen  $f \Rightarrow$   

$$\left| \int_K f_n(z) dz - \int_K f(z) dz \right| = \left| \int_K (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq \max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \cdot L(K) \rightarrow 0$$
 für  $n \rightarrow \infty$  (wegen gleichmäßiger Konvergenz)  $\Rightarrow$  c)

- a) Sei  $z_0 \in G \Rightarrow \exists U_\delta(z_0) \subset G$ , und für jede geschlossene, stückweise glatte Jordankurve  $K_0 \subset U_\delta(z_0)$  gilt

$$0 = \int_{K_0} f_n(z) dz \rightarrow \int_{K_0} f(z) dz \Rightarrow \int_{K_0} f(z) dz = 0.$$

Aus einem Satz von Morera, den wir hier nicht angegeben haben (vgl. Literatur), folgt nun, daß  $f$  holomorph in  $U_\delta(z_0)$  ist.

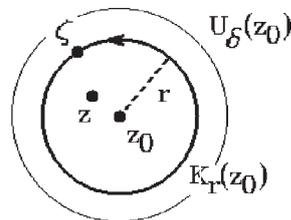
Da  $z_0 \in G$  beliebig  $\Rightarrow f$  ist holomorph in  $G$ .

- b) Sei  $z_0 \in G, U_\delta(z_0) \subset G$ . Nach der erweiterten Cauchyschen Integralformel (vgl. Satz 16.39, S.660)) gilt dann

$$\forall z \in U_{\delta/2}(z_0) \quad \text{mit } r = 3\delta/4$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad \text{und}$$

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \Rightarrow$$



$$\left| f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{K_r(z_0)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \max_{\zeta \in K_r(z_0)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \cdot 2\pi r \cdot \left(\frac{4}{\delta}\right)^{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{(wegen gleichmäßiger Konvergenz)}$$

$\Rightarrow f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$  gleichmäßig in  $U_{\delta/2}(z_0)$ .

Da jede kompakte Teilmenge  $T \subset G$  durch endlich viele  $U_{\delta/2}$  überdeckt werden kann  $\Rightarrow f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$  gleichmäßig in  $T$ .

Da  $T \subset G$  beliebig  $\Rightarrow$  kompakte Konvergenz in  $G$ .

## b) Funktionenreihen

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  eine unendliche Reihe von komplexen Funktionen  $f_k : G \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  mit

$G$  Gebiet,  $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$  die  $n$ -te Partialsumme,  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Partialsummenfolge.

**Definition 16.49 :** *Konvergenz einer Funktionenreihe*

a) Die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  heißt *punktweise*, bzw. *gleichmäßig*, bzw. *kompakt konvergent* in  $G$ , wenn die Partialsummenfolge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diese Eigenschaft erfüllt.

b) Die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  heißt *absolut* (punktweise, bzw. gleichmäßig, bzw.

kompakt) *konvergent* in  $G$ , wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$  diese Eigenschaft erfüllt.

Wenden wir den Satz 16.48 auf die Partialsummenfolge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  an, so erhalten wir sofort folgenden Satz:

**Satz 16.50 :**

Sei  $G \subset \mathcal{C}$  Gebiet, für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n$  holomorph in  $G$ . Die Funktionenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  konvergiere kompakt in  $G$ .

Dann gilt für die Grenzfunktion  $f : G \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) :$

a) Die Grenzfunktion  $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  ist holomorph in  $G$ .

b) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und für alle  $z \in G$  gilt

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad \text{mit kompakter Konvergenz in } G.$$

(D.h.: Differentiation und Summation dürfen vertauscht werden).

c) Für jede stückweise glatte Kurve  $K$  in  $G$  gilt

$$\int_K \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_K f_n(z) dz .$$

(D.h.: Integration und Summation dürfen vertauscht werden).

### Beispiele

1.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n} \quad , \quad G = \{z \in \mathcal{C} : |z| > 1\} .$$

$f_n(z) = \frac{1}{1+z^n}$  ist holomorph in  $G$  (da Nenner  $\neq 0$ ),  
 $G$  ist Gebiet.

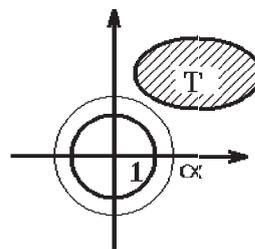
Sei  $T \subset G$  kompakt

$$\Rightarrow \exists \alpha > 1 \text{ mit } |z| \geq \alpha \quad \forall z \in T$$

$$\Rightarrow |z^n| = |z|^n \geq \alpha^n \quad \forall z \in T .$$

Es gilt allgemein für  $a, b \in \mathcal{C}$

$|a - b| \geq |a| - |b| \geq 0 \quad , \quad \text{falls } |a| \geq |b|$



Denn:

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \quad \Rightarrow \quad |a| - |b| \leq |a - b| .$$

Also gilt:  $|1 + z^n| = |z^n - (-1)| \geq |z^n| - |-1| \geq \alpha^n - 1$

$$\Rightarrow |f_n(z)| = \left| \frac{1}{1+z^n} \right| \leq \frac{1}{\alpha^n - 1} \quad \forall z \in T .$$

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n - 1}$  konvergent, denn: (Quotientenkriterium)

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1} - 1} = \frac{1 - (1/\alpha)^n}{\alpha - (1/\alpha)^n} \rightarrow \frac{1}{\alpha} < 1 ,$$

folgt hieraus:  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n}$  konvergiert gleichmäßig in  $T$ .

Da  $T \subset G$  beliebig  $\Rightarrow f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  ist kompakt konvergent in  $G$ .

Also gilt nach Satz 16.50:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n} \quad \text{ist holomorph in } G ,$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+z^n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)nz^{n-1}}{(1+z^n)^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{(1+z^n)^2} ,$$

$$\int_K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_K \frac{1}{1+z^n} dz \quad , \quad \text{falls } K \subset G \text{ stückweise glatt.}$$

## 2. Potenzreihen

Sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ,  $a_n \in \mathcal{C}$ ,  $z_0 \in \mathcal{C}$  fest, eine Potenzreihe um  $z_0$ .

Für Potenzreihen gilt (vgl. Satz 4.6, S.118 und Satz 5.18, S.148):

### Satz 16.51 : Potenzreihen

Für Potenzreihen existiert eindeutig ein *Konvergenzradius*  $R$  mit  $0 \leq R \leq \infty$ , so daß gilt

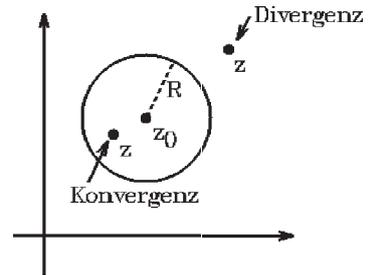
- Ist  $R = 0$ , so konvergiert die Potenzreihe nur in  $z_0$ .
- Ist  $R = \infty$ , so konvergiert die Potenzreihe in  $\mathcal{C}$  (mit absoluter Konvergenz).
- Ist  $0 < R < \infty$ , so konvergiert die Potenzreihe im Inneren des *Konvergenzkreises*  $U_R(z_0) = \{z \in \mathcal{C} : |z - z_0| < R\}$  (mit absoluter Konvergenz). Sie divergiert außerhalb, d.h. in  $\{z \in \mathcal{C} : |z - z_0| > R\}$ .
- Die Konvergenz ist gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von  $U_R(z_0)$ .  
D.h.: Die Potenzreihe *konvergiert kompakt* in  $U_R(z_0)$ .

*Bestimmung des Konvergenzradius*  $R$  mit Hilfe des Quotientenkriteriums:

$$\left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| \rightarrow K |z - z_0| < 1 \Rightarrow |z - z_0| < \frac{1}{K} = R, \\ \text{falls } 0 < K < \infty.$$

$$(K = 0 \Rightarrow R = \infty, \quad K = \infty \Rightarrow R = 0).$$

Auf dem Rand des Konvergenzbereichs kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.



Aus Satz 16.50 und Satz 16.51 folgt nun sofort der folgende Satz:

### Satz 16.52 : Potenzreihen

Eine Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  mit Konvergenzradius  $R > 0$  ist im Inneren ihres Konvergenzkreises  $U_R(z_0)$  *holomorph* mit

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \dots (n-k+1) (z - z_0)^{n-k} \Rightarrow f^{(k)}(z_0) = k! a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}$$

Hieraus folgt sofort der folgende Satz:

**Satz 16.53 :** *Identitätssatz für Potenzreihen*

Gilt für  $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  und  $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  :

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in U_R(z_0)$$

( $R = \min\{R_1, R_2\}$  mit  $R_i$  Konvergenzradius von  $f_i$ , ( $i = 1, 2$ ))

$$\Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

*Beweis :*

Da  $f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in U_R(z_0)$

$$\Rightarrow f_1^{(k)}(z) = f_2^{(k)}(z) \quad \forall z \in U_R(z_0), \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{nach Satz 16.52}).$$

**Bemerkung :** Dieser Satz ist die Rechtfertigung für den "Koeffizientenvergleich" zweier Potenzreihen, die in  $U_R(z_0)$  übereinstimmen.

Nach Satz 16.52 ist jede *Potenzreihe* im Inneren ihres Konvergenzkreises *holomorph*. Umgekehrt läßt sich auch jede *holomorphe* Funktion in eine Potenzreihe entwickeln:

**Satz 16.54 :** *Potenzreihenentwicklung*

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet, sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$ .

Sei  $z_0 \in G$  und  $K_r(z_0)$  der größte Kreis um  $z_0$ , der mitsamt seinem Inneren noch ganz in  $G$  liegt, also  $\bar{I}(K_r(z_0)) \subset G$ ,  $r$  maximal.

Dann läßt sich  $f$  in  $U_r(z_0)$  eindeutig in eine *Potenzreihe* (Taylorreihe) um  $z_0$  entwickeln mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

*Beweis :*

Sei  $z_0 \in G$ ,  $R$  der Mindestabstand von  $z_0$  zum Rand von  $G$ , also zu  $\partial G$

$$\Rightarrow U_R(z_0) \subset G.$$

Mit  $0 < r < R$  ist  $U_r(z_0) \subset U_R(z_0) \subset G$

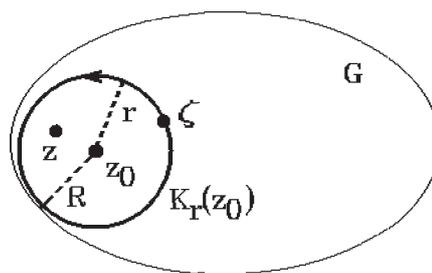
und  $K_r(z_0) \subset U_R(z_0)$ .

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in I(K_r(z_0)).$$

Wir entwickeln  $\frac{1}{\zeta - z}$  um  $z_0$  in eine Potenzreihe (geometrische Reihe):

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$



$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \text{konvergent, da } \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$$

(da  $z \in I(K_r(z_0))$  und  $\zeta \in K_r(z_0)$ ).

Hierbei ist die Konvergenz gleichmäßig (bzgl.  $\zeta$ ) auf  $K_r(z_0)$ , da  $K_r(z_0)$  kompakte Teilmenge des Konvergenzbereichs dieser geometrischen Reihe ist.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf  $K_r(z_0)$  dürfen Integration und Summation vertauscht werden. Wir erhalten dann für alle  $z \in I(K_r(z_0))$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right\} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Nach der erweiterten Cauchyschen Integralformel (vgl. Satz 16.39, S.660) ist der Ausdruck in der geschweiften Klammer gleich  $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ . Damit erhalten wir insgesamt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \forall z \in I(K_r(z_0)).$$

Nach Satz 16.53 ist diese Reihendarstellung eindeutig.

## Beispiele

1.

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1 \quad (\text{Entwicklung um } z_0 = 0).$$

Entwicklung um  $z_0 = i$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - z} &= \frac{1}{(1 - i) - (z - i)} = \frac{1}{1 - i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - i}{1 - i}} = \frac{1}{1 - i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - i}{1 - i} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(1 - i)^{n+1}}, \quad \text{konvergent, falls } \left| \frac{z - i}{1 - i} \right| < 1, \text{ also falls } |z - i| < \sqrt{2}. \end{aligned}$$

2.

$$\frac{1}{(1 - z)^2} = \left( \frac{1}{1 - z} \right)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) z^n, \quad |z| < 1.$$

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 - 2z - 3} &= \frac{1}{(z - 3)(z + 1)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{z - 3} - \frac{1}{z + 1} \right) = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} - \frac{1}{1 + z} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{3} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n \right) z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

(|z| < 3)                      (|z| < 1)                      (Reihenentwicklung um  $z_0 = 0$ ).

3.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathcal{C} \quad (\text{Entwicklung um } z_0 = 0).$$

Entwicklung um  $z_0 = i$  :

$$e^z = e^{z-i+i} = e^i e^{z-i} = e^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}, \quad z \in \mathcal{C}.$$

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}, \quad z \in \mathcal{C}.$$

4.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathcal{C}.$$

$$\Rightarrow \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots, \quad z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}.$$

Diese Gleichung gilt auch für  $z = 0$ , da  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$  und die rechte Seite ebenfalls gegen 1 konvergiert für  $z \rightarrow 0$ .

Also gilt für die Funktion  $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & , \text{ falls } z \neq 0 \\ 1 & , \text{ falls } z = 0 \end{cases}$  die Reihendarstellung:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}, \quad z \in \mathcal{C}.$$

Da diese Potenzreihe in ganz  $\mathcal{C}$  konvergent und damit holomorph ist, gilt:  $f$  ist *holomorph* in  $\mathcal{C}$ .

5.

$$\begin{aligned} e^z \sin z &= \frac{1}{2i} e^z (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} (e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} \right) \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Da  $(1+i)^n = \sqrt{2}^n e^{in\pi/4}$ ,  $(1-i)^n = \sqrt{2}^n e^{-in\pi/4} \Rightarrow$

$(1+i)^n - (1-i)^n = \sqrt{2}^n 2i \sin(n\pi/4)$ . Also erhalten wir

$$e^z \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} \sin(n\frac{\pi}{4}) z^n, \quad e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} \cos(n\frac{\pi}{4}) z^n, \quad z \in \mathcal{C}.$$

(2. Gleichung analog).

6.

$$\log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad |z| < 1 \quad (\text{gilt für den Hauptwert}).$$

*Denn:* Der Hauptwert von  $\log z$  stimmt für reelle positive  $z = x$  mit  $\ln x$  überein. Für  $\ln(x + 1)$  gilt diese Gleichung (vgl. S.174). Also stimmt auf einem Teil der positiven reellen Achse diese Potenzreihe mit  $\log(z + 1)$  überein. Daß sie dann auch in  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  übereinstimmt, folgt aus dem nächsten Satz.

**Satz 16.55 :** *Identitätssatz für holomorphe Funktionen*

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet, seien  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$ .

Sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine unendliche Folge in  $G$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in G$ ,  $z_n \neq z_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Gilt dann  $f(z_n) = g(z_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(z) = g(z) \quad \forall z \in G$ .

*Beweis :*

a)  $h(z) := f(z) - g(z) \Rightarrow h$  ist holomorph in  $G$ .

$h(z_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow h(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = 0$ .

$h$  läßt sich um  $z_0$  in eine Potenzreihe entwickeln:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in U_\delta(z_0). \quad \text{Da } h(z_0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0.$$

*Annahme:*  $h(z) \neq 0$  in  $U_\delta(z_0)$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$  mit  $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ ,  $a_m \neq 0$

$\Rightarrow h(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots = (z - z_0)^m \tilde{h}(z)$

mit  $\tilde{h}(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots \Rightarrow \tilde{h}(z_0) = a_m \neq 0$ .

Da  $\tilde{h}$  stetig in  $U_\delta(z_0)$ , existiert  $U_\epsilon(z_0)$  mit  $U_\epsilon(z_0) \subset U_\delta(z_0)$  und  $\tilde{h}(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_\epsilon(z_0)$

$\Rightarrow h(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ .

Das ist aber ein Widerspruch, da in jeder Umgebung von  $z_0$  Folgeelemente  $z_n$  liegen, also  $h(z_n) = 0$  gilt.

$\Rightarrow h(z) = 0 \quad \forall z \in U_\delta(z_0)$ .

b) Zu zeigen bleibt:  $h(z) = 0 \quad \forall z \in G$ .

Sei  $z_1 \in G$  beliebig, dann können wir

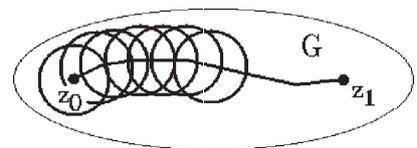
$z_0$  mit  $z_1$  durch einen Polygonzug miteinander verbinden.

Diesen Polygonzug können wir mit endlich vielen Kresumgebungen  $U_\delta(z_i)$  überdecken.

In jedem  $U_\delta(z_i)$  können wir a) anwenden

$\Rightarrow h(z) = 0 \quad \forall z \in U_\delta(z_i) \Rightarrow h(z_1) = 0$ .

Da  $z_1 \in G$  beliebig  $\Rightarrow h(z) = 0 \quad \forall z \in G \Rightarrow f(z) = g(z) \quad \forall z \in G$ .



**Bemerkung :** Dieser Satz gilt nicht mehr, wenn  $z_0$  (der Grenzwert der Folge) nicht mehr in  $G$ , sondern auf dem Rand von  $G$  liegt. Dies zeigt das folgende Gegenbeispiel:

**Gegenbeispiel**

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad g(z) \equiv 0, \quad G = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$f$  und  $g$  sind holomorph in  $G$ ,  $G$  ist Gebiet.

$$z_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow z_0 = 0 \notin G, \quad f(z_n) = g(z_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \not\Rightarrow f(z) = g(z) \quad \forall z \in G.$$

**Folgerung** aus Satz 16.55

Enthält  $G$  ein Stück der reellen Achse und stimmen zwei in  $G$  holomorphe Funktionen auf diesem Stück der reellen Achse überein, so stimmen sie in ganz  $G$  überein.

**Beispiel hierzu** (vgl. Beispiel 6, S.674)

$$\log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad |z| < 1$$

**Bemerkung** : zu Potenzreihen

Wie im Reellen können komplexe Potenzreihen in ihren gemeinsamen Konvergenzbereichen *addiert*, *subtrahiert*, *multipliziert* und *dividiert* (falls Nenner  $\neq 0$ ) werden.

### 3. Laurent-Reihen

**Definition 16.56** : *Laurent-Reihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathcal{C}, \quad z_0 \in \mathcal{C} \text{ fest}$$

heißt *Laurent-Reihe* um  $z_0$ . Für alle  $z \in \mathcal{C}$ , für die diese Reihe konvergiert, definiert sie eine komplexe Funktion  $f$ .

Man kann diese Reihe zerlegen:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} \text{ heißt } \textit{Hauptteil} \text{ der Laurent-Reihe,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ heißt } \textit{Regulärteil} \text{ der Laurent-Reihe.}$$

Der Regulärteil ist eine Potenzreihe, besitzt also einen Konvergenzradius  $R_2$ . Damit ist der Regulärteil holomorph in  $U_{R_2}(z_0)$ , falls  $R_2 > 0$ .

Setzen wir im Hauptteil  $b_n := a_{-n}$ ,  $\varrho = \frac{1}{z - z_0}$ , so erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varrho^n. \quad \text{Das ist eine Potenzreihe (für } \varrho) \text{ mit Konvergenzradius}$$

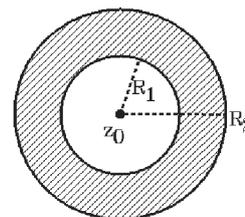
$\tilde{R}$ , konvergiert also für  $|\varrho| < \tilde{R}$ , falls  $\tilde{R} > 0$ . Also konvergiert der Hauptteil für

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \tilde{R} \Leftrightarrow |z - z_0| > \frac{1}{\tilde{R}} = R_1 \quad (\text{falls } 0 < \tilde{R} < \infty).$$

Es können nun folgende Fälle auftreten:

a) Ist  $0 < R_1 < R_2$ , so konvergiert die Laurent-Reihe  $f(z)$  für alle  $z \in \mathcal{C}$  mit  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ , also im Ringgebiet

$$R_{R_1, R_2}(z_0) = \{z \in \mathcal{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$



Die Konvergenz ist *kompakt* im Inneren dieses Ringgebietes.

b) Ist  $R_1 = R_2$ , so ist das Ringgebiet entartet zu einer Kreislinie. Auf dieser Kreislinie kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.

c) Ist  $R_1 > R_2$ , so konvergiert die Laurent-Reihe *nirgends*.

### Beispiel

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{|n|}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2z}}{1 - \frac{1}{2z}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{2z - 1} + \frac{2}{2 - z} \\ &\quad \left( \left|\frac{1}{2z}\right| < 1, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > 1/2, \quad |z| < 2 \right) \\ \Rightarrow f(z) &= \frac{2 - z + 4z - 2}{(2z - 1)(2 - z)} = \frac{3z}{5z - 2z^2 - 2}, \quad \text{falls } \frac{1}{2} < |z| < 2, \end{aligned}$$

also ist die Laurent-Reihe  $f(z)$  konvergent im Ringgebiet

$$R_{1/2, 2}(0) = \{z \in \mathcal{C} : 1/2 < |z| < 2\}.$$

Da die Laurent-Reihe kompakt konvergiert in ihrem Konvergenzring  $R_{R_1, R_2}(z_0)$  und die einzelnen Summanden dort holomorph sind, folgt aus Satz 16.50 (vgl. S.669):

### Satz 16.57 : Laurent-Reihen

Eine *Laurent-Reihe* stellt im Inneren ihres Konvergenz-Ringgebietes  $R_{R_1, R_2}(z_0)$  eine *holomorphe* Funktion dar.

Umgekehrt läßt sich jede in einem Ringgebiet holomorphe Funktion dort in eine Laurent-Reihe entwickeln:

### Satz 16.58 :

Sei  $R_{R_1, R_2}(z_0) = \{z \in \mathcal{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$  ein Ringgebiet,

sei  $f : R_{R_1, R_2}(z_0) \rightarrow \mathcal{C}$  *holomorph* in  $R_{R_1, R_2}(z_0)$ .

Dann läßt sich  $f$  in  $R_{R_1, R_2}(z_0)$  eindeutig in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{um } z_0 \text{ entwickeln.}$$

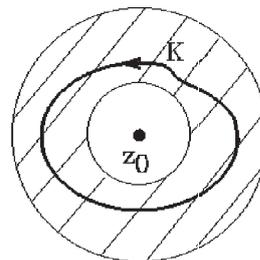
Die Reihe *konvergiert kompakt* in  $R_{R_1, R_2}(z_0)$ . Für die Koeffizienten  $a_n$  gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Hierbei ist  $K$  eine *geschlossene, positiv orientierte*, stückweise glatte Jordankurve in  $R_{R_1, R_2}(z_0)$ , die einmal um den inneren Kreis des Ringgebietes  $R_{R_1, R_2}(z_0)$  verläuft.

Insbesondere gilt für  $n = -1$  :

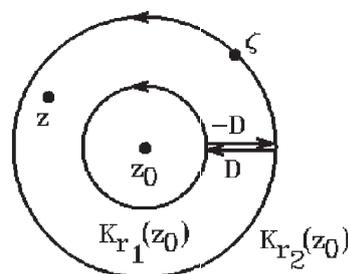
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) dz$$



*Beweis :*

Die Kurve  $K$  hat einen positiven Abstand zum Rand von  $R_{R_1, R_2}(z_0)$ , also existieren  $r_1, r_2$  mit  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$  und  $K \subset R_{r_1, r_2}(z_0)$ .

$K_{r_1}(z_0)$  und  $K_{r_2}(z_0)$  seien die entsprechenden Kreise um  $z_0$  mit Radius  $r_1$  bzw.  $r_2$ . Sei  $z \in R_{r_1, r_2}(z_0)$  und  $D$  ein Geradenstück, das die Kreise  $K_{r_1}(z_0)$  und  $K_{r_2}(z_0)$  verbindet mit  $z \notin D$ . Dann ist die Kurve  $\tilde{K} = K_{r_2}(z_0) + D - K_{r_1}(z_0) - D$  eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve, die ganz im Inneren von  $R_{R_1, R_2}(z_0)$  verläuft mit  $z$  im Inneren dieser Kurve.



Nach der Cauchyschen Integralformel gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

(da die 2 Integrale über  $D$  bzw.  $-D$  sich gegenseitig aufheben).

Nun müssen wir wieder (wie beim Beweis zu Satz 16.54 (vgl. S.672))

$\frac{1}{\zeta - z}$  in eine Reihe um  $z_0$  entwickeln:

$$1. \text{ Fall: } \zeta \in K_{r_2}(z_0) \Rightarrow |\zeta - z_0| > |z - z_0| \Rightarrow \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \text{konvergent, da } \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1,$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf  $K_{r_2}(z_0)$ .

Damit erhalten wir für das 1. Integral (wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf  $K_{r_2}(z_0)$  dürfen Integration und Summation vertauscht werden):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_2}(z_0)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right\} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad , \quad n \geq 0.$$

Die Integrale über  $K_{r_2}(z_0)$  und  $K$  sind nach Satz 16.35 (vgl. S.655) gleich.

$$2.\text{Fall: } \zeta \in K_{r_1}(z_0) \Rightarrow |z - z_0| > |\zeta - z_0| \Rightarrow \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \quad \text{konvergent, da } \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1,$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf  $K_{r_1}(z_0)$ .

Damit erhalten wir für das 2. Integral (wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf  $K_{r_1}(z_0)$  dürfen Integration und Summation vertauscht werden):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_1}(z_0)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right\} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} \quad \text{mit}$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta \quad , \quad n \geq 1.$$

Die Integrale über  $K_{r_1}(z_0)$  und  $K$  sind nach Satz 16.35 (vgl. S.655) gleich.

Zusammen folgt dann:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad , \quad n \in \mathbb{Z}.$$

In  $R_{r_1, r_2}(z_0)$  gilt kompakte Konvergenz. Da  $r_1, r_2$  beliebig nahe an  $R_1, R_2$  gewählt werden können, gilt auch kompakte Konvergenz in  $R_{R_1, R_2}(z_0)$ .

Die Eindeutigkeit sieht man folgendermaßen:

$$\text{Gilt } \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in R_{R_1, R_2}(z_0), \text{ so folgt nach Multiplikation mit } (z - z_0)^{-k-1} \text{ und anschließender Integration über einen Kreis } K_r(z_0) \text{ mit } R_1 < r < R_2$$

likation mit  $(z - z_0)^{-k-1}$  und anschließender Integration über einen Kreis  $K_r(z_0)$  mit  $R_1 < r < R_2$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{K_r(z_0)} (z - z_0)^{n-k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{K_r(z_0)} (z - z_0)^{n-k-1} dz.$$

Die Integrale sind alle gleich 0, falls  $n \neq k$ , und sie sind gleich  $2\pi i$ , falls  $n = k$  (vgl. S.648). Damit erhalten wir  $a_k = b_k$ . Da  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig  $\Rightarrow a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

## Beispiele

Soll eine *rationale Funktion* in eine *Laurent-Reihe* entwickelt werden, so führt man zunächst eine Partialbruchzerlegung durch und entwickelt dann die einzelnen Summanden jeweils mit Hilfe der geometrischen Reihe entweder in einen *Hauptteil* oder in einen *Regulärteil* (d.h. in eine Potenzreihe).

1.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{-i}{2} \cdot \frac{1}{z - i} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z + i} \quad \text{holomorph in } \mathcal{C} \setminus \{\pm i\}.$$

a) *Laurententwicklung* um  $z_0 = i$  in  $R_{0,2}(i)$  :

$\frac{1}{z + i}$  muß in einen Regulärteil (also in eine Potenzreihe)

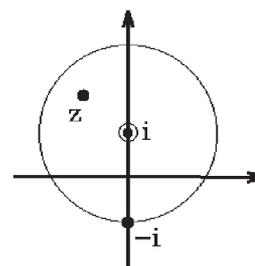
entwickelt werden, da  $\frac{1}{z + i}$  in  $I(K_2(i))$  holomorph ist (die Singularität  $(-i)$  liegt außerhalb von  $I(K_2(i))$ ).

$$\begin{aligned} \frac{1}{z + i} &= \frac{1}{2i + (z - i)} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - i)^n}{(2i)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - i)^n}{(2i)^{n+1}}, \quad |z - i| < |2i| = 2. \end{aligned}$$

$\frac{1}{z - i}$  muß in einen Hauptteil entwickelt werden, da die Singularität  $(i)$  innerhalb von  $I(K_2(i))$  liegt. In diesem Fall ist  $\frac{1}{z - i}$  schon fertiger Hauptteil.

Insgesamt erhalten wir

$$f(z) = \underbrace{\frac{-i}{2} \cdot \frac{1}{z - i}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - i)^n}{(2i)^{n+1}}}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z - i| < 2, \text{ also konvergent in } R_{0,2}(i).$$

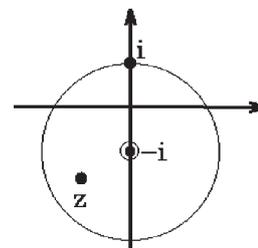


b) *Laurententwicklung* um  $z_0 = -i$  in  $R_{0,2}(-i)$  :

$\frac{1}{z - i}$  muß in einen Regulärteil (also in eine Potenzreihe)

entwickelt werden, da  $\frac{1}{z - i}$  in  $I(K_2(-i))$  holomorph ist (die Singularität  $(i)$  liegt außerhalb von  $I(K_2(-i))$ ).

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - i} &= \frac{1}{-2i + (z + i)} = \frac{-1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+i}{2i}} \\ &= -\frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + i)^n}{(2i)^n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + i)^n}{(2i)^{n+1}}, \quad |z + i| < |2i| = 2. \end{aligned}$$



$\frac{1}{z+i}$  muß in einen Hauptteil entwickelt werden, da die Singularität  $(-i)$  innerhalb von  $I(K_2(-i))$  liegt. In diesem Fall ist  $\frac{1}{z+i}$  schon fertiger Hauptteil.

Insgesamt erhalten wir

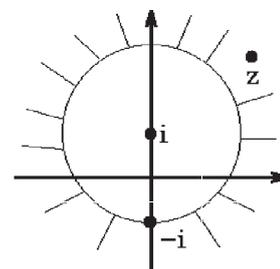
$$f(z) = \underbrace{\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z+i}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2i)^{n+1}}}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z+i| < 2, \text{ also konvergent in } R_{0,2}(-i).$$

c) *Laurententwicklung* um  $z_0 = i$  in  $R_{2,\infty}(i)$  :

Da beide Singularitäten in  $\bar{I}(K_2(i))$  liegen, müssen  $\frac{1}{z-i}$  und  $\frac{1}{z+i}$  beide in einen Hauptteil entwickelt werden.

$\frac{1}{z-i}$  ist schon fertig.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+i} &= \frac{1}{2i + (z-i)} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2i}{z-i}} \\ &= \frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2i)^n}{(z-i)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2i)^{n+1}}{(z-i)^{n+1}}, \quad |z-i| > |2i| = 2. \end{aligned}$$



Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2i)^n}{(z-i)^{n+1}} = \frac{-i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2i)^n}{(z-i)^{n+1}} \\ \Rightarrow f(z) &= \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2i)^n}{(z-i)^{n+1}}, \quad |z-i| > 2, \text{ also konvergent in } R_{2,\infty}(i). \end{aligned}$$

In diesem Fall besteht die Laurent-Reihe nur aus einem Hauptteil, der Regulärteil ist  $\equiv 0$ .

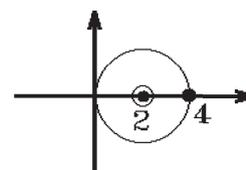
2.

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-4} \quad \text{holomorph in } \mathcal{C} \setminus \{2, 4\}.$$

a) *Laurententwicklung* um  $z_0 = 2$  in  $R_{0,2}(2)$  :

$\frac{1}{z-4}$  muß in einen Regulärteil (also in eine Potenzreihe) entwickelt werden, da  $\frac{1}{z-4}$  in  $I(K_2(2))$  holomorph ist (die Singularität  $(4)$  liegt außerhalb von  $I(K_2(2))$ ).

$$\frac{1}{z-4} = \frac{1}{-2 + (z-2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-2}{2}}$$



$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}, \quad |z-2| < 2.$$

$\frac{1}{z-2}$  muß in einen Hauptteil entwickelt werden, da die Singularität (2) innerhalb von  $I(K_2(2))$  liegt. In diesem Fall ist  $\frac{1}{z-2}$  schon fertiger Hauptteil.

Insgesamt erhalten wir

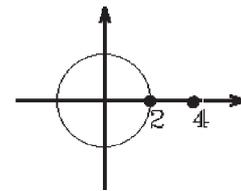
$$f(z) = \underbrace{\frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{z-2}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z-2| < 2, \text{ also konvergent in } R_{0,2}(2).$$

b) *Laurententwicklung* um  $z_0 = 0$  in  $R_{0,2}(0)$  :

Da beide Summanden  $\frac{1}{z-2}$  und  $\frac{1}{z-4}$  holomorph in  $I(K_2(0))$  sind (beide Singularitäten (2) und (4) liegen außerhalb von  $I(K_2(0))$ ), müssen  $\frac{1}{z-2}$  und  $\frac{1}{z-4}$  beide in einen Regulärteil (also in eine Potenzreihe) entwickelt werden.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.$$

$$\frac{1}{z-4} = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}, \quad |z| < 4.$$



Insgesamt erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) z^n, \quad |z| < 2, \text{ also konvergent in } R_{0,2}(0).$$

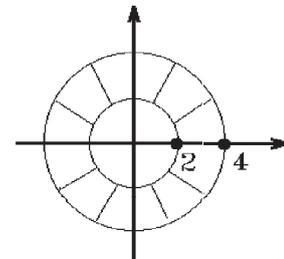
In diesem Fall besteht die Laurent-Reihe nur aus einem Regulärteil, der Hauptteil ist  $\equiv 0$  ( $f$  ist also holomorph in  $\{z \in \mathcal{C} : |z| < 2\}$ ).

c) *Laurententwicklung* um  $z_0 = 0$  in  $R_{2,4}(0)$  :

$\frac{1}{z-4}$  muß in einen Regulärteil entwickelt werden (die Singularität (4) liegt außerhalb von  $I(K_4(0))$ ).

$$\frac{1}{z-4} = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}, \quad |z| < 4.$$

$\frac{1}{z-2}$  muß in einen Hauptteil entwickelt werden (die Singularität (2) liegt innerhalb von  $\bar{I}(K_2(0))$ ).



$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

Insgesamt erhalten wir

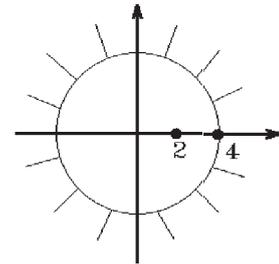
$$f(z) = \underbrace{\frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}}_{\text{Regulärteil}}, \quad 2 < |z| < 4, \text{ also konvergent in } R_{2,4}(0).$$

d) *Laurententwicklung* um  $z_0 = 0$  in  $R_{4,\infty}(0)$  :

Beide Summanden  $\frac{1}{z-2}$  und  $\frac{1}{z-4}$  müssen in einen Hauptteil entwickelt werden, da beide Singularitäten (2) und (4) innerhalb von  $\bar{I}(K_4(0))$  liegen.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

$$\frac{1}{z-4} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 4.$$



Insgesamt erhalten wir

$$f(z) = \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (4^n - 2^n) \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 4, \text{ also konvergent in } R_{4,\infty}(0).$$

In diesem Fall besteht die Laurent-Reihe nur aus einem Hauptteil, der Regulärteil ist  $\equiv 0$ .

3.

$f(z) = e^{1/z}$  holomorph in  $\mathcal{D} \setminus \{0\}$  .

*Laurent-Reihe* in  $R_{0,\infty}(0)$  :

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \underbrace{1}_{\text{Regulärteil}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}}_{\text{Hauptteil}}$$

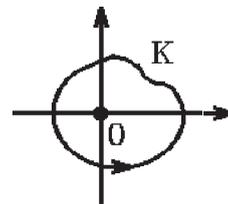
$$\Rightarrow e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \Rightarrow a_{-1} = 1.$$

Nach Satz 16.58 (vgl. **S.677/678**) gilt:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) dz,$$

wobei  $K$  eine beliebige geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve mit  $0 \in I(K)$  ist.

$$\text{Also gilt: } \int_K e^{1/z} dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i.$$



4.

$f(z) = e^z + e^{1/z}$  holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{|n|!}$$

ist die *Laurent-Reihe* von  $f$  um  $z_0 = 0$  in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ .

## 14. Isolierte Singularitäten

In der Anwendung kommt es oft vor (siehe vorige Beispiele), daß eine komplexe Funktion  $f$  in einer Umgebung eines Punktes  $z_0$  definiert und sogar holomorph ist, in  $z_0$  selbst aber nicht definiert ist, in  $z_0$  also eine isolierte Singularität besitzt.

### Definition 16.59 : Isolierte Singularität

Sei  $z_0 \in \mathcal{C}$  und  $\mathring{U}_R(z_0) = \{z \in \mathcal{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$  eine *punktierte* Umgebung von  $z_0$ . Ist  $f : \mathring{U}_R(z_0) \rightarrow \mathcal{C}$  *holomorph* in  $\mathring{U}_R(z_0)$ , so heißt  $z_0$  eine *isolierte Singularität* von  $f$ .

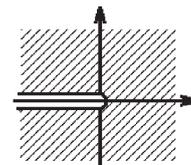
Nach Satz 16.58 (vgl. S.677) läßt sich  $f$  in  $\mathring{U}_R(z_0)$  um  $z_0$  in eine *Laurent-Reihe* entwickeln:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z - z_0| < R.$$

### Beispiele

- $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{1, i, -i\}$   
 $\Rightarrow z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -i$  sind isolierte Singularitäten von  $f$ .
- $f(z) = e^{1/z}$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$   $\Rightarrow z_0 = 0$  ist isolierte Singularität.
- $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$   $\Rightarrow z_0 = 0$  ist isolierte Singularität.
- $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$  ist holomorph  $\forall z \in \mathcal{C}$  bis auf  $z_0 = 0$  und  $z_k = \frac{1}{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .  
 $z_0 = 0$  ist *keine* isolierte Singularität, denn in jeder punktierten Umgebung von  $z_0 = 0$  liegen weitere Singularitäten, da  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\pi} = 0 = z_0$ .
- $f(z) = \log z$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{z = x : x \leq 0\}$ .

$z_0 = 0$  ist *keine* isolierte Singularität, da die komplexe Ebene an der negativen reellen Achse aufgeschnitten ist.



**Definition 16.60 :** Charakterisierung der isolierten Singularitäten

Sei  $z_0$  *isolierte Singularität* von  $f : \mathring{U}_R(z_0) \rightarrow \mathcal{C}$  und

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z-z_0| < R,$$

die *Laurent-Reihe* von  $f$  in  $\mathring{U}_R(z_0)$ .

a)  $z_0$  heißt *hebbare Singularität*  $\Leftrightarrow a_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

(D.h.: der Hauptteil entfällt).

b)  $z_0$  heißt *Pol der Ordnung*  $p \in \mathbb{N}$   $\Leftrightarrow a_{-p} \neq 0, a_{-n} = 0 \quad \forall n \geq p+1$ .

(D.h.: Der Hauptteil  $= \sum_{n=1}^p a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n}$  besitzt nur endlich viele Summanden).

c)  $z_0$  heißt *wesentliche Singularität*  $\Leftrightarrow a_{-n} \neq 0$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

(D.h.: Der Hauptteil  $= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n}$  besitzt unendlich viele Summanden).

**Beispiele**

1. (vgl. Beispiel 4, S.674)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & , \text{falls } z \neq 0 \\ 1 & , \text{falls } z = 0 \end{cases} \text{ ist holomorph in } \mathcal{C} \text{ mit der Potenzreihe um } z_0 = 0 :$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}.$$

Das ist eine Laurent-Reihe mit Hauptteil  $\equiv 0 \Rightarrow z_0 = 0$  ist *hebbare Singularität* der Funktion  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .

2. (vgl. Beispiel 1, S.680)

$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$  hat die beiden isolierten Singularitäten  $z_1 = i$  und  $z_2 = -i$ . Beide Singularitäten sind *einfache Pole* (d.h.: Pole der Ordnung 1), denn die Laurent-Reihen um  $z_1 = i$  bzw. um  $z_2 = -i$  lauten (vgl. Beispiel 1, S.680):

$$f(z) = \frac{-i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^n \quad \text{in } R_{0,2}(i)$$

$\Rightarrow a_{-1} = -\frac{i}{2} \neq 0, a_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow z_1 = i$  ist einfacher Pol.

$$f(z) = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^{n+1}} (z+i)^n \quad \text{in } R_{0,2}(-i)$$

$\Rightarrow a_{-1} = \frac{i}{2} \neq 0, a_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow z_2 = -i$  ist einfacher Pol.

3. (vgl. Beispiel 3, S.683)

$f(z) = e^{1/z}$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$  mit der Laurent-Reihe um  $z_0 = 0$  :

$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \Rightarrow z_0 = 0$  ist *wesentliche Singularität* (der Hauptteil besteht aus unendlich vielen Summanden).

**Definition 16.61 :** *Nullstelle der Ordnung  $p$*

Sei  $z_0 \in \mathcal{C}$ , sei  $f : U_R(z_0) \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $U_R(z_0)$  mit der Potenzreihe um  $z_0$  :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Gilt  $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ ,  $a_p \neq 0$ , so heißt  $z_0$  *Nullstelle der Ordnung  $p$* .

In diesem Fall gilt:  $f(z) = (z - z_0)^p g(z)$  mit  $g$  ist holomorph in  $U_R(z_0)$  und  $g(z_0) \neq 0$ .

**Satz 16.62 :**

Sei  $z_0 \in \mathcal{C}$ , sei  $f : U_R(z_0) \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $U_R(z_0)$ .

$f$  hat in  $z_0$  eine *Nullstelle der Ordnung  $p$*

$$\Leftrightarrow f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

*Beweis :*

$$\text{Es gilt (vgl. S.671): } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0 \Leftrightarrow f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$$

$$\text{und } a_p \neq 0 \Leftrightarrow f^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

**Beispiele**

- $f(z) = \sin z \Rightarrow z_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sind *einfache Nullstellen* (d.h.: Ordnung 1),  
denn:  $f(k\pi) = \sin(k\pi) = 0$ ,  $f'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$ .
- $f(z) = \cos z - 1 \Rightarrow z_k = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sind *doppelte Nullstellen*,  
denn:  $f(2k\pi) = 0$ ,  $f'(2k\pi) = -\sin(2k\pi) = 0$ ,  $f''(2k\pi) = -\cos(2k\pi) = -1 \neq 0$ .
- $f(z) = (z - 1)^3(z^2 + 1) = (z - 1)^3(z - i)(z + i) \Rightarrow z_1 = 1$  ist *dreifache Nullstelle*,  $z_{2,3} = \pm i$  sind *einfache Nullstellen*.

**Satz 16.63 :** *Regel von de l'Hospital*

Sei  $z_0 \in \mathcal{C}$ , seien  $f, g : U_R(z_0) \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $U_R(z_0)$ .

$z_0$  sei  $p$ -fache Nullstelle von  $f$  und ebenso  $p$ -fache Nullstelle von  $g$ .

$$\text{Dann gilt: } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(p)}(z)}{g^{(p)}(z)}.$$

*Beweis :*

$$f(z) = a_p(z - z_0)^p + a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \dots, \quad a_p \neq 0,$$

$$g(z) = b_p(z - z_0)^p + b_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \dots, \quad b_p \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_p + a_{p+1}(z - z_0) + \dots}{b_p + b_{p+1}(z - z_0) + \dots} \rightarrow \frac{a_p}{b_p} \quad \text{für } z \rightarrow z_0.$$

$$\text{Da } a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}, \quad b_p = \frac{g^{(p)}(z_0)}{p!} \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

### Beispiele

$$1. \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = 1.$$

$$2. \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\cos z}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Woran erkennt man nun, ob eine isolierte Singularität einer Funktion  $f$  ein *Pol der Ordnung  $p$*  ist? Eine Aussage liefert der folgende Satz:

**Satz 16.64 :** *Pol der Ordnung  $p$*

Sei  $z_0$  *isolierte Singularität* der Funktion  $f$ .

$z_0$  ist ein *Pol der Ordnung  $p$*   $\Leftrightarrow \frac{1}{f}$  hat in  $z_0$  eine *Nullstelle der Ordnung  $p$* .

*Beweis :*

”  $\Rightarrow$  ”:

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \quad a_{-p} \neq 0, \quad (0 < |z - z_0| < r)$$

$$= \frac{1}{(z - z_0)^p} g(z) \quad \text{mit} \quad g(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z - z_0) + \dots + a_0(z - z_0)^p + \dots$$

$g(z)$  ist eine Potenzreihe um  $z_0$ , also holomorph in  $U_r(z_0)$  mit  $g(z_0) = a_{-p} \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^p \frac{1}{g(z)} \quad \forall z \in U_\delta(z_0) \Rightarrow \frac{1}{f} \text{ hat in } z_0 \text{ eine Nullstelle der Ordnung } p.$$

”  $\Leftarrow$  ”:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^p h(z) \quad \text{mit } h \text{ ist holomorph in } U_r(z_0) \text{ und } h(z_0) \neq 0.$$

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^p} \cdot \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^p} (b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots)$$

$$= \frac{b_0}{(z - z_0)^p} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{p-1}} + \dots \quad \forall z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$$

$\Rightarrow f$  hat in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $p$ .

## Beispiele

1.  $f(z) = \frac{1}{\sin z}$  hat in  $z_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , *einfache Pole*, da  $\sin z$  einfache Nullstellen in  $z_k = k\pi$  hat.
2.  $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$  hat in  $z_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , *einfache Pole*, da  $\sin z$  einfache Nullstellen in  $z_k = k\pi$  hat und  $\cos(k\pi) \neq 0$  ist.
3.  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3} = \frac{1}{(z - i)^3(z + i)^3}$  hat in  $z_1 = i$  und  $z_2 = -i$  *dreifache Pole*.
4.  $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(\cos z - 1)}$  hat in  $z_0 = 0$  einen *dreifachen Pol*, da 2-fache Nullstelle von  $(\cos z - 1)$  und 2-fache Nullstelle von  $z^2$  und 1-fache Nullstelle von  $\sin z$ .  
 $f$  hat in  $z_k = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  jeweils *einfache Pole*, da 2-fache Nullstellen von  $(\cos z - 1)$  und 1-fache Nullstellen von  $\sin z$ .

In Satz 16.58 (vgl. **S.677**) haben wir gezeigt, daß die Koeffizienten der Laurent-Reihe einer in  $\mathring{U}_r(z_0)$  holomorphen Funktion  $f$  durch ein Integral ausgedrückt werden können. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \text{wobei } K \text{ eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve mit } z_0 \in I(K) \text{ ist.}$$

Für Funktionen, die in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $p$  besitzen, können wir die Koeffizienten des Hauptteils der Laurent-Reihe (in  $\mathring{U}_r(z_0)$  um  $z_0$ ) auch durch Ableitungen ausdrücken:

**Satz 16.65 :** *Koeffizienten der Laurent-Reihe bei  $p$ -fachen Polen*

Sei  $f : \mathring{U}_r(z_0) \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $\mathring{U}_r(z_0)$ ,  $z_0$  sei  $p$ -facher Pol von  $f$ .

Dann gilt für die Koeffizienten  $a_{-k}$  des Hauptteils der Laurent-Reihe (in  $\mathring{U}_r(z_0)$  um  $z_0$ ) von  $f$ :

$$a_{-k} = \frac{1}{(p-k)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{p-k}}{dz^{p-k}} \left( (z - z_0)^p f(z) \right) \quad , \quad 1 \leq k \leq p$$

Insbesondere gilt

$$a_{-p} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( (z - z_0)^p f(z) \right) \quad \text{und} \quad a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left( (z - z_0)^p f(z) \right)$$

*Beweis :*

$f$  läßt sich nach Satz 16.58 in  $\mathring{U}_r(z_0)$  um  $z_0$  in eine Laurent-Reihe entwickeln:



## Beispiel

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z^2 - z}{(z-1)^3(z^2+1)} = \frac{z^3 - 2z^2 - z}{(z-1)^3(z-i)(z+i)}.$$

Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{z^3 - 2z^2 - z}{(z-1)^3(z^2+1)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{a_3}{(z-1)^3} + \frac{b_1}{z-i} + \frac{c_1}{z+i}.$$

$$a_3 = \frac{z^3 - 2z^2 - z}{z^2 + 1} \Big|_{z=1} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \left( \frac{z^3 - 2z^2 - z}{z^2 + 1} \right)' \Big|_{z=1} = \left( \frac{(3z^2 - 4z - 1)(z^2 + 1) - (z^3 - 2z^2 - z)2z}{(z^2 + 1)^2} \right) \Big|_{z=1} \\ &= \left( \frac{z^4 + 4z^2 - 4z - 1}{(z^2 + 1)^2} \right) \Big|_{z=1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{z^3 - 2z^2 - z}{z^2 + 1} \right)'' \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \left( \frac{z^4 + 4z^2 - 4z - 1}{(z^2 + 1)^2} \right)' \Big|_{z=1} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{(4z^3 + 8z - 4)(z^2 + 1) - 4z(z^4 + 4z^2 - 4z - 1)}{(z^2 + 1)^3} \right) \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 2 - 4 \cdot 0}{8} = 1, \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{z^3 - 2z^2 - z}{(z-1)^3(z+i)} \Big|_{z=i} = \frac{-i + 2 - i}{(i-1)^3 2i} = \frac{1-i}{i(i-1)^3} = \frac{i}{(1-i)^2} = \frac{i}{-2i} = -\frac{1}{2},$$

$$c_1 = \frac{z^3 - 2z^2 - z}{(z-1)^3(z-i)} \Big|_{z=-i} = \frac{i + 2 + i}{(-i-1)^3(-2i)} = \frac{1+i}{i(1+i)^3} = \frac{-i}{(1+i)^2} = \frac{-i}{2i} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z^3 - 2z^2 - z}{(z-1)^3(z^2+1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right),$$

(Partialbruchzerlegung in  $\mathbb{C}$ )

$$\frac{z^3 - 2z^2 - z}{(z-1)^3(z^2+1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{z}{z^2+1} \quad (\text{Partialbruchzerlegung in } \mathbb{R}).$$

## 15. Residuensatz

Ist  $K$  eine *geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve*, und ist  $f$  *holomorph* in  $\bar{I}(K)$ , so gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. Satz 16.33, S.650):

$$\int_K f(z) dz = 0 \quad (\text{da } I(K) \text{ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist}).$$

Wir wollen nun auch den Fall zulassen, daß  $f$  in  $I(K)$  endlich viele *isolierte Singularitäten* besitzt. Dazu definieren wir zunächst das *Residuum* von  $f$  an einer *isolierten Singularität*  $z_0$ :

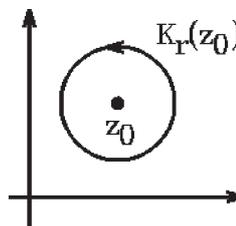
**Definition 16.66 :** *Residuum*

Sei  $z_0 \in \mathcal{C}$ , sei  $f : \overline{U}_r(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathcal{C}$  holomorph in  $\overline{U}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  mit  $\overline{U}_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathcal{C} : 0 < |z - z_0| \leq r\}$ ,  $r > 0$ .

Dann heißt

$$\text{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(z) dz$$

das *Residuum* von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .



**Bemerkung :** Es gilt:

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

$a_{-1}$  ist der Koeffizient von  $\frac{1}{z - z_0}$  der Laurent-Reihe von  $f$  um  $z_0$  in  $R_{0,r}(z_0)$  (vgl. Satz 16.58, S.677/678).

**Bemerkung :**

$\text{Res}(f, z_0)$  ist unabhängig von  $r$ , solange  $f$  holomorph in  $\{z \in \mathcal{C} : 0 < |z - z_0| \leq r\}$  ist (vgl. Satz 16.35, S.655).

**Beispiele**

1.  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \Rightarrow \text{Res}(f, i) = -\frac{i}{2}, \text{Res}(f, -i) = \frac{i}{2}$  (vgl. Beispiel 2, S.685).

2.  $f(z) = e^{1/z}$ .

Die Laurent-Reihe von  $f$  um  $z_0 = 0$  in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$  lautet (vgl. Beispiel 3, S.686):

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \Rightarrow a_{-1} = 1 \Rightarrow \text{Res}(f, 0) = 1.$$

3.  $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(\cos z - 1)}$ . *Gesucht:*  $\text{Res}(f, 0) = ?$

$z_0 = 0$  ist dreifacher Pol von  $f$  (vgl. Beispiel 4, S.688).

*Bestimmung des Koeffizienten  $a_{-1}$  der Laurent-Reihe um  $z_0 = 0$ :*

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z^2(\cos z - 1)} &= \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z^2(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots)} = \frac{z(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots)}{z^4(-\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \dots)} = -\frac{1}{z^3} \cdot \frac{1 - \frac{z^2}{6} + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{24} + \dots} \\ &= -\frac{1}{z^3} (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) = \frac{-b_0}{z^3} + \frac{-b_1}{z^2} + \frac{-b_2}{z} + (-b_3) + (-b_4)z + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, 0) = a_{-1} = -b_2.$$

Berechnung von  $b_2$ :

$$\frac{1 - \frac{z^2}{6} + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \dots} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{z^2}{6} + \dots = (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \left( \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \dots \right) = \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} z + \left( \frac{b_2}{2} - \frac{b_0}{24} \right) z^2 + \dots$$

Koeffizientenvergleich:

$$b_0 = 2, \quad b_1 = 0, \quad \frac{b_2}{2} - \frac{b_0}{24} = -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad b_2 = 2 \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{6}.$$

4.  $f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}$ . Gesucht:  $\operatorname{Res}(f, 2k\pi) = ?$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$z_k = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sind doppelte Pole.

Bestimmung des Koeffizienten  $a_{-1}$  der Laurent-Reihe um  $z_0 = 2k\pi$ :

$$\frac{1}{\cos z - 1} = \frac{1}{\cos((z - 2k\pi) + 2k\pi) - 1} = \frac{1}{\cos(z - 2k\pi) - 1} \quad (\text{da } \cos z \text{ } 2\pi\text{-periodisch}).$$

Wir ersetzen:  $u = z - 2k\pi$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos z - 1} &= \frac{1}{\cos u - 1} = \frac{1}{-\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} + \dots} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{u^2}{24} + \dots} \\ &= -\frac{1}{u^2} (b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots) = \frac{-b_0}{u^2} + \frac{-b_1}{u} + (-b_2) + (-b_3)u + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, 2k\pi) = -b_1.$$

Berechnung von  $b_1$ :

$$1 = (b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots) \left( \frac{1}{2} - \frac{u^2}{24} + \dots \right) = \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} u + \dots$$

Koeffizientenvergleich:

$$\Rightarrow b_0 = 2, \quad b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Res}(f, 2k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Bei wesentlichen Singularitäten *muß* das Residuum mit Hilfe des Koeffizienten  $a_{-1}$  der Laurent-Reihe bestimmt werden (vgl. Beispiel 2).

Bei  $p$ -fachen Polen *kann* man genauso verfahren (vgl. Beispiele 1,3,4).

Bei  $p$ -fachen Polen kann das Residuum aber oft einfacher mit Hilfe der folgenden Eigenschaft berechnet werden:

**Satz 16.67 :** Berechnung des Residuums bei  $p$ -fachen Polen

$f$  habe in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $p$ . Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left( (z - z_0)^p f(z) \right)$$

*Spezialfall:* Für einen *einfachen Pol*  $z_0$  gilt

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( (z - z_0) f(z) \right)$$

*Beweis :*

Nach Satz 16.65, **S.688** , gilt diese Formel für den Koeffizienten  $a_{-1}$  der Laurent-Reihe von  $f$  um  $z_0$ .

Speziell für *einfache Pole* kann das Residuum auch über die folgende Eigenschaft berechnet werden:

**Satz 16.68 :** *Berechnung des Residuums bei einfachen Polen*

Sei  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  mit  $g, h$  holomorph in  $U_r(z_0)$  ,  $r > 0$  , und  $g(z_0) \neq 0$  ,

$h(z_0) = 0$  ,  $h'(z_0) \neq 0$ . Also  $f = \frac{g}{h}$  hat in  $z_0$  einen *einfachen Pol*. Dann gilt

$$\text{Res}(f, z_0) = \text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

*Beweis :*

Nach Satz 16.67 gilt (da  $z_0$  einfacher Pol von  $f$  ist):

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left( (z - z_0) f(z) \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{(z - z_0)g(z)}{h(z)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{g(z) + (z - z_0)g'(z)}{h'(z)} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned}$$

(Regel von de l'Hospital)

### Beispiele

1.  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z - i)(z + i)} \Rightarrow f$  hat die *einfachen Pole*  $z_1 = i$  und  $z_2 = -i$ .

Nach Satz 16.67 gilt:

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{z + i}|_{z=i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \quad , \quad \text{Res}(f, -i) = \frac{1}{z - i}|_{z=-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}.$$

Oder nach Satz 16.68 gilt (dieser Satz kann benutzt werden, da  $z_i$  einfache Pole):

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2z}|_{z=i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \quad , \quad \text{Res}(f, -i) = \frac{1}{2z}|_{z=-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}.$$

2.  $f(z) = \frac{e^z}{\sin z} \Rightarrow z_k = k\pi$  ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sind *einfache Pole*.

Nach Satz 16.68 gilt:  $\text{Res}(f, k\pi) = \frac{e^{k\pi}}{\cos k\pi} = (-1)^k e^{k\pi}$  ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$3. \quad f(z) = \frac{z^4 + 1}{(z + 1)^3} \Rightarrow z_0 = -1 \text{ ist dreifacher Pol.}$$

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{2!} (z^4 + 1)''|_{z=-1} = \frac{1}{2} (12z^2)|_{z=-1} = 6.$$

$$4. \quad f(z) = \frac{1}{(z + 1)(z - 1)^2} \Rightarrow z_1 = -1 \text{ ist einfacher Pol, } z_2 = 1 \text{ ist doppelter Pol.}$$

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{(z - 1)^2}|_{z=-1} = \frac{1}{4}, \quad \text{Res}(f, 1) = ((z + 1)^{-1})'|_{z=1} = -(z + 1)^{-2}|_{z=1} = -\frac{1}{4}.$$

$$5. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2(\cos z - 1)} \Rightarrow z_0 = 0 \text{ ist dreifacher Pol,}$$

$z_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  sind einfache Pole.

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{6} \quad (\text{vgl. Beispiel 3, S.691/692}).$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 2k\pi) &= \lim_{z \rightarrow 2k\pi} \frac{(z - 2k\pi) \sin z}{z^2(\cos z - 1)} = \lim_{z \rightarrow 2k\pi} \frac{\sin z + (z - 2k\pi) \cos z}{2z(\cos z - 1) + z^2(-\sin z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2k\pi} \frac{2 \cos z + (z - 2k\pi)(-\sin z)}{2(\cos z - 1) + 4z(-\sin z) + z^2(-\cos z)} = -\frac{2}{(2k\pi)^2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

(hierbei wurde 2-mal die Regel von de l'Hospital benutzt).

$$6. \quad f(z) = \frac{1}{z \sin z} \Rightarrow z_0 = 0 \text{ ist doppelter Pol,}$$

$z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , sind einfache Pole.

$$\text{Res}(f, k\pi) = \left( \frac{1}{\sin z + z \cos z} \right)_{|z=k\pi} = \frac{1}{k\pi \cos k\pi} = \frac{(-1)^k}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \frac{1}{1!} \left( \frac{z^2}{z \sin z} \right)'_{z=0} = \left( \frac{z}{\sin z} \right)'_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z \cos z}{\sin^2 z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - \cos z + z \sin z}{2 \sin z \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2 \cos z} = 0 \quad (\text{Regel von de l'Hospital}). \end{aligned}$$

Oder mit Hilfe der Laurent-Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z \sin z} &= \frac{1}{z(z - \frac{z^3}{3!} + \dots)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{6} + \dots} = \frac{1}{z^2} (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \\ &= \frac{b_0}{z^2} + \frac{b_1}{z} + b_2 + b_3 z + \dots \Rightarrow \text{Res}(f, 0) = b_1 \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$1 = (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \left( 1 - \frac{z^2}{6} + \dots \right) = b_0 + b_1 z + \dots$$

$$\Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow \text{Res}(f, 0) = 0.$$

Wir kommen nun zu dem für die Anwendung besonders wichtigen *Residuensatz*:

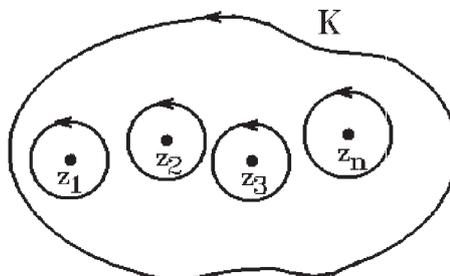
**Satz 16.69 :** *Residuensatz*

Sei  $K$  eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve.  
 Sei  $f$  holomorph in  $\bar{I}(K)$  mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten  $z_1, z_2, \dots, z_n \in I(K)$ . Dann gilt

$$\int_K f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

*Beweis :*

Wir wählen für jede Singularität  $z_k$  ein  $r_k > 0$  so klein, daß  $\bar{I}(K_{r_k}(z_k)) \subset I(K)$  und  $\bar{I}(K_{r_k}(z_k)) \cap \bar{I}(K_{r_j}(z_j)) = \emptyset$  für  $k \neq j$ .



Dann gilt nach Satz 16.36 (vgl. S.656)

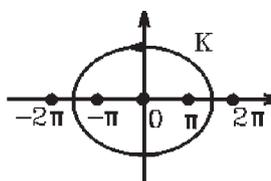
$$\int_K f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{K_{r_k}(z_k)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) \quad (\text{nach Def. 16.66, S.691}).$$

Zur Berechnung von  $\int_K f(z) dz$  müssen also die *Residuen* aller im Inneren der geschlossenen Kurve  $K$  gelegenen isolierten Singularitäten  $z_k$  von  $f$  berechnet werden.

**Beispiele**

1.

Gesucht:  $\int_K \frac{1}{z \sin z} dz$  mit  $K$  :

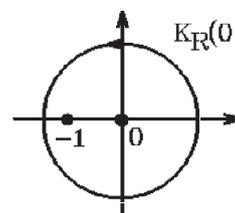


$$\Rightarrow \int_K \frac{1}{z \sin z} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, -\pi) + \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, \pi)) = 2\pi i \left( \frac{-1}{-\pi} + 0 + \frac{-1}{\pi} \right) = 0.$$

(Berechnung der Residuen vgl. Beispiel 6, S.694).

2.

Gesucht:  $\int_{K_R(0)} \frac{e^z}{z(z+1)} dz$  mit  $R > 1$  :



$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{K_R(0)} \frac{e^z}{z(z+1)} dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, -1) + \text{Res}(f, 0)) \\ &= 2\pi i \left( \left( \frac{e^z}{z} \right)_{z=-1} + \left( \frac{e^z}{z+1} \right)_{z=0} \right) = 2\pi i (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

3. Die *erweiterte Cauchysche Integralformel* (vgl. S.660) folgt sofort aus dem Residuensatz:

Sei  $f$  holomorph in  $\bar{I}(K_r(z_0))$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, z_0\right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{n!} \left( (z-z_0)^{n+1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right)_{|z=z_0}^{(n)} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (\text{da } z_0 \text{ } (n+1)\text{-facher Pol}). \end{aligned}$$

### Berechnung reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes

Man kann viele reelle Integrale, die im Reellen nur sehr schwierig oder überhaupt nicht berechnet werden können, über den Umweg eines komplexen Integrals berechnen. Die komplexen Integrale werden dann mit Hilfe des *Cauchyschen Integralsatzes* (vgl. Beispiele S.653 ff) oder mit Hilfe des *Residuensatzes* berechnet.

### Beispiele

1. **Integrale vom Typ**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx, \quad p, q \text{ Polynome mit } \operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p, \quad q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

#### Satz 16.70 :

Sei  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  eine *rationale Funktion* mit  $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$  und  $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  (d.h.:  $q$  darf keine reellen Nullstellen besitzen).

Seien  $z_1, z_2, \dots, z_m$  die Nullstellen von  $q$  in der *oberen Halbebene*, d.h.:  $\operatorname{Im} z_k > 0$ .

Dann *konvergiert* das Integral mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z_k\right), \quad (\operatorname{Im} z_k > 0)$$

*Beweis :*

Wir zeigen zunächst die Konvergenz des Integrals:

Sei  $p(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_0, \quad a_p \neq 0$   
und  $q(z) = b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \dots + b_0, \quad b_q \neq 0 \quad \Rightarrow \quad q \geq p + 2$ .

Es gilt

$$|b_q z^q| \leq |q(z)| + |b_{q-1}| |z|^{q-1} + \dots + |b_0|$$

$$\Rightarrow |q(z)| \geq |b_q| |z|^q - |b_{q-1}| |z|^{q-1} - \dots - |b_0| = |z|^q \left( |b_q| - \frac{|b_{q-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|b_0|}{|z|^q} \right).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^2 p(z)}{q(z)} \right| &\leq \frac{|a_p| |z|^{p+2} + |a_{p-1}| |z|^{p+1} + \dots + |a_0| |z|^2}{|z|^q \left( |b_q| - \frac{|b_{q-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|b_0|}{|z|^q} \right)} \\ &= \frac{1}{|z|^{q-p-2}} \cdot \frac{|a_p| + \frac{|a_{p-1}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_0|}{|z|^p}}{|b_q| - \frac{|b_{q-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|b_0|}{|z|^q}}. \end{aligned}$$

Also gilt:  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{z^2 p(z)}{q(z)} \right| = \begin{cases} |a_p| & , \text{ falls } q = p + 2 \\ 0 & , \text{ falls } q > p + 2. \end{cases}$

Also existiert ein  $R > 0$  und  $M > 0$  mit  $\left| \frac{z^2 p(z)}{q(z)} \right| \leq M \quad \forall z \in \mathcal{C} \text{ mit } |z| \geq R$

$\Rightarrow \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \forall z \in \mathcal{C} \text{ mit } |z| \geq R$ , also auch  $\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \geq R$ .

Da  $\int_{-\infty}^{-R} \frac{1}{x^2} dx$  und  $\int_R^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  konvergieren und  $\frac{p(x)}{q(x)}$  stetig in  $[-R, R]$  ist (da Nenner

$\neq 0$  in  $\mathbb{R}$ ), existieren die Integrale  $\int_{-\infty}^{-R} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ ,  $\int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx$ ,  $\int_R^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ ,

also auch das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ .

Wir berechnen nun das komplexe Integral  $\int_{K_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz$ ,

wobei wir über folgende Kurve  $K_R$  integrieren:

$K_R = K_1 + K_2$  mit

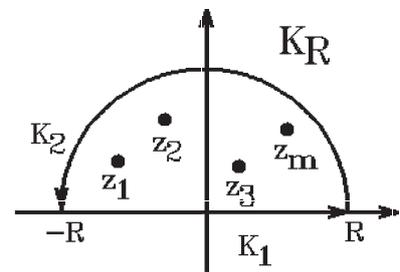
$K_1$ : Geradenstück entlang der reellen Achse von  $(-R)$  nach  $R$ ,

$K_2$ : Halbkreis mit Radius  $R$  von  $R$  nach  $(-R)$ .

Hierbei wählen wir  $R$  so groß, daß alle Singularitäten  $z_k$  von  $\frac{p}{q}$  mit  $\text{Im } z_k > 0$

im Inneren dieser geschlossenen Kurve  $K_R$

liegen, und daß  $\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \forall z \in K_2$  gilt.



Dann folgt aus dem Residuensatz:

$$\int_{K_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{K_1} \frac{p(z)}{q(z)} dz + \int_{K_2} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res} \left( \frac{p}{q}, z_k \right).$$

Für die beiden Teilintegrale gilt:

$$\int_{K_1} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad \text{für } R \rightarrow \infty,$$

$$\left| \int_{K_2} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

Also erhalten wir insgesamt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z_k\right).$$

**Bemerkung :**

Da  $q$  keine reellen Nullstellen haben darf, muß der grad  $q$  eine *gerade Zahl* sein, denn mit  $z_0$  ist auch  $\bar{z}_0$  Nullstelle von  $q$ .

**Beispiele**

1. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Denn:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x^4 + 1} \Rightarrow \operatorname{grad} q = 4 \geq 2 + \operatorname{grad} p.$$

Nullstellen von  $q$  in der oberen Halbebene:

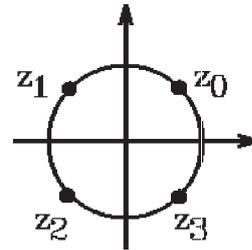
$$q(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 = e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow z_k = e^{\frac{i\pi + 2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow z_0 = e^{i\pi/4}, \quad z_1 = e^{3i\pi/4}, \quad z_2 = \bar{z}_1, \quad z_3 = \bar{z}_0.$$

$$\operatorname{Im} z_k > 0 \Rightarrow \text{nur } z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad z_1 = e^{3i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i).$$

(einfache Pole des Integranden in der oberen Halbebene).



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, z_0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, z_1\right) \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{4z^3}|_{z=z_0} + \frac{1}{4z^3}|_{z=z_1} \right) = 2\pi i \left( \frac{z}{4z^4}|_{z=z_0} + \frac{z}{4z^4}|_{z=z_1} \right) = 2\pi i \left( \frac{z_0}{-4} + \frac{z_1}{-4} \right) \\ &= \frac{-\pi i}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i) \right) = \frac{-\pi i}{2} \cdot \frac{2i}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2. 
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Denn:

Das erste " = " gilt, da der Integrand eine *gerade Funktion* ist.

Es gilt  $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$ . Die einzige Nullstelle von  $q$  in der oberen Halbebene ist  $z_1 = i$  (doppelter Pol des Integranden).

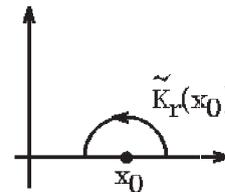
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}, i\right) = \pi i \left( \frac{z^2}{(z + i)^2} \right)' \Big|_{z=i} \\ &= \pi i \left( \frac{2z(z + i) - 2z^2}{(z + i)^3} \right) \Big|_{z=i} = \pi i \frac{(2i)(2i) + 2}{(2i)^3} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Bevor wir den nächsten Integraltyp behandeln, benötigen wir noch den folgenden Hilfssatz:

**Hilfssatz :** Die Funktion  $f$  habe in  $x_0 \in \mathbb{R}$  einen *einfachen Pol*. Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\tilde{K}_r(x_0)} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f, x_0),$$

wobei  $\tilde{K}_r(x_0)$  der positiv orientierte *Halbkreis* um  $x_0$  mit Radius  $r$  ist, also  $\tilde{K}_r(x_0) = \{z \in \mathcal{C} : z = x_0 + re^{it}, t \in [0, \pi]\}$ .



*Beweis :*

Da  $x_0$  einfacher Pol  $\Rightarrow f(z) = \frac{a}{z - x_0} + h(z)$  mit  $h$  ist holomorph in  $U_\delta(x_0)$ .

$$\left| \int_{\tilde{K}_r(x_0)} h(z) dz \right| \leq \max_{z \in \tilde{K}_r(x_0)} |h(z)| \cdot \pi r \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow 0.$$

$$\int_{\tilde{K}_r(x_0)} \frac{a}{z - x_0} dz = a \int_0^\pi \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = ia \int_0^\pi dt = ia\pi.$$

Da  $a = \operatorname{Res}(f, x_0)$ , folgt insgesamt:  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\tilde{K}_r(x_0)} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f, x_0)$ .

## 2. Integrale vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{cases} dx, \quad \alpha > 0$$

**Satz 16.71 :**

a) Die Funktion  $f$  sei *holomorph* in  $\{z \in \mathcal{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$  mit Ausnahme *endlich vieler isolierter Singularitäten*  $z_1, z_2, \dots, z_m$  in der *oberen Halbebene*, d.h.:  $\operatorname{Im} z_k > 0$ .

Ferner gelte:  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ .

Dann *konvergieren* die Integrale für  $\alpha > 0$  mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{cases} dx = \begin{cases} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{cases} \left( 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) \right), \quad (\operatorname{Im} z_k > 0)$$

b) Hat  $f$  zusätzlich endlich viele *einfache Pole*  $x_1, x_2, \dots, x_l$  auf der *reellen Achse*, so gilt für  $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{cases} dx = \begin{cases} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{cases} \left( 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) \right. \\ \left. (\operatorname{Im} z_k > 0, x_k \in \mathbb{R}) \quad + \pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, x_k) \right)$$

falls das uneigentliche Integral *konvergent* ist.

Beweis :

a) Wir integrieren die Funktion  $f(z)e^{i\alpha z}$  über die folgende Kurve  $K_{R_1, R_2}$ :

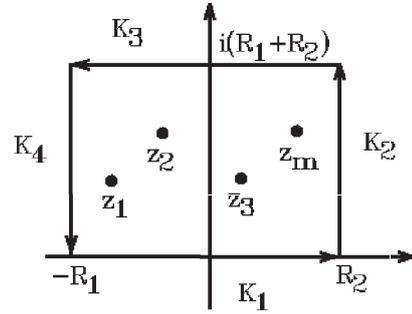
$K_{R_1, R_2} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$  mit

$$K_1 : z = t, \\ t \in [-R_1, R_2], dz = dt,$$

$$K_2 : z = R_2 + it, \\ t \in [0, R_1 + R_2], dz = idt,$$

$$-K_3 : z = t + i(R_1 + R_2), \\ t \in [-R_1, R_2], dz = dt,$$

$$-K_4 : z = -R_1 + it, \\ t \in [0, R_1 + R_2], dz = idt.$$



Hierbei wählen wir  $R_1, R_2$  so groß, daß alle Singularitäten der oberen Halbebene von  $f$  im Inneren dieser geschlossenen Kurve  $K_{R_1, R_2}$  liegen. Dann folgt aus dem Residuensatz

$$\int_{K_{R_1, R_2}} f(z)e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k).$$

Der Wert auf der rechten Seite ist unabhängig von  $R_1, R_2$  (solange  $R_1, R_2$  groß genug sind), also können wir  $R_1, R_2 \rightarrow \infty$  gehen lassen, ohne daß sich das Ergebnis ändert.

Wir zeigen zunächst, daß die Integrale über die Kurven  $K_2, K_3, K_4$  gegen Null gehen, falls  $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ . Sei  $\epsilon > 0$  beliebig.

Sei  $R_1, R_2$  so groß, daß  $\max_{z \in K_2} |f(z)| < \frac{\epsilon \alpha}{3}$  (das ist möglich, da  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  und  $\alpha > 0$ ). Dann gilt

$$\left| \int_{K_2} f(z)e^{i\alpha z} dz \right| = \left| \int_0^{R_1+R_2} f(R_2 + it)e^{i\alpha(R_2+it)} idt \right| \leq \max_{z \in K_2} |f(z)| \int_0^{R_1+R_2} e^{-\alpha t} dt \\ < \frac{\epsilon \alpha}{3} \cdot \left[ -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^{R_1+R_2} = \frac{\epsilon}{3} (1 - e^{-\alpha(R_1+R_2)}) < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$\left| \int_{K_4} f(z)e^{i\alpha z} dz \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (\text{analog}).$$

$$\left| \int_{K_3} f(z)e^{i\alpha z} dz \right| = \left| \int_{-R_1}^{R_2} f(t + i(R_1 + R_2))e^{i\alpha(t+i(R_1+R_2))} dt \right| \\ \leq \max_{z \in K_3} |f(z)| e^{-\alpha(R_1+R_2)} (R_1 + R_2) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für } R_1, R_2 > R \text{ (d.h.: hinreichend groß)}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\left| \int_{K_2} f(z)e^{i\alpha z} dz + \int_{K_3} f(z)e^{i\alpha z} dz + \int_{K_4} f(z)e^{i\alpha z} dz \right| < \epsilon \quad \text{für } R_1, R_2 > R.$$

Also gilt

$$\left| \int_{K_1} f(z)e^{i\alpha z} dz - 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) \right| < \epsilon \quad \text{für } R_1, R_2 > R. \quad \text{Hieraus folgt}$$

$$\left| \int_{-R_1}^{R_2} f(t)e^{i\alpha t} dt - 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) \right| < \epsilon \quad \text{für } R_1, R_2 > R.$$

Damit gilt für den Real- und Imaginärteil

$$\left| \int_{-R_1}^{R_2} f(t) \cos \alpha t dt - \operatorname{Re} \left( 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) \right) \right| < \epsilon \quad \text{und}$$

$$\left| \int_{-R_1}^{R_2} f(t) \sin \alpha t dt - \operatorname{Im} \left( 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) \right) \right| < \epsilon \quad \text{für } R_1, R_2 > R.$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium folgt hieraus die Konvergenz der Integrale für  $R_1, R_2 \rightarrow \infty$  und damit die Behauptung.

b) Hat  $f$  zusätzlich *einfache Pole* auf der *reellen Achse*, so integrieren wir über die folgende Kurve  $K_{R_1, R_2}$  :

Im Inneren liegen nur die bisherigen Singularitäten  $z_k$  mit  $\operatorname{Im} z_k > 0$ , so daß das Ergebnis von a) bestehen bleibt, also

$$\int_{K_{R_1, R_2}} f(z)e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k).$$

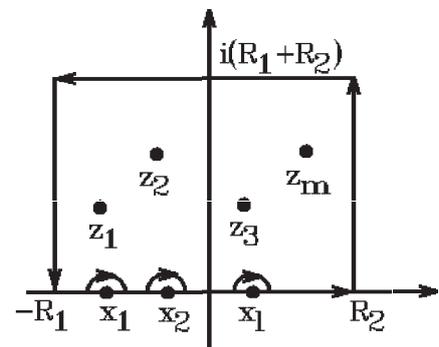
$K_{R_1, R_2}$  enthält nun zusätzlich die negativ orientierten Halbkreise  $(-\tilde{K}_r(x_k))$ .

Nach obigem Hilfssatz gilt

$$\sum_{k=1}^l \left( \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\tilde{K}_r(x_k)} f(z)e^{i\alpha z} dz \right) = -\pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, x_k).$$

Für  $r \rightarrow 0$  geht diese Kurve in die gleiche Kurve wie bei a) über.

Bringen wir also die Summe  $\left( -\pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, x_k) \right)$  auf die andere Seite der obigen Gleichung, so erhalten wir analog zu a) die Behauptung. In diesem Fall ist aber nicht immer sicher, daß das Integral unter obigen Vor. konvergent ist.



## Beispiele

1.

*Gesucht:*  $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx \quad , \quad (a > 0 \text{ fest}).$

Der Integrand ist eine gerade Funktion, also gilt

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx .$$

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{a^2 + z^2} = 0$ ,  $f$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{\pm ia\}$   $\Rightarrow$  nur die Singularität  $z_1 = ia$  liegt in der oberen Halbebene.  $z_1 = ia$  ist einfacher Pol von  $f$ .

Auf der reellen Achse liegen keine Singularitäten. Also gilt nach Satz 16.71 a) für den Fall, daß  $\alpha > 0$  ist:

1. Fall:  $\alpha > 0$ :

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{i\alpha z}}{a^2 + z^2}, ia \right) \right) = \pi \operatorname{Re} \left( i \frac{e^{i\alpha ia}}{2ia} \right) = \pi \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-\alpha a}}{2a} \right) = \frac{\pi e^{-\alpha a}}{2a} .$$

2. Fall:  $\alpha < 0$ :

$\alpha < 0 \Rightarrow (-\alpha) > 0$ , da  $\cos \alpha x = \cos(-\alpha)x \Rightarrow$  nach Fall 1):

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(-\alpha)x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{\alpha a}}{2a} .$$

3. Fall:  $\alpha = 0$ :

$$I(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + x^2} dx \quad \text{nach Satz 16.70 berechnen, oder,}$$

falls *gleichmäßige Konvergenz* bzg.  $\alpha$  vorliegt:

$$I(0) = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2a} .$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-|\alpha|a}}{2a} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad , \quad a > 0 .$$

**Bemerkung :**

Das Integral konvergiert gleichmäßig bzg.  $\alpha$ , wenn  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  eine *rationale Funktion* ist mit  $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$  und  $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Das ist in diesem Beispiel der Fall, denn für  $f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2}$  gilt:  $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$  und  $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung :**

Bei  $\sin$ -Integralen ändert sich für  $\alpha < 0$  auch das Gesamtvorzeichen, da  $\sin(-\alpha)x = -\sin \alpha x$  gilt. Für  $\alpha = 0$  erhält man hier den Integralwert  $= 0$ , da  $\sin 0 = 0$  ist.

2. Es gilt

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi}$$

Denn:

Da der Integrand eine gerade Funktion ist, gilt  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

Für die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  gilt:  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ,  $f$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ ,  $x_1 = 0$  ist ein einfacher Pol auf der reellen Achse.

Da  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , ist der Integrand stetig in  $\mathbb{R}$ .

Die Konvergenz des Integrals haben wir bereits früher gezeigt (vgl. Aufgabe 66).  
 Nach Satz 16.71 b) gilt also (mit  $\alpha = 1 > 0$ ):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im} \left( \pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) \right) = \operatorname{Im}(\pi i \cdot 1) = \pi.$$

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} dx = \frac{2}{\pi}.$$

Denn:

Für  $f(z) = \frac{1}{z(\pi^2 - z^2)}$  gilt:  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ,  $f$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{\pm\pi, 0\}$ ,

$x_1 = -\pi$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = \pi$  sind einfache Pole auf der reellen Achse,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} = \frac{1}{\pi^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\pi} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\pi} \frac{\cos x}{\pi^2 - 3x^2} = \frac{1}{2\pi^2} \Rightarrow$  der Integrand

ist stetig in  $\mathbb{R}$ , für  $x \rightarrow \pm\infty$  verhält sich der Integrand  $\approx \frac{1}{x^3}$  und  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ ,

$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx$  sind konvergent  $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} dx$  ist konvergent.

Nach Satz 16.71 b) gilt also (mit  $\alpha = 1 > 0$ ):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} dx \\ &= \operatorname{Im} \left( \pi i \left( \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z(\pi^2 - z^2)}, -\pi \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z(\pi^2 - z^2)}, 0 \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z(\pi^2 - z^2)}, \pi \right) \right) \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \pi i \left( \frac{e^{-i\pi}}{\pi^2 - 3(-\pi)^2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{e^{i\pi}}{\pi^2 - 3\pi^2} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left( -\frac{i}{2} (e^{i\pi} + e^{-i\pi}) + i \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}(-i \cos \pi + i) = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

4. *Fourier-Transformation*

$$F(f(t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st dt.$$

Beide Integrale lassen sich, falls die Voraussetzungen erfüllt sind, mit Hilfe von Satz 16.71 für  $s > 0$  berechnen. Sei also für  $s > 0$ :

$$u(s) = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, z_k) + \pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, x_k),$$

wobei  $z_k$  die Singularitäten von  $f$  mit  $\operatorname{Im} z_k > 0$  und  $x_k$  die einfachen Pole auf der reellen Achse sind. Dann gilt

$$F(f(t))(s) = \begin{cases} u(|s|) & , \text{falls } s < 0 \\ \operatorname{Re}(u(0)) & , \text{falls } s = 0 \\ u(|s|) & , \text{falls } s > 0 \end{cases}$$

Das Ergebnis für  $s = 0$  gilt nur bei gleichmäßiger Konvergenz bzgl.  $s$ .

### Beispiele hierzu

1. *Gesucht:* Die Fourier-Transformierte von  $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$ ,  $a > 0$ .

Für  $f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2}$  gilt:  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ,  $f$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{\pm ia\}$ ,  $z_1 = ia$  ist einfacher Pol in der oberen Halbebene. Also gilt für  $s > 0$ :

$$u(s) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{isz}}{a^2 + z^2}, ia\right) = 2\pi i \frac{e^{isia}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-as}.$$

Es gilt gleichmäßige Konvergenz des Integrals bzgl.  $s$ , da  $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$ .

Damit erhalten wir für die Fourier-Transformierte von  $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$ :

$$F\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right)(s) = \frac{\pi}{a} e^{-a|s|}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad (\text{vgl. Beispiel 1, S.597}).$$

2. *Gesucht:* Die Fourier-Transformierte von  $f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}$ ,  $a > 0$ .

Für  $f(z) = \frac{z}{a^2 + z^2}$  gilt:  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ,  $f$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{\pm ia\}$ ,  $z_1 = ia$  ist einfacher Pol in der oberen Halbebene. Also gilt für  $s > 0$ :

$$u(s) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{isz}}{a^2 + z^2}, ia\right) = 2\pi i \frac{iae^{isia}}{2ia} = i\pi e^{-as}.$$

Hier gilt keine gleichmäßige Konvergenz des Integrals bzgl.  $s$ , aber  $f$  ist ungerade Funktion, also ist  $F(f)$  ein reines  $\sin$ -Integral, das für  $s = 0$  gleich Null ist (das  $\cos$ -Integral ist Null als Cauchyscher Hauptwert).

Damit erhalten wir für die Fourier-Transformierte von  $f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}$ :

$$F\left(\frac{t}{a^2 + t^2}\right)(s) = \begin{cases} i\pi e^{-a|s|} & , \text{falls } s < 0 \\ 0 & , \text{falls } s = 0 \\ -i\pi e^{-a|s|} & , \text{falls } s > 0 \end{cases}$$

(vgl. für  $a = 1$ : Beispiel 4, S.595).

### 3. Integrale vom Typ

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 1$$

#### Satz 16.72 :

Sei  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  eine rationale Funktion mit  $\operatorname{grad} q \geq 1 + \operatorname{grad} p$  und

$q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq 0$ .  $z_1, z_2, \dots, z_n$  seien alle Pole von  $R(z)$  in  $\mathcal{C}$ .

Dann gilt für  $0 < \alpha < 1$ :

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = \frac{\pi e^{i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, z_k\right), \quad z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}, \quad 0 < \arg z < 2\pi$$

Beweis :

Wir integrieren die Funktion  $\frac{R(z)}{z^\alpha}$  über die folgende Kurve  $K_{\epsilon,r}$  :

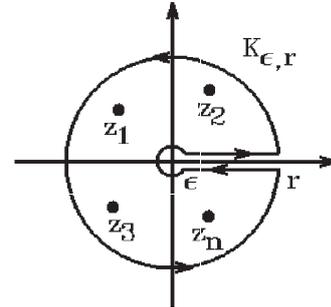
$K_{\epsilon,r} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$  mit

$K_1$ :  $z = t$ ,  $t \in [\epsilon, r]$ ,  $dz = dt$ ,  $\arg z = 0$ ,

$K_2$ :  $z = re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $dz = ire^{it} dt$ ,

$-K_3$ :  $z = t$ ,  $t \in [\epsilon, r]$ ,  $dz = dt$ ,  $\arg z = 2\pi$ ,

$-K_4$ :  $z = \epsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $dz = i\epsilon e^{it} dt$ .



Hierbei werden  $\epsilon$  so klein und  $r$  so groß gewählt, daß alle Singularitäten von  $R(z)$  im Inneren dieser geschlossenen Kurve  $K_{\epsilon,r}$  liegen. Dann folgt aus dem Residuensatz:

$$\int_{K_{\epsilon,r}} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left( \frac{R(z)}{z^\alpha}, z_k \right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist unabhängig von  $\epsilon$  und  $r$ . Lassen wir  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  gehen, so bleibt das Ergebnis unverändert.

Für  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  erhalten wir:

$$\int_{K_1} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \int_{\epsilon}^r \frac{R(t)}{t^\alpha e^{i\alpha 0}} dt = \int_{\epsilon}^r \frac{R(t)}{t^\alpha} dt \rightarrow \int_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha} dt.$$

$$\left| \int_{K_2} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz \right| \leq \max_{z \in K_2} |R(z)| \cdot \frac{1}{r^\alpha} \cdot 2\pi r \leq \frac{K}{r} \cdot \frac{2\pi r}{r^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

(da  $\text{grad } q \geq 1 + \text{grad } p$ )

$$\int_{K_3} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = - \int_{\epsilon}^r \frac{R(t)}{t^\alpha e^{i\alpha 2\pi}} dt = -e^{-2i\pi\alpha} \int_{\epsilon}^r \frac{R(t)}{t^\alpha} dt \rightarrow -e^{-2i\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha} dt.$$

$$\left| \int_{K_4} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz \right| \leq \max_{z \in K_4} |R(z)| \cdot \frac{1}{\epsilon^\alpha} \cdot 2\pi\epsilon \leq 2K\pi\epsilon^{1-\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \quad (\text{da } 0 < \alpha < 1).$$

Also erhalten wir insgesamt für  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  :

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha} dt = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left( \frac{R(z)}{z^\alpha}, z_k \right).$$

Da  $\frac{2\pi i}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} = \frac{2\pi i e^{i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{2\pi i e^{i\pi\alpha}}{2i \sin \pi\alpha} = \frac{\pi e^{i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha}$ , folgt hieraus die Behauptung.

### Beispiel

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x(1+x)} dx &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \frac{\pi e^{i\pi/2}}{\sin \pi/2} \text{Res} \left( \frac{1}{z^{1/2}(1+z)}, -1 \right) = i\pi \cdot \frac{1}{(-1)^{1/2}} \\ &= \frac{i\pi}{|1|^{1/2} e^{i\pi/2}} = \frac{i\pi}{i} = \pi. \end{aligned}$$

(da  $\alpha = 1/2$ ,  $e^{i\pi/2} = i$ ,  $\sin \pi/2 = 1$ ,  $\arg(-1) = \pi$ ).

Die Voraussetzungen des Satzes 16.72 sind für  $R(z) = \frac{1}{1+z}$  alle erfüllt.

#### 4. Integrale vom Typ

$$\int_0^{\infty} R(x) dx \quad , \quad \int_0^{\infty} R(x) \ln x dx$$

##### Satz 16.73 :

Sei  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  eine rationale Funktion mit  $\text{grad } q \geq 2 + \text{grad } p$  und  $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq 0$ .  $z_1, z_2, \dots, z_n$  seien alle Pole von  $R(z)$  in  $\mathcal{C}$ . Dann gilt :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_0^{\infty} R(x) dx = - \sum_{k=1}^n \text{Res} (R(z) \log z, z_k) \\ \text{b)} \quad & \int_0^{\infty} R(x) \ln x dx = - \frac{1}{2} \text{Re} \left( \sum_{k=1}^n \text{Res} (R(z) (\log z)^2, z_k) \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \log z = \ln |z| + i \arg z \quad , \quad 0 < \arg z < 2\pi$$

*Beweis :*

Wir integrieren über die gleiche Kurve wie beim Beweis zu Satz 16.72, also über  $K_{\epsilon, r} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$ .

Beim Integral  $\int_0^{\infty} R(x) dx$  integrieren wir die Funktion  $R(z) \log z$ , beim Integral  $\int_0^{\infty} R(x) \ln x dx$  integrieren wir die Funktion  $R(z) (\log z)^2$ . In beider Fällen gehen die Integrale über die Kurven  $K_2$  und  $K_4$  wieder gegen Null (für  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$ ). Für die Integrale über  $K_1 + K_3$  erhalten wir als Grenzwert

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_0^{\infty} R(t) (\ln t + i \cdot 0) dt - \int_0^{\infty} R(t) (\ln t + i \cdot 2\pi) dt = -2\pi i \int_0^{\infty} R(t) dt \\ & = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} (R(z) \log z, z_k) \\ \Rightarrow & \int_0^{\infty} R(t) dt = - \sum_{k=1}^n \text{Res} (R(z) \log z, z_k) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \int_0^{\infty} R(t) (\ln t + i \cdot 0)^2 dt - \int_0^{\infty} R(t) (\ln t + i \cdot 2\pi)^2 dt \\ & = -4\pi i \int_0^{\infty} R(t) \ln t dt + 4\pi^2 \int_0^{\infty} R(t) dt = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} (R(z) (\log z)^2, z_k) . \end{aligned}$$

Division durch  $(-4\pi i)$  ergibt dann für den Realteil bzw. Imaginärteil:

$$\int_0^{\infty} R(t) \ln t \, dt = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} (R(z)(\log z)^2, z_k) \right),$$

$$\int_0^{\infty} R(t) \, dt = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} (R(z)(\log z)^2, z_k) \right).$$

Das Integral  $\int_0^{\infty} R(t) \, dt$  kann nach dieser Formel oder nach der Formel a) berechnet werden.

### Beispiele

1.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} \, dx = -\sum_{k=1}^3 \operatorname{Res} \left( \frac{\log z}{(1+z)(1+z^2)}, z_k \right)$$

(mit  $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = -i$ )

$$= -\left( \frac{\log(-1)}{2} + \frac{\log i}{(1+i)2i} + \frac{\log(-i)}{(1-i)(-2i)} \right)$$

$$= -\left( \frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi) + \frac{1-i}{4i}(\ln 1 + i\pi/2) - \frac{1+i}{4i}(\ln 1 + i3\pi/2) \right)$$

$$= -\left( \frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{i\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} - \frac{3i\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes 16.73 sind für die Funktion  $R(z) = \frac{1}{(1+z)(1+z^2)}$  erfüllt, da  $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$  und  $q(x) \neq 0 \quad \forall x \geq 0$ .

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \operatorname{Res} \left( \frac{(\log z)^2}{(1+z)^3}, -1 \right) \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \left( (\log z)^2 \right)' \Big|_{z=-1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \left( \frac{\log z}{z} \right)' \Big|_{z=-1} \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \left( \frac{1 - \log z}{z^2} \right) \Big|_{z=-1} \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1 - (\ln 1 + i\pi)}{(-1)^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(1 - i\pi) = -\frac{1}{2}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes 16.73 sind für die Funktion  $R(z) = \frac{1}{(1+z)^3}$  erfüllt, da  $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$  und  $q(x) \neq 0 \quad \forall x \geq 0$ .

### Bemerkung :

Ist die rationale Funktion *gerade*, so gilt  $\int_0^{\infty} R(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) \, dt$ .

In diesem Fall berechnet man das Integral einfacher nach Satz 16.70 (vgl. [S.696](#)).

## 5. Integrale vom Typ

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$$

### Satz 16.74 :

Sei  $R(\cos x, \sin x)$  eine rationale Funktion in  $\cos x, \sin x$ .  $R^*$  sei die Funktion  $R^*(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ , und  $z_1, z_2, \dots, z_n$  seien die Pole von  $R^*$  mit  $|z_k| < 1$ .  $R^*$  habe keine Singularitäten auf  $K_1(0)$ . Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(R^*, z_k) \quad , \quad |z_k| < 1$$

*Beweis :*

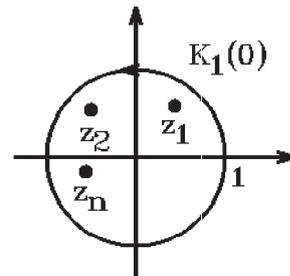
Da  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ,  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ , erhalten wir mit der

*Substitution:*  $z = e^{ix}$ :

$$dz = ie^{ix} dx = iz dx \Rightarrow dx = \frac{1}{iz} dz ,$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow z = e^{ix}$  durchläuft  $K_1(0)$   
(positiv orientiert).



Also gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx &= \int_{K_1(0)} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \frac{1}{iz} dz = \int_{K_1(0)} R^*(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(R^*, z_k) \quad \text{mit} \quad |z_k| < 1 \quad \text{Pole von } R^* \text{ im Inneren von } K_1(0). \end{aligned}$$

### Beispiel

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{5 - 3 \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos 2x}{5 - 3 \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{5 - 3 \cos x} dx .$$

(da Integrand gerade Funktion)                      (da Integrand  $2\pi$ -periodisch)

Da  $\cos 2x = \frac{1}{2}(e^{2ix} + e^{-2ix}) = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$  mit  $z = e^{ix}$ , gilt

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{K_1(0)} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{-1}{2i} \int_{K_1(0)} \frac{z^4 + 1}{z^2(3z^2 - 10z + 3)} dz \\ &= \frac{-1}{2i} \int_{K_1(0)} \frac{z^4 + 1}{3z^2(z - 3)(z - 1/3)} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2i} \cdot 2\pi i \left( \operatorname{Res} \left( \frac{z^4 + 1}{z^2(3z^2 - 10z + 3)}, 0 \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{z^4 + 1}{z^2(3z^2 - 10z + 3)}, \frac{1}{3} \right) \right) \\
&= -\pi \left( \left( \frac{z^4 + 1}{3z^2 - 10z + 3} \right)' \Big|_{z=0} + \left( \frac{z^4 + 1}{3z^2(z - 3)} \right) \Big|_{z=1/3} \right) \\
&= -\pi \left( \left( \frac{4z^3(3z^2 - 10z + 3) - (z^4 + 1)(6z - 10)}{(3z^2 - 10z + 3)^2} \right) \Big|_{z=0} + \frac{1 + 3^4}{9(1 - 9)} \right) \\
&= -\pi \left( \frac{10}{9} - \frac{82}{8 \cdot 9} \right) = \frac{\pi}{36}.
\end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist  $R^*$  holomorph in  $\bar{I}(K_1(0))$  bis auf  $z_1 = 0$  (doppelter Pol) und  $z_2 = 1/3$  (einfacher Pol).

### Berechnung der inversen Laplace-Transformation mit Hilfe des Residuensatzes

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  Originalfunktion gemäß Definition 10.1 (vgl. S.330), d.h.:  $f$  ist *stückweise stetig* in jedem abgeschlossenen Teilintervall  $[0, b] \subset [0, \infty)$  und *wachse* für  $t \rightarrow \infty$  *höchstens exponentiell*, d.h.:  $|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t \geq t_0$  mit  $\sigma \geq 0$ ,  $M > 0$ . Dann existiert die Laplace-Transformierte  $F = L(f)$  von  $f$  mit

$$F(z) = L(f(t))(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re} z > \sigma.$$

Ist nun  $F$  gegeben, so ist  $f = L^{-1}(F)$  die *inverse Laplace-Transformierte* von  $F$ .  $f$  ist bis auf die Sprungstellen eindeutig bestimmt. Unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion  $F$  kann  $f = L^{-1}(F)$  mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden. Zunächst zeigen wir folgende *komplexe Umkehrformel*:

#### Satz 16.75 : Komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  Originalfunktion mit  $|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t \geq t_0$  mit  $\sigma \geq 0$ , sei  $F$  die Laplace-Transformierte von  $f$ . Ist  $f$  zusätzlich *stückweise glatt*, so gilt für alle  $t \in [0, \infty)$ , für die  $f$  stetig ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_\tau} F(z)e^{zt} dz, \quad \tau > \sigma$$

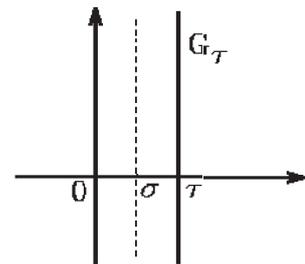
Hierbei ist  $G_\tau$  die Gerade  $G_\tau = \{z = \tau + iy : y \in \mathbb{R}\}$ .

*Beweis :*

$$\text{Sei } F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re} z > \sigma.$$

Erweitern wir  $f$  durch  $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$  und setzen  $z = \tau + iy$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned}
F(\tau + iy) &= \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-(\tau + iy)t} dt = \int_{-\infty}^\infty (f(t)e^{-\tau t})e^{-iyt} dt \\
&= \int_{-\infty}^\infty g(t)e^{-iyt} dt \quad \text{mit } g(t) = f(t)e^{-\tau t} \quad \text{und } \tau > \sigma.
\end{aligned}$$



$F(\tau + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iyt} dt$  ist die *Fourier-Transformierte* von  $g(t)$  (vgl. S.592).

Da  $g$  stückweise glatt und  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) = 0$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt$  existiert (da  $\tau > \sigma$ ), folgt mit Hilfe der *Umkehrformel* der Fourier-Transformation (vgl. S.592) in allen Stetigkeitsstellen von  $g$  und damit von  $f$ :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau + iy)e^{iyt} dy \Rightarrow f(t)e^{-\tau t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau + iy)e^{iyt} dy$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau + iy)e^{(\tau + iy)t} dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_\tau} F(z)e^{zt} dz .$$

(mit  $z = \tau + iy$ ,  $dz = idy$ ).

Für gewisse Funktionen  $F$  läßt sich das Integral  $\int_{G_\tau} F(z)e^{zt} dz$  mit Hilfe des Residuensatzes berechnen. Es gilt der folgende Satz:

**Satz 16.76 :** *Inverse Laplace-Transformation*

Sei  $F$  die Laplace-Transformierte einer stückweise glatten Originalfunktion  $f$  mit  $|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t \geq t_0$  mit  $\sigma \geq 0$ . Ferner sei  $F$  *holomorph* in  $\mathcal{C}$  mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten  $z_1, z_2, \dots, z_n$  mit  $Re z_k < \tau$  und  $\tau > \sigma$ , und es gelte  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$ . Dann gilt für die *inverse Laplace-Transformierte*  $f = L^{-1}(F)$ :

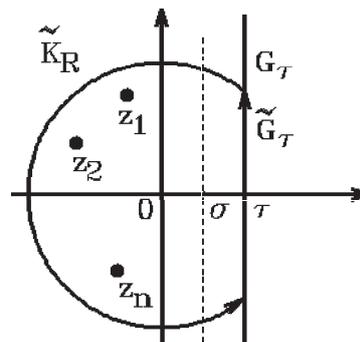
$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}(F(z)e^{zt}, z_k)$$

in allen Stetigkeitsstellen von  $f$ . An den Sprungstellen wird jeweils der Mittelwert  $\frac{1}{2}(f(t_0+) + f(t_0-))$  angenommen.

*Beweis :*

Wir integrieren die Funktion  $F(z)e^{zt}$  über die folgende Kurve  $K_R = \tilde{K}_R + \tilde{G}_\tau$ :

$\tilde{K}_R$  ist ein Stück positiv orientierter Kreis mit Radius  $R$ ,  
 $\tilde{G}_\tau$  ist ein Stück der Geraden  $G_\tau$ .



Wir wählen  $R$  so groß, daß alle Singularitäten  $z_k$  im Inneren dieser geschlossenen Kurve  $K_R$  liegen (das ist möglich, da  $Re z_k < \tau$  gilt).

Dann erhalten wir mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{K_R} F(z)e^{zt} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(F(z)e^{zt}, z_k).$$

Da  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$ , gilt für das Integral über  $\tilde{K}_R$ :  $\int_{\tilde{K}_R} F(z)e^{zt} dz \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$ .

Für das Integral über  $\tilde{G}_\tau$  gilt für  $R \rightarrow \infty$ :

$$\int_{\tilde{G}_\tau} F(z)e^{zt} dz \rightarrow \int_{G_\tau} F(z)e^{zt} dz = 2\pi i f(t) \quad (\text{nach der komplexen Umkehrformel}).$$

Damit erhalten wir insgesamt die Behauptung.

## Beispiele

1.

Gegeben:  $F(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$ . Gesucht:  $f(t) = L^{-1}(F(x))(t)$ .

$$F(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 5} \text{ ist holomorph in } \mathcal{C} \setminus \{-1 \pm 2i\}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 5}, -1 + 2i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 5}, -1 - 2i\right) \\ &= \left(\frac{e^{zt}}{2z + 2}\right)_{|z=-1+2i} + \left(\frac{e^{zt}}{2z + 2}\right)_{|z=-1-2i} = \frac{e^{-t}e^{2it}}{4i} + \frac{e^{-t}e^{-2it}}{-4i} = \frac{1}{4i}e^{-t}2i \sin 2t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t \quad (f \text{ ist Originalfunktion und glatt in } [0, \infty)). \quad \text{Also gilt:}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 5}\right)(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t.$$

2.

Gegeben:  $y'' + 5y' + 4y = t$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .

Anwendung der Laplace-Transformation ergibt:

$$L(y'') + 5L(y') + 4L(y) = L(t)$$

$$\Rightarrow (x^2L(y) - xy(0) - y'(0)) + 5(xL(y) - y(0)) + 4L(y) = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Da } y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow (x^2 + 5x + 4)L(y) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow L(y) = \frac{1}{x^2(x^2 + 5x + 4)}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{x^2(x^2 + 5x + 4)}\right)(t)$$

$$= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2(z+1)(z+4)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2(z+1)(z+4)}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\dots, -4\right)$$

$$= \left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 5z + 4}\right)'_{|z=0} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{-4t}}{16(-3)}$$

$$= \left(\frac{t(z^2 + 5z + 4) - (2z + 5)e^{zt}}{(z^2 + 5z + 4)^2}\right)_{|z=0} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{48}e^{-4t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{48}e^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{5}{16} \quad \text{ist die gesuchte Lösung.}$$

Die Voraussetzungen von Satz 16.76 sind erfüllt, denn:

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 5z + 4)} \text{ ist holomorph in } \mathcal{C} \setminus \{0, -1, -4\}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0,$$

$y(t)$  ist Originalfunktion und glatt in  $[0, \infty)$ .

Bei der Berechnung der inversen Laplace-Transformation müssen häufig die Residuen für  $z_0$  und  $\bar{z}_0$  (z.B.: konjugiert komplexe Pole, vgl. Beispiel 1, S.711) berechnet werden. Unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion  $f$  kann hierbei die Aussage des folgenden Satzes benutzt werden:

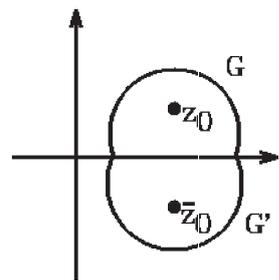
**Satz 16.77 :**

Sei  $G \subset \mathcal{C}$  Gebiet und  $G' = \{z \in \mathcal{C} : \bar{z} \in G\}$  das Spiegelbild von  $G$  an der reellen Achse, sei  $f$  holomorph in  $G$  und  $G'$  bis auf  $z_0 \in G$  und  $\bar{z}_0 \in G'$ .

Gilt:  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in G \setminus \{z_0\} \Rightarrow \text{Res}(f, \bar{z}_0) = \overline{\text{Res}(f, z_0)}$ .

*Beweis :*

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \bar{z}_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(\bar{z}_0)} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\bar{z}_0 + re^{it}) ire^{it} dt \\ &\quad (\text{mit } K_r(\bar{z}_0) : z = \bar{z}_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi], dz = ire^{it} dt) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{-it}) (-ir)e^{-it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \overline{f(z_0 + re^{-it}) (-ir)e^{-it}} dt \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{-it}) (-ir)e^{-it} dt = \overline{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(z) dz} = \overline{\text{Res}(f, z_0)}. \\ &\quad (\text{mit } -K_r(z_0) : z = z_0 + re^{-it}, t \in [0, 2\pi], dz = -ire^{-it} dt). \end{aligned}$$



**Beispiel**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{p(z)}{q(z)} e^{zt} ; p, q \text{ Polynome mit reellen Koeffizienten} \\ \Rightarrow p(\bar{z}) &= \overline{p(z)}, q(\bar{z}) = \overline{q(z)}, e^{\bar{z}t} = e^{(x-iy)t} = e^{xt} e^{-iyt} = \overline{e^{xt} e^{iyt}} = \overline{e^{zt}} \quad \forall z \in \mathcal{C} \\ \Rightarrow f(\bar{z}) &= \overline{f(z)} \quad \forall z \in \mathcal{C} \text{ bis auf die Singularitäten } z_k. \end{aligned}$$

Also gilt bei der Berechnung der inversen Laplace-Transformation von *reellen rationalen Funktionen* die Eigenschaft:

$$\text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{zt}, \bar{z}_k\right) = \overline{\text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{zt}, z_k\right)}.$$

**Beispiel hierzu** (vgl. Beispiel 1, S.711)

$$\text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 5}, -1 + 2i\right) = \frac{e^{-t} e^{2it}}{4i} \Rightarrow \text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 5}, -1 - 2i\right) = \frac{e^{-t} e^{-2it}}{-4i}.$$

**Bemerkung :** *Abzählbar unendlich viele isolierte Singularitäten*

Satz 16.76 (Berechnung der inversen Laplace-Transformation mit Hilfe des Residuensatzes) gilt auch noch, wenn  $F$  *abzählbar unendlich viele isolierte Singularitäten*  $z_k$  mit  $\operatorname{Re} z_k < \tau$  besitzt, und  $F$  zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 16.76 folgende Eigenschaften erfüllt:

$$|F(z)| \leq \frac{M}{r_n^k} \quad \forall z \in K_{r_n}(0) \quad \text{mit} \quad k > 0 \quad \text{und} \quad M \text{ unabhängig von } n.$$

Hierbei sei  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von Radien mit  $r_n \rightarrow \infty$ , und  $F$  habe keine Singularitäten auf  $K_{r_n}$ .

In diesem Fall gilt in allen Stetigkeitsstellen von  $f$ :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}(F(z)e^{zt}, z_k)$$

**Beispiel** (vgl. Beispiel 2, [S.586/587](#))

$$\left[ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = x \end{array} \right]$$

Anwendung der Laplace-Transformation ergibt:

$$\Rightarrow U_{xx} - pU = -x \quad (\text{DGL für } U),$$

$$U(0, p) = L(0) = 0 \quad , \quad U(\pi, p) = L(0) = 0 \quad (\text{Randbedingungen}).$$

Allgemeine Lösung der DGL (bei festgehaltenem  $p > 0$ ):

*homogen:*  $U_h(x, p) = c_1 e^{\sqrt{p}x} + c_2 e^{-\sqrt{p}x} \quad ,$

*partikuläre Lösung:* Ansatz:  $U_0(x, p) = A + Bx$

$$\Rightarrow -p(A + Bx) = -x \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad , \quad B = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad U_0(x, p) = \frac{x}{p}$$

$$\Rightarrow U(x, p) = c_1 e^{\sqrt{p}x} + c_2 e^{-\sqrt{p}x} + \frac{x}{p} \quad \text{ist allgemeine Lösung der DGL.}$$

*Randbedingungen:*

$$U(0, p) = c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1 \quad \Rightarrow$$

$$U(x, p) = 2c_1 \sinh(\sqrt{p}x) + \frac{x}{p} \quad ,$$

$$U(\pi, p) = 2c_1 \sinh(\sqrt{p}\pi) + \frac{\pi}{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c_1 = -\frac{\pi}{p \sinh(\sqrt{p}\pi)} \quad \Rightarrow$$

$$U(x, p) = \frac{x}{p} - \frac{\pi \sinh(\sqrt{p}x)}{p \sinh(\sqrt{p}\pi)} \quad \text{ist Lösung der RWA für } U \quad \Rightarrow$$

$$u(x, t) = xL^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)(t) - \pi L^{-1}\left(\frac{\sinh(\sqrt{p}x)}{p \sinh(\sqrt{p}\pi)}\right)(t) \quad , \quad \text{mit} \quad L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)(t) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$u(x, t) = x - \pi L^{-1}\left(\frac{\sinh(x\sqrt{p})}{p \sinh(\pi\sqrt{p})}\right)(t) \quad .$$

Wir müssen also noch  $L^{-1}\left(\frac{\sinh(x\sqrt{p})}{p \sinh(\pi\sqrt{p})}\right)(t)$  bzgl.  $p$  berechnen.

Dazu ersetzen wir  $p$  durch  $x$  und  $x$  durch  $a$  mit  $0 < a < \pi$ . Dann erhalten wir

$$L^{-1}\left(\frac{\sinh(a\sqrt{x})}{x \sinh(\pi\sqrt{x})}\right)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{\sinh(a\sqrt{z}) e^{zt}}{z \sinh(\pi\sqrt{z})}, z_k\right).$$

Singularitäten von  $F(z) = \frac{\sinh(a\sqrt{z})}{z \sinh(\pi\sqrt{z})}$ :

$$\sinh(z) = 0 \Leftrightarrow z = ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{da } i \sinh(z) = \sin(iz)).$$

$$\sinh(\pi\sqrt{z}) = 0 \Leftrightarrow \pi\sqrt{z} = ik\pi \Leftrightarrow \sqrt{z} = ik \Rightarrow z_k = -k^2, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

$z_0 = 0$  ist einfacher Pol, da einfache Nullstelle des Zählers und zweifache Nullstelle des Nenners. Auch die anderen Singularitäten  $z_k = -k^2, k \in \mathbb{N}$ , sind einfache Pole.

Wir berechnen zunächst  $\operatorname{Res}\left(\frac{\sinh(a\sqrt{z}) e^{zt}}{z \sinh(\pi\sqrt{z})}, 0\right)$  mit Hilfe der Laurent-Reihe um  $z_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(a\sqrt{z})}{z \sinh(\pi\sqrt{z})} &= \frac{a\sqrt{z} + \frac{1}{3!}a^3\sqrt{z}^3 + \dots}{z(\pi\sqrt{z} + \frac{1}{3!}\pi^3\sqrt{z}^3 + \dots)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{a + \frac{1}{6}a^3z + \dots}{\pi + \frac{1}{6}\pi^3z + \dots} = \frac{1}{z}(b_0 + b_1z + \dots) \\ \Rightarrow a + \frac{1}{6}a^3z + \dots &= (b_0 + b_1z + \dots)(\pi + \frac{1}{6}\pi^3z + \dots) = b_0\pi + (\frac{b_0\pi^3}{6} + b_1\pi)z + \dots \Rightarrow b_0 = \frac{a}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\frac{\sinh(a\sqrt{z})e^{zt}}{z \sinh(\pi\sqrt{z})} = \frac{1}{z}(b_0 + b_1z + \dots)(1 + tz + \dots) = \frac{b_0}{z} + (b_1 + tb_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{\sinh(a\sqrt{z}) e^{zt}}{z \sinh(\pi\sqrt{z})}, 0\right) = b_0 = \frac{a}{\pi}.$$

Berechnung der Residuen an den einfachen Polen  $z_k = -k^2 \Rightarrow \sqrt{z_k} = ik, k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{\sinh(a\sqrt{z}) e^{zt}}{z \sinh(\pi\sqrt{z})}, -k^2\right) &= \frac{\sinh(aik) e^{-k^2t}}{\sinh(\pi ik) + (\pi/2)ik \cosh(\pi ik)} \\ &= \frac{i \sin(ak) e^{-k^2t}}{i \sin(k\pi) + (\pi/2)ik \cos(k\pi)} = \frac{2(-1)^k \sin(ak) e^{-k^2t}}{k\pi} \\ &\quad (\text{da } \sin k\pi = 0, \cos k\pi = (-1)^k). \end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt

$$L^{-1}\left(\frac{\sinh(a\sqrt{x})}{x \sinh(\pi\sqrt{x})}\right)(t) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(ak) e^{-k^2t}$$

(falls die Voraussetzungen erfüllt sind).

Als Lösung der ARWA erhalten wir dann ( $a$  wieder durch  $x$  ersetzen):

$$u(x, t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) e^{-k^2t}.$$

Anstelle der Überprüfung der Voraussetzungen machen wir nun die Probe, ob  $u(x, t)$  Lösung der ARWA ist:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (\text{ist erfüllt}),$$

$$u(x, 0) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) = x, \quad 0 < x < \pi$$

(vgl. Fourierreihe Beispiel 3, S.313/314).

$$u_t(x, t) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k \sin(kx) e^{-k^2 t}, \quad u_{xx}(x, t) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k \sin(kx) e^{-k^2 t}$$

$\Rightarrow u_t = u_{xx}$  (gliedweise Differentiation ist erlaubt, da die Reihe und die Ableitungsreihen jeweils gleichmäßig konvergent für  $t \geq \alpha > 0$  sind).

## Weitere Anwendungen des Residuensatzes

### Satz 16.78 : Prinzip des Arguments

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängendes Gebiet, sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$  mit Ausnahme endlich vieler isolierter Pole.

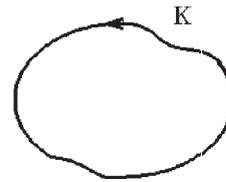
Sei  $K$  eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve in  $G$ .

Auf  $K$  liege keine Nullstelle und kein Pol von  $f$ .

$N_f$  sei die Anzahl der Nullstellen von  $f$  in  $I(K)$ ,  $P_f$  sei die Anzahl der Pole von  $f$  in  $I(K)$  (jeweils so oft gezählt, wie die Ordnung ist).

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f$$



*Beweis :*

Sei  $z_k$  Nullstelle oder Pol von  $f$  in  $I(K)$  der Ordnung  $|m_k|$ , dann gilt

$f(z) = (z - z_k)^{m_k} g_k(z)$  mit  $m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , und  $g_k$  ist holomorph in  $U_r(z_k)$

mit  $g_k(z_k) \neq 0 \Rightarrow f'(z) = m_k(z - z_k)^{m_k-1} g_k(z) + (z - z_k)^{m_k} g_k'(z)$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_k}{z - z_k} + \frac{g_k'(z)}{g_k(z)} \quad \forall z \in U_r(z_k) \setminus \{z_k\}$$

$\Rightarrow z_k$  ist einfacher Pol von  $\frac{f'}{f}$  mit  $\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right) = m_k$

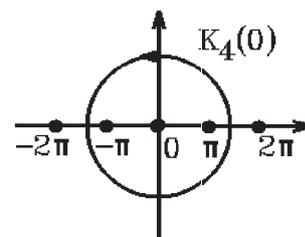
und  $m_k > 0$ , falls  $z_k$  Nullstelle,  $m_k < 0$ , falls  $z_k$  Pol.

Mit Hilfe des Residuensatzes folgt hieraus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n m_k = N_f - P_f.$$

### Beispiel

$$\int_{K_4(0)} \frac{\cos z}{\sin z} dz = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i.$$



Denn:  $f(z) = \sin z$ ,  $f'(z) = \cos z$ ,  $f$  hat keine Pole, aber 3 Nullstellen in  $I(K_4(0))$ .

Mit Hilfe von Satz 16.78 können wir nun folgenden Satz beweisen:

**Satz 16.79 :** *Satz von Rouché*

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängendes Gebiet, seien  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$ . Sei  $K$  eine geschlossene, stückweise glatte Jordankurve in  $G$ .

Auf  $K$  gelte  $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in K$ .

Dann haben  $f$  und  $(f + g)$  innerhalb von  $K$  die gleiche Anzahl von Nullstellen.

*Beweis :*

Sei  $a \in [0, 1]$ ,  $\varphi_a(z) = f(z) + ag(z)$

$$\Rightarrow |\varphi_a(z)| = |f(z) + ag(z)| \geq |f(z)| - a|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \quad \forall z \in K$$

(da  $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in K$ )

$\Rightarrow \varphi_a(z) \neq 0 \quad \forall z \in K$ . Da  $\varphi_a$  holomorph in  $G \Rightarrow \varphi_a$  hat keine Pole.

Also gilt nach Satz 16.78 :

$$N_{\varphi_a} = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi'_a(z)}{\varphi_a(z)} dz = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z) + ag'(z)}{f(z) + ag(z)} dz.$$

Zu zeigen:  $N_{\varphi_a}$  ist stetig in  $[0, 1]$  bzgl.  $a$  :

Seien  $a_1, a_2 \in [0, 1]$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |2\pi i(N_{\varphi_{a_1}} - N_{\varphi_{a_2}})| &= \left| \int_K \left( \frac{f'(z) + a_1g'(z)}{f(z) + a_1g(z)} - \frac{f'(z) + a_2g'(z)}{f(z) + a_2g(z)} \right) dz \right| \\ &= |a_1 - a_2| \left| \int_K \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{(f(z) + a_1g(z))(f(z) + a_2g(z))} dz \right| \\ &\leq |a_1 - a_2| \max_{z \in K} \left| \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{(|f(z)| - |g(z)|)^2} \right| L(K) \quad (\text{nach obiger Abschätzung}). \end{aligned}$$

Für  $a_1 \rightarrow a_2$  gilt also:  $N_{\varphi_{a_1}} \rightarrow N_{\varphi_{a_2}} \Rightarrow N_{\varphi_a}$  ist stetig in  $[0, 1]$  bzgl.  $a$ .

Da aber  $N_{\varphi_a}$  für alle  $a \in [0, 1]$  eine ganze Zahl ist  $\Rightarrow N_{\varphi_a} = \text{konstant}$

$\Rightarrow N_{\varphi_0} = N_{\varphi_1} \Rightarrow N_f = N_{f+g} \Rightarrow$  Behauptung.

Als Anwendung dieses Satzes kann man die ungefähre Lage der Nullstellen von Polynomen bestimmen:

**Beispiel**

*Gegeben:*  $p(z) = z^4 + 7z + 1$ . *Gesucht:* Die ungefähre Lage der Nullstellen von  $p$ .

Wir zerlegen  $p(z) = f(z) + g(z)$  und benutzen Satz 16.79.

a)  $f(z) = z^4$ ,  $g(z) = 7z + 1$ .

Auf  $K_2(0)$  gilt:  $|f(z)| = |z|^4 = 16$ ,  $|g(z)| = |7z + 1| \leq 7|z| + 1 = 15$

$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in K_2(0)$

$\Rightarrow f$  und  $p = f + g$  haben in  $I(K_2(0))$  die gleiche Anzahl von Nullstellen.

$f(z) = z^4$  hat 4 Nullstellen in  $I(K_2(0)) \Rightarrow p$  hat 4 Nullstellen in  $I(K_2(0))$

$\Rightarrow$  alle Nullstellen von  $p$  liegen in  $I(K_2(0))$ ,

also gilt  $|z_k| < 2$  für alle Nullstellen von  $p$ .

b)  $f(z) = 7z$ ,  $g(z) = z^4 + 1$ .

Auf  $K_1(0)$  gilt:  $|f(z)| = 7|z| = 7$ ,  $|g(z)| \leq |z|^4 + 1 \leq 2$   
 $\Rightarrow |f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in K_1(0)$   
 $\Rightarrow f$  und  $p = f + g$  haben in  $I(K_1(0))$  die gleiche Anzahl von Nullstellen.  
 $f(z) = 7z$  hat 1 Nullstelle in  $I(K_1(0)) \Rightarrow p$  hat 1 Nullstelle in  $I(K_1(0))$ , die 3  
 anderen Nullstellen liegen in  $\{z \in \mathcal{C} : 1 \leq |z| < 2\}$ .  
 Also gilt  $|z_1| < 1$ ,  $1 \leq |z_k| < 2$  für  $k = 2, 3, 4$ .

Mit Hilfe des *Newton-Verfahrens* für komplexe Funktionen (vgl. S.353) kann man die Nullstellen näherungsweise bestimmen. Da die ungefähre Lage der Nullstellen bekannt ist, kann man günstige Startwerte angeben. In diesem Beispiel erhält man

Startwert	angenäherte Nullstelle
-0.5	-0.1429167
-1.5	-1.8627223
$1.5 + i 1.5$	$1.0028195 + i 1.6585315$
$1.5 - i 1.5$	$1.0028195 - i 1.6585315$

## XVII Z - Transformation

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Transformation, die *Z-Transformation* behandeln.

**Definition 17.1 :** *Z-Transformation*

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $\mathcal{C}$ . Dann heißt

$$F(f_n)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

die *Z-Transformation* von  $(f_n)$ .

$F(f_n)(z)$  ist für die  $z \in \mathcal{C}$  definiert, für die die unendliche Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$  konvergent ist.

Bei der *Z-Transformation* wird einer Folge  $(f_n)$  eine komplexe Funktion  $F(f_n)(z)$  zugeordnet.

Die *Z-Transformation* ist im Gegensatz zu den bisher behandelten Integral-Transformationen (Laplace- und Fourier-Transformation) eine *diskrete Transformation*.

Wir wollen zunächst die Konvergenz der unendlichen Reihe der *Z-Transformation* untersuchen:

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{z^n}$  ist eine *Laurent-Reihe* um  $z_0 = 0$ . Damit ist der *Konvergenzbereich* das Ringgebiet  $I_R = \{z \in \mathcal{C} : 0 < R < |z| < \infty\}$ , wobei  $\frac{1}{R}$  der Konvergenzradius der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n w^n$  ist (der Konvergenzradius des Regulärteils ist  $\infty$ , da der Regulärteil eine endliche Summe ist).

Für die Koeffizienten  $f_n$  gilt (vgl. Satz 16.58, S.677)

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(0)} \frac{F(f_n)(z)}{z^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(0)} F(f_n)(z) z^{n-1} dz \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

wobei  $K_r(0)$  der positiv orientierte Kreis um 0 mit Radius  $r > R$  ist.

Die Z-Transformierte  $F(f_n)(z)$  ist als Laurent-Reihe *holomorph* in  $I_R$ .

Da  $F(f_n)(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$  eine Potenzreihe um  $z_0 = 0$  mit Konvergenzradius  $\frac{1}{R}$  ist, folgt für die Koeffizienten  $f_n$  (vgl. Satz 16.52, S.671):

$$f_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^n}{dz^n} \left( F(f_n)\left(\frac{1}{z}\right) \right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

### Beispiele

- $f_0 = 1$ ,  $f_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$F(f_n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = 1 \quad , \quad \text{also}$$

$$F((1, 0, 0, 0, \dots))(z) = 1$$

- $f_n = a^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$  fest.

$$F(a^n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a} \quad , \quad \text{falls } \left|\frac{a}{z}\right| < 1$$

$$\Rightarrow |z| > |a| \quad , \quad \text{also}$$

$$F(a^n)(z) = \frac{z}{z - a} \quad , \quad |z| > |a|$$

Auch bei der Z-Transformation spielt die Faltung eine wichtige Rolle. Wir definieren deshalb:

**Definition 17.2 :** *Faltung*

Seien  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  zwei Folgen in  $\mathcal{C}$ . Dann heißt die Folge  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$(h_n) = (f_n) * (g_n) \quad \text{mit} \quad h_n = \sum_{l=0}^n f_l g_{n-l} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

die *Faltung* von  $(f_n)$  mit  $(g_n)$ .

Anstelle von Ableitungen definieren wir bei Folgen *Differenzen  $k$ -ter Ordnung*:

**Definition 17.3 :** *Differenzen  $k$ -ter Ordnung*

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $\mathcal{C}$ . Dann definieren wir die *Differenzen  $k$ -ter Ordnung* :

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n \quad , \quad \Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n$$

mit  $\Delta^1 = \Delta$  ,  $\Delta^0 f_n = f_n$ .

Im folgenden Satz fassen wir die wichtigsten Eigenschaften der Z-Transformation zusammen:

**Satz 17.4 :** *Eigenschaften der Z-Transformation*

Seien  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  zwei Folgen in  $\mathcal{C}$  und sei  $c \in \mathcal{C}$ . Dann gilt

a)  $F(f_n + g_n) = F(f_n) + F(g_n)$  ,  $F(cf_n) = cF(f_n)$  (*Linearität*).

b)  $F(f_{n-k})(z) = z^{-k} F(f_n)(z)$  ,  $k \in \mathbb{N}$  , (mit  $f_n = 0$  für  $n < 0$ ) ,

$$F(f_{n+k})(z) = z^k \left( F(f_n)(z) - \sum_{l=0}^{k-1} f_l z^{-l} \right) \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad ,$$

(*Verschiebungseigenschaft*).

c)  $F\left(\sum_{l=0}^n f_l\right)(z) = \frac{z}{z-1} F(f_n)(z)$  (*Summationseigenschaft*).

d)  $F(\alpha^n f_n)(z) = F(f_n)\left(\frac{z}{\alpha}\right)$  ,  $\alpha \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$  (*Dämpfungseigenschaft*).

e)  $F(\Delta f_n)(z) = (z-1)F(f_n)(z) - z f_0$  ,  
 $F(\Delta^2 f_n)(z) = (z-1)^2 F(f_n)(z) - z(z-1)f_0 - z \Delta f_0$  ,

allgemein:

$$F(\Delta^k f_n)(z) = (z-1)^k F(f_n)(z) - z \sum_{l=0}^{k-1} (z-1)^{k-l-1} \Delta^l f_0$$

(*Differenzeigenschaft*).

f)  $F(n f_n)(z) = -z \frac{d}{dz} F(f_n)(z)$  (*Differentiationseigenschaft*).

g)  $F(f_n * g_n)(z) = F(f_n)(z) \cdot F(g_n)(z)$  (*Faltungseigenschaft*).

Beweis :

a) Die Linearität folgt aus der Linearität der unendlichen Summe, falls die Reihen jeweils konvergent sind.

$$\text{b) } F(f_{n-k})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=-k}^{\infty} f_n z^{-(n+k)} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

(da  $f_n = 0$  für  $n < 0$ ).

$$\begin{aligned} F(f_{n+k})(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} f_n z^{-(n-k)} = z^k \sum_{n=k}^{\infty} f_n z^{-n} \\ &= z^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right) = z^k \left( F(f_n)(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right). \end{aligned}$$

$$\text{c) } (f_n) * (1^n) = \sum_{l=0}^n f_l \cdot 1^{n-l} = \sum_{l=0}^n f_l, \quad \text{also folgt mit Eigenschaft g) :}$$

$$F\left(\sum_{l=0}^n f_l\right)(z) = F(f_n * 1^n)(z) = F(f_n)(z) \cdot F(1^n)(z) = \frac{z}{z-1} F(f_n)(z)$$

(nach Beispiel 2, S.718, mit  $a = 1$ ).

$$\text{d) } F(\alpha^n f_n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{-n} = F(f_n)\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

$$\text{e) } F(\Delta f_n)(z) = F(f_{n+1})(z) - F(f_n)(z) = z(F(f_n)(z) - f_0) - F(f_n)(z)$$

$$= (z-1)F(f_n)(z) - z f_0. \quad (\text{nach b)})$$

$$\begin{aligned} F(\Delta^2 f_n)(z) &= F(\Delta f_{n+1})(z) - F(\Delta f_n)(z) \\ &= \left( (z-1)F(f_{n+1})(z) - z f_1 \right) - \left( (z-1)F(f_n)(z) - z f_0 \right) \\ &= (z-1)F(f_{n+1} - f_n)(z) - z(f_1 - f_0) = (z-1)F(\Delta f_n)(z) - z(f_1 - f_0) \\ &= (z-1)^2 F(f_n)(z) - z(z-1)f_0 - z(f_1 - f_0) \end{aligned}$$

(allgemein mit Induktion).

$$\text{f) } F(f_n)'(z) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-n) f_n z^{-n-1} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} n f_n z^{-n} = -\frac{1}{z} F(n f_n)(z)$$

(Laurent-Reihe darf in ihrem Konvergenzring gliedweise differenziert werden).

$$\begin{aligned} \text{g) } F(f_n)(z) \cdot F(g_n)(z) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^n f_l z^{-l} g_{n-l} z^{-(n-l)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^n f_l g_{n-l} \right) z^{-n} = F(f_n * g_n)(z). \quad (\text{Cauchy-Produkt}) \end{aligned}$$

## Beispiele

1. zu a)

$$F(\sin \omega n)(z) = F\left(\frac{1}{2i}(e^{i\omega n} - e^{-i\omega n})\right)(z) = \frac{1}{2i} \left( F(e^{i\omega n})(z) - F(e^{-i\omega n})(z) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{z - e^{i\omega}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega}} \right) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z(e^{i\omega} - e^{-i\omega})}{z^2 - z(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + 1} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left( \frac{z \cdot 2i \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} \right).
\end{aligned}$$

Also gilt (2. Gleichung analog) :

$$F(\sin \omega n)(z) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}, \quad F(\cos \omega n)(z) = \frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$$

2. zu b)  $F(a^n)(z) = \frac{z}{z - a}$  (nach Beispiel 2, S.718)  $\Rightarrow$

$$F(a^{n-1})(z) = \frac{F(a^n)(z)}{z} = \frac{1}{z - a} \quad (\text{mit } f_0 = 0 \text{ f\u00fcr } n = 0),$$

$$F(a^{n+1})(z) = z \left( F(a^n)(z) - a^0 \right) = z \left( \frac{z}{z - a} - 1 \right) = \frac{az}{z - a}.$$

3. zu c)

$$F\left(\sum_{l=0}^n l\right)(z) = \frac{z}{z - 1} F(n)(z) = \frac{z}{z - 1} \cdot \frac{z}{(z - 1)^2} = \frac{z^2}{(z - 1)^3} \quad (\text{nach folg. Beispiel 5.}).$$

4. zu d)

$$F(a^n \sin \omega n)(z) = F(\sin \omega n)\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{\frac{z}{a} \sin \omega}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{a}\right) \cos \omega + 1} = \frac{az \sin \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2}.$$

5. zu f)

$$F(na^n)(z) = -z \frac{d}{dz} F(a^n)(z) = -z \left( \frac{z}{z - a} \right)' = -z \frac{z - a - z}{(z - a)^2} = \frac{az}{(z - a)^2}.$$

6. zu f)

$$F(n^2 a^n)(z) = -z \left( \frac{az}{(z - a)^2} \right)' = -az \frac{(z - a) - 2z}{(z - a)^3} = -az \frac{-z - a}{(z - a)^3} = \frac{az(z + a)}{(z - a)^3}.$$

### Inverse Z-Transformation

Aus  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$  folgt, da\u00df  $(f_n) = F^{-1}(F(f_n))$  eindeutig bestimmt ist (wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Laurent-Reihe).

**Satz 17.5 :** *Inverse Z-Transformation*

Sei  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$  die Z-Transformierte von  $(f_n)$ .

a)  $F(z)$  sei holomorph für  $|z| > R$ ,  $R > 0$ . Dann gilt für die *inverse Z-Transformation*

$$f_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^n}{dz^n} \left( F\left(\frac{1}{z}\right) \right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

b)  $F(z)$  sei holomorph in  $\mathcal{C}$  mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten  $z_1, z_2, \dots, z_m$ .

Dann gilt für die *inverse Z-Transformation*

$$f_n = \sum_{k=1}^m \text{Res} (F(z)z^{n-1}, z_k) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

*Beweis :*

a) haben wir bereits auf **S.718** hergeleitet.

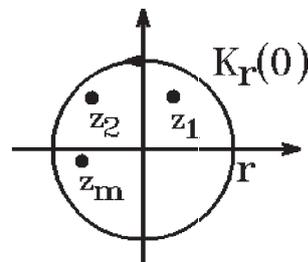
b) Ebenfalls nach **S.718** gilt:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(0)} F(z)z^{n-1} dz \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit Hilfe des Residuensatzes folgt hieraus

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res} (F(z)z^{n-1}, z_k).$$

Hierbei muß  $r$  so groß gewählt werden, daß alle Singularitäten im Inneren von  $K_r(0)$  liegen.



$f_0$  bestimmt man am einfachsten mit Hilfe des folgenden Grenzwertsatzes:

**Satz 17.6 :** *Grenzwertsatz*

Sei  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$  die Z-Transformierte von  $(f_n)$ . Dann gilt

a)  $f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)F(x)$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  existiert,  $(x \in \mathbb{R})$ .

*Beweis :*

$$a) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = f_0 + \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{z^{n-1}} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f_0,$$

$$da \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{z^{n-1}} = \lim_{w \rightarrow 0} w \sum_{n=1}^{\infty} f_n w^{n-1} = 0.$$

$$\text{b) } (x-1)F(x) = \left(\frac{1}{w} - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n = \frac{1}{w}(1-w) \sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n \quad \text{mit } x = \frac{1}{w}.$$

Es gilt

$$(1-w) \sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n}{\frac{1}{1-w}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n}{\sum_{n=0}^{\infty} w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \quad (\text{Division von Potenzreihen}).$$

Also muß gelten

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k w^k w^{n-k}\right) \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k\right) w^n \Rightarrow f_n = \sum_{k=0}^n b_k \quad (\text{Koeffizientenvergleich}) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \text{falls } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ existiert} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot 1^k = \lim_{w \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n &= \lim_{w \rightarrow 1^-} \frac{1}{w} (1-w) \sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)F(x). \end{aligned}$$

### Beispiel

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{z-1}, \quad \text{also } f_n = 1^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{vgl. Beispiel 2, S.718, für } a=1) \\ \Rightarrow f_0 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z-1} = 1 = 1^0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)F(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1^n). \end{aligned}$$

### Beispiele für inverse Z-Transformationen

$$1. \quad \text{Gegeben: } F(z) = \log \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1. \quad \text{Gesucht: } (f_n) = F^{-1}\left(\log \frac{z}{z-1}\right).$$

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = \log \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} = \log \frac{1}{1-z} = \log 1 - \log(1-z) = -\log(1-z),$$

$$\frac{d^n}{dz^n} F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{(n-1)!}{(1-z)^n}, \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^n}{dz^n} F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(1-z)^n} = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \log \frac{z}{z-1} = \log 1 = 0.$$

Also gilt für die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $f_n = \frac{1}{n}$ ,  $(n \geq 1)$ ,  $f_0 = 0$ :

$$F\left(\frac{1}{n}\right)(z) = \log \frac{z}{z-1} \quad , \quad |z| > 1 \quad , \quad f_0 = 0$$

Hieraus erhalten wir mit Eigenschaft d)

$$F\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)(z) = \log \frac{\frac{z}{-1}}{\frac{z}{-1} - 1} = \log \frac{z}{z+1} \quad , \quad \text{also}$$

$$F\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)(z) = \log \frac{z}{z+1} \quad , \quad |z| > 1 \quad , \quad f_0 = 0$$

2. *Gegeben:*  $F(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z-2)}$  . *Gesucht:*  $(f_n) = F^{-1}\left(\frac{z-1}{(z+1)(z-2)}\right)$  .

$F(z)$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{-1, 2\}$ , also gilt für  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} f_n &= \operatorname{Res} \left( \frac{(z-1)z^{n-1}}{(z+1)(z-2)}, -1 \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{(z-1)z^{n-1}}{(z+1)(z-2)}, 2 \right) \\ &= \frac{-2(-1)^{n-1}}{-3} + \frac{1(2)^{n-1}}{3} = \frac{2}{3}(-1)^{n-1} + \frac{2^{n-1}}{3} . \end{aligned}$$

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0 .$$

3. *Gegeben:*  $F(z) = \frac{z^2}{(z-a)^2}$  ,  $(a \in \mathcal{C} \setminus \{0\})$  . *Gesucht:*  $(f_n) = F^{-1}\left(\frac{z^2}{(z-a)^2}\right)$  .

$F(z)$  ist holomorph in  $\mathcal{C} \setminus \{a\}$ , also gilt für  $n \geq 1$  :

$$f_n = \operatorname{Res} \left( \frac{z^2 \cdot z^{n-1}}{(z-a)^2}, a \right) = \left( z^{n+1} \right)' \Big|_{z=a} = (n+1)a^n \quad , \quad (n \geq 1) .$$

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{(z-a)^2} = 1 .$$

### Anwendung: Lösung von Differenzgleichungen mit Hilfe der Z-Transformation

Bei der Beschreibung von "Elektrischen Netzwerken" treten *lineare Differenzgleichungen* auf. Diese Gleichungen lassen sich häufig mit Hilfe der Z-Transformation lösen.

#### Definition 17.7 : Lineare Differenzgleichungen

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $\mathcal{C}$ , seien  $a_i \in \mathcal{C}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = f_n$$

heißt *lineare (inhomogene) Differenzgleichung*  $k$ -ter Ordnung.

Gesucht ist eine Folge  $(y_n)$ , die diese Gleichung erfüllt.

## Beispiel

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^n \quad , \quad y_0 = 1 \quad , \quad y_1 = 0 \quad .$$

Dies ist eine lineare Differenzgleichung 2. Ordnung mit den zusätzlichen Anfangsbedingungen  $y_0 = 1$  ,  $y_1 = 0$ .

Wir wenden auf diese Differenzgleichung die Z-Transformation an. Dann erhalten wir mit Eigenschaft b) von Satz 17.4, **S.719** :

$$\begin{aligned} F(y_{n+2}) - 3F(y_{n+1}) + 2F(y_n) &= F(2^n) = \frac{z}{z-2} \\ \Rightarrow z^2(F(y_n) - y_0 - y_1 z^{-1}) - 3z(F(y_n) - y_0) + 2F(y_n) &= \frac{z}{z-2} \\ \Rightarrow (z^2 - 3z + 2)F(y_n) &= z^2 - 3z + \frac{z}{z-2} \\ \Rightarrow y_n &= F^{-1}\left(\frac{z(z-3)}{(z-1)(z-2)}\right) + F^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\right) \\ \Rightarrow y_n &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^n(z-3)}{(z-1)(z-2)}, 1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^n(z-3)}{(z-1)(z-2)}, 2\right) \\ &\quad + \operatorname{Res}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z-2)^2}, 1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z-2)^2}, 2\right) \\ &= \frac{-2}{-1} + \frac{2^n \cdot (-1)}{1} + \frac{1}{1} + \left(\frac{z^n}{z-1}\right)' \Big|_{z=2} = 3 - 2^n + \left(\frac{nz^{n-1}(z-1) - z^n}{(z-1)^2}\right) \Big|_{z=2} \\ &= 3 - 2^n + n2^{n-1} - 2^n = 3 - 2^{n+1} + n2^{n-1} \quad , \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

## Allgemeine Lösung einer linearen Differenzgleichung 2. Ordnung

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = f_n \quad , \quad a, b \in \mathcal{C} \quad , \quad \text{Anfangswerte } y_0, y_1 \text{ gegeben}$$

Anwendung der Z-Transformation ergibt:

$$\begin{aligned} F(y_{n+2}) + aF(y_{n+1}) + bF(y_n) &= F(f_n) \quad \Rightarrow \\ z^2(F(y_n) - y_0 - y_1 z^{-1}) + az(F(y_n) - y_0) + bF(y_n) &= F(f_n) \quad \Rightarrow \\ (z^2 + az + b)F(y_n) &= F(f_n) + (z^2 + az)y_0 + zy_1 \quad \Rightarrow \\ y_n &= F^{-1}\left(\frac{1}{z^2 + az + b} F(f_n)\right) + y_0 F^{-1}\left(\frac{z^2 + az}{z^2 + az + b}\right) + y_1 F^{-1}\left(\frac{z}{z^2 + az + b}\right). \end{aligned}$$

*1. Fall:*  $z_1 \neq z_2$  seien die Nullstellen von  $z^2 + az + b$ , also  $z^2 + az + b = (z - z_1)(z - z_2)$  ,  $z_1, z_2$  sind also *einfache Pole* von  $\frac{1}{z^2 + az + b}$  . Damit gilt

$$\begin{aligned} w_n &= F^{-1}\left(\frac{1}{z^2 + az + b}\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_2\right) \\ &= \frac{z_1^{n-1}}{z_1 - z_2} + \frac{z_2^{n-1}}{z_2 - z_1} = \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{z_1 - z_2} \quad , \quad n \geq 1 \quad , \quad w_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + az + b} = 0. \end{aligned}$$

Aus der Faltungseigenschaft folgt

$$\begin{aligned} F^{-1}\left(\frac{1}{z^2 + az + b} F(f_n)\right) &= F^{-1}(F(w_n) \cdot F(f_n)) = w_n * f_n = \sum_{l=0}^n w_l f_{n-l} \\ &= \sum_{l=2}^n w_l f_{n-l} \quad (\text{da } w_0 = w_1 = 0). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F^{-1}\left(\frac{1}{z^2 + az + b} F(f_n)\right) = \sum_{l=2}^n \frac{z_1^{l-1} - z_2^{l-1}}{z_1 - z_2} f_{n-l}.$$

Analog erhält man für  $n \geq 1$ :

$$F^{-1}\left(\frac{z^2 + az}{(z - z_1)(z - z_2)}\right) = \frac{z_1^n(z_1 + a)}{z_1 - z_2} + \frac{z_2^n(z_2 + a)}{z_2 - z_1} = \frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2} + a \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2},$$

$$F^{-1}\left(\frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)}\right) = \frac{z_1^n}{z_1 - z_2} + \frac{z_2^n}{z_2 - z_1} = \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$y_n = \sum_{l=2}^n \frac{z_1^{l-1} - z_2^{l-1}}{z_1 - z_2} f_{n-l} + \left(\frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2} + a \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}\right) y_0 + \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2} y_1, \quad n \geq 2.$$

*2. Fall*  $z_1$  sei zweifache Nullstelle von  $z^2 + az + b$ , also  $z^2 + az + b = (z - z_1)^2$ ,  $z_1$  ist also *doppelter Pol* von  $\frac{1}{z^2 + az + b}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} w_n &= F^{-1}\left(\frac{1}{z^2 + az + b}\right) = \text{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{(z - z_1)^2}, z_1\right) = \left(z^{n-1}\right)'_{|z=z_1} \\ &= \begin{cases} (n-1)z_1^{n-2} & , \text{falls } n \geq 2 \\ 0 & , \text{falls } n = 1 \end{cases}, \quad w_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(z - z_1)^2} = 0. \end{aligned}$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{(z - z_1)^2} F(f_n)\right) = w_n * f_n = \sum_{l=2}^n w_l f_{n-l} = \sum_{l=2}^n (l-1) z_1^{l-2} f_{n-l} \quad (\text{da } w_0 = w_1 = 0),$$

$$F^{-1}\left(\frac{z^2 + az}{z^2 + az + b}\right) = \left(z^{n+1} + az^n\right)'_{|z=z_1} = (n+1)z_1^n + naz_1^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

$$F^{-1}\left(\frac{z}{z^2 + az + b}\right) = \left(z^n\right)'_{|z=z_1} = nz_1^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$y_n = \sum_{l=2}^n (l-1) z_1^{l-2} f_{n-l} + \left((n+1)z_1^n + naz_1^{n-1}\right) y_0 + nz_1^{n-1} y_1, \quad n \geq 2.$$

**Bemerkung :**

Es gilt für  $z_1 \neq z_2$ :  $\frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2} = \sum_{l=0}^{n-1} z_1^l z_2^{n-1-l}$  (Beweis mit vollständiger Induktion).

Für  $z_1 = z_2$  erhalten wir für die rechte Seite:  $\sum_{l=0}^{n-1} z_1^l z_1^{n-1-l} = \sum_{l=0}^{n-1} z_1^{n-1} = nz_1^{n-1}$ .

Also geht das Ergebnis des 2.Falls aus dem Ergebnis des 1.Falls durch Grenzübergang  $z_2 \rightarrow z_1$  hervor.

## XVIII Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Beispiel** Ein unverfälschter Würfel werde einmal geworfen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine bestimmte Zahl, z.B. 5, zu werfen, gleich  $\frac{1}{6}$ . Denn bei diesem Experiment sind alle 6 Zahlen gleichwahrscheinlich.

Für dieses Experiment können wir folgendes *mathematische Modell* aufstellen:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ist der *Grundraum* aller *Elementarereignisse*,

z.B.:  $\omega = 4$  bedeutet, daß die Zahl 4 gewürfelt wird.

$P(\omega)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $\omega$  gewürfelt wird.

Für dieses Experiment gilt:  $P(\omega) = \frac{1}{6} \quad \forall \omega \in \Omega$ ; alle  $\omega \in \Omega$  sind *gleichverteilt*.

Es gilt:  $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ .

$\Omega$  heißt das *sichere Ereignis*.

Jede Teilmenge  $A \subset \Omega$  heißt *Ereignis*,

z.B.:  $A = \{2, 4, 6\}$  bedeutet: "Eine gerade Zahl wird gewürfelt",

$B = \{1, 6\}$  bedeutet: "1 oder 6 wird gewürfelt".

$P(A)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis  $A$  eintritt.

Es gilt:  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ ,

z.B.:  $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ .

Wir wollen nun allgemein definieren, was wir unter einem (zunächst diskretem) Wahrscheinlichkeitsraum verstehen wollen:

**Definition 18.1 :** *Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum*

$\Omega$  bestehe aus höchstens abzählbar vielen Elementen.  $\Omega$  heißt *Grundraum*.

$P : \Omega \rightarrow [0, 1]$  sei eine Funktion mit  $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ ,  $P$  heißt *Verteilung* in  $\Omega$ .

Ist  $A \subset \Omega$ , so ist  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis  $A$  eintritt.

$\Omega$  heißt *sicheres Ereignis*,  $\emptyset$  heißt *unmögliches Ereignis*,

$\omega \in \Omega$  heißt *Elementarereignis*.

Seien  $A, B \subset \Omega$ , dann bedeutet:

$A \cup B$  ist das Ereignis: "A oder B tritt ein",

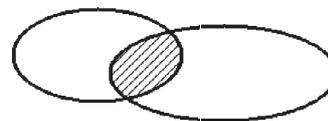
$A \cap B$  ist das Ereignis: "A und B tritt ein",  
 $\bar{A}$  ist das Ereignis: "A tritt nicht ein".

Es gelten folgende *Eigenschaften*

a)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  .

b)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  , falls  $A \cap B = \emptyset$  .

In diesem Fall heißen A und B *unvereinbar*.



c)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  .

d)  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  ist die *bedingte* Wahrscheinlichkeit.

$P(A|B)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis A eintritt unter der Bedingung, daß das Ereignis B eingetreten ist.

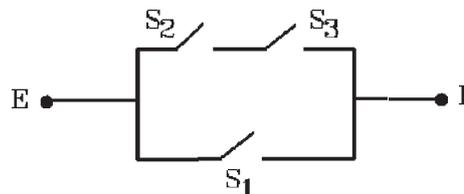
e)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  , falls  $P(A|B) = P(A)$  .

In diesem Fall heißen A und B *unabhängig*.

**Beispiel** *Schaltkreis*

Die Schalter  $S_i$  seien unabhängig voneinander offen oder geschlossen mit der Wahrscheinlichkeit

$P(S_i \text{ geschlossen}) = p_i$ .



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Strom von E nach F fließt ?

$A_i$  bedeute: "  $S_i$  geschlossen" ,

A bedeute: "Strom fließt von E nach F"

$\Rightarrow A = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$

$\Rightarrow P(A) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_3)) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$= P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p_1 + p_2p_3 - p_1p_2p_3$

(da alle Ereignisse unabhängig sind).

**Beispiel** *bedingte Wahrscheinlichkeit*

Zwei Karten werden nacheinander aus einem Skatenspiel gezogen.

B sei das Ereignis: "1. Karte ein As" , A sei das Ereignis: "2. Karte ein As".

$P(A|B)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die 2. Karte ein As ist, wenn auch schon die 1. Karte ein As war. Es gilt

$P(B) = \frac{4}{32}$  ,  $P(A \cap B) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31}$   $\Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31}}{\frac{4}{32}} = \frac{3}{31}$  .

Eigenschaft a) kann auch auf mehr als zwei Ereignisse ausgedehnt werden, z.B.:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

**Spezialfall: Gleichverteilung**

Sei  $\Omega$  endlich,  $P(\omega) = c \quad \forall \omega \in \Omega$  mit  $c \in [0, 1]$  fest.

In diesem Fall heißt  $\Omega$  *gleichverteilt*, und  $P$  heißt *Gleichverteilung*.

In diesem Fall gilt:

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = c \cdot |\Omega| = 1 \quad , \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = c \cdot |A|$$

mit  $|\Omega| =$  Anzahl der Elemente von  $\Omega$ ,  $|A| =$  Anzahl der Elemente von  $A$ .

Also gilt:  $c = \frac{1}{|\Omega|}$ ,  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ , also

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} \quad , \quad \text{falls } \Omega \text{ gleichverteilt ist}$$

**Beispiele**

1. Ein unverfälschter Würfel wird geworfen.

$A$  bedeute: "Eine gerade Zahl wird gewürfelt",

$B$  bedeute: "Eine 1 oder 6 wird gewürfelt",

$C$  bedeute: "Keine 6 wird gewürfelt"

$$\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad , \quad P(\omega) = \frac{1}{6} \quad \forall \omega \in \Omega .$$

$$A = \{2, 4, 6\} \quad , \quad B = \{1, 6\} \quad , \quad C = \overline{D} \quad \text{mit} \quad D = \{6\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad , \quad \text{denn} \quad A \cap B = \{6\} .$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} .$$

$$P(C) = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad , \quad \text{da} \quad P(D) = \frac{1}{6} .$$

2. Zwei unverfälschte Würfel werden geworfen.

$A$  bedeute: "Augensumme gleich 2" ;  $B$  bedeute: "Augensumme gleich 5"

$$\Rightarrow \Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 6)\}$$

$$\Rightarrow P(\omega) = \frac{1}{36} \quad \forall \omega \in \Omega \quad (\text{gleichverteilt}).$$

$$A = \{(1, 1)\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{36} .$$

$$B = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} .$$

3. Drei unterscheidbare Würfel werden geworfen.

$A$  bedeute: "Augensumme gleich 11" ;  $B$  bedeute: "Augensumme gleich 12" .

Frage:  $P(A) = P(B)$  ?

$$\Rightarrow \Omega = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), \dots, (6, 6, 6)\}$$

$$\Rightarrow P(\omega) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \quad \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \Omega \text{ ist gleichverteilt.}$$

Die Anzahl der *möglichen Fälle* (also mögliche Würfe) ist  $|\Omega| = 6^3 = 216$ .

Um  $P(A)$  und  $P(B)$  zu bestimmen, benötigen wir jeweils die Anzahl günstiger Fälle, also  $|A|$  und  $|B|$ .

Die Zahlen 11 und 12 können folgendermaßen in 3 Zahlen aus  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  zerlegt werden:

Zerl. von 11	Anz. Perm.
1, 5, 5	3
1, 4, 6	6
2, 3, 6	6
2, 4, 5	6
3, 3, 5	3
3, 4, 4	3

Zerl. von 12	Anz. Perm.
1, 5, 6	6
2, 4, 6	6
2, 5, 5	3
3, 3, 6	3
3, 4, 5	6
4, 4, 4	1

$$\Rightarrow |A| = 27 \qquad |B| = 25 \quad (\text{jeweils Summe der Permutationen})$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{27}{216} > P(B) = \frac{25}{216} .$$

Um möglichst einfach entscheiden zu können, wie viele Elemente eine Teilmenge  $A \subset \Omega$  besitzt, werden wir nun einige wichtige Formeln aus der *Kombinatorik* angeben:

### 1. Permutationen

a)  $n$  verschiedene Elemente

$n!$ Anzahl der Permutationen
-------------------------------

### Beispiel

$\{1, 2, 3\}$  .

Mögliche Permutationen:

$(1, 2, 3)$  ,  $(1, 3, 2)$  ,  $(2, 1, 3)$  ,  $(2, 3, 1)$  ,  $(3, 1, 2)$  ,  $(3, 2, 1)$

$$\Rightarrow 3! = 6 \text{ Permutationen.}$$

b)  $n$  Elemente, aber nur  $k$  *unterscheidbare* , also

$n_1$  viele der Sorte 1 ,  $n_2$  viele der Sorte 2 , ... ,  $n_k$  viele der Sorte  $k$

mit  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  .

Dann gilt

$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \text{ Anzahl der Permutationen}$
--

### Beispiel

$\{1, 1, 2\}$  .

Mögliche Permutationen:  $(1, 1, 2)$  ,  $(1, 2, 1)$  ,  $(2, 1, 1)$

$\Rightarrow \frac{3!}{2!1!} = 3$  Permutationen.

### 2. Kombinationen

Aus  $n$  Elementen sollen  $k$  Elemente ausgewählt werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es ?

Hierbei ist zu unterscheiden, ob

- a) mit oder ohne *Zurücklegung* gezogen wird, und ob
- b) die *Anordnung* (oder Reihenfolge) der gezogenen Elemente berücksichtigt werden soll oder nicht.

Dieses Experiment entspricht also einer *Stichprobe* vom Umfang  $k$  mit oder ohne Zurücklegung und mit oder ohne Anordnung.

In der folgenden Tabelle ist jeweils die Anzahl der Möglichkeiten aufgelistet.

In den beiden letzten Spalten sind die Ergebnisse für folgendes Beispiel aufgeführt:  
Gegeben:  $\{a, b, c\}$  , also  $n = 3$  ,  $k = 2$  Elemente werden ausgewählt.

Zurücklegung	Anordnug	Anzahl	Beispiel	Anzahl
mit	mit	$n^k$	$aa$ $ab$ $ac$ $ba$ $bb$ $bc$ $ca$ $cb$ $cc$	$3^2 = 9$
ohne	mit	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$ab$ $ac$ $ba$ $bc$ $ca$ $cb$	$\frac{3!}{1!} = 6$
mit	ohne	$\binom{n+k-1}{k}$	$aa$ $ab$ $ac$ $bb$ $bc$ $cc$	$\binom{4}{2} = 6$
ohne	ohne	$\binom{n}{k}$	$ab$ $ac$ $bc$	$\binom{3}{2} = 3$

## Beispiele

1. zu Fall 1.: mit Zurücklegung, mit Anordnung

Aus den Ziffern  $\{0, 1\}$  soll eine 10-stellige Dualzahl gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es ?

$$\Rightarrow n = 2, k = 10 \quad \Rightarrow \quad 2^{10} = 1024 \quad \text{Möglichkeiten.}$$

2. zu Fall 2.: ohne Zurücklegung, mit Anordnung

Aus den Ziffern  $\{1, 2, \dots, 9\}$  soll eine 5-stellige Zahl mit *verschiedenen* Ziffern gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es ?

$$\Rightarrow n = 9, k = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15120 \quad \text{Möglichkeiten.}$$

3. zu Fall 3.: mit Zurücklegung, ohne Anordnung

Wie viele verschiedene Würfe mit 3 *nicht unterscheidbaren* Würfeln sind möglich ?

$$\Rightarrow n = 6, k = 3 \quad \Rightarrow \quad \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56 \quad \text{Möglichkeiten.}$$

4. zu Fall 4.: ohne Zurücklegung, ohne Anordnung

Aus 49 Lottozahlen sollen 6 angekreuzt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es ?

$$\Rightarrow n = 49, k = 6 \quad \Rightarrow \quad \binom{49}{6} = 13\,983\,816 \quad \text{Möglichkeiten.}$$

### Beispiel *Wahrscheinlichkeit für Lottogewinn "6 aus 49"*

a) 6-Richtige:  $P(A) = \frac{1}{13\,983\,816} \approx \frac{1}{14 \text{ Mill.}}$

b) 5-Richtige plus Zusatzzahl

Es gibt  $\binom{6}{5} = 6$  viele Möglichkeiten, daß von den 6 gezogenen Zahlen 5 richtig sind

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{13\,983\,816}.$$

## Zufallsvariable , diskrete Verteilungen

Oft ist der Ausgang eines Zufallsexperiments mathematisch mit Hilfe einer Variablen, die verschiedene Werte annehmen kann, beschreibbar. Diese Variable heißt *Zufallsvariable* und wird mit  $X$  bezeichnet. In diesem Fall kann als Grundraum  $\Omega$  die Menge der Zahlen genommen werden, die die Zufallsvariable  $X$  annehmen kann.

### Beispiel

2 Würfel werden geworfen ,  $X \hat{=} \text{Augenzahl} \Rightarrow \Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$  .

In diesem Grundraum  $\Omega$  sind die Elementarereignisse  $\omega \in \Omega$  nicht mehr gleichverteilt, denn z.B.:  $P(2) = \frac{1}{36}$  ,  $P(3) = \frac{2}{36}$  , usw.

**Definition 18.2 :**

Sei  $X$  eine *Zufallsvariable*.

- a)  $P(X = a)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $X$  den Wert  $a$  annimmt.
- b)  $P(a \leq X \leq b)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $X$  Werte zwischen  $a$  und  $b$  annimmt.
- c)  $P(X \leq a)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $X$  Werte  $\leq a$  annimmt.

(analog  $P(a < X < b)$  ,  $P(a \leq X < b)$  ,  $P(X > a)$  , usw ).

Es gilt

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$$

Denn:  $A : "X \leq a" \Rightarrow \bar{A} : "X > a" \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

Wir werden nun anhand einfacher Beispiele einige wichtige *Verteilungen* behandeln:

**1. Hypergeometrische Verteilung**

*Gegeben:* Ein Sack mit  $r$  Kugeln, davon  $r_1$  *schwarze* und  $r_2 = r - r_1$  *rote* Kugeln.

$n$  Kugeln werden *ohne Zurücklegung* gezogen,

$X \hat{=}$  *Anzahl schwarzer gezogener Kugeln.*

*Gesucht:*  $P(X = k)$  mit  $0 \leq k \leq \min(n, r_1)$ .

Wir schreiben kurz:  $P(k)$  anstelle von  $P(X = k)$ .

*Mathematisches Modell :*

$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$  ,  $P(k) = ?$  für  $k \in \Omega$ .

Anzahl der möglichen Fälle:  $\binom{r}{n}$  , Anzahl der günstigen Fälle:  $\binom{r_1}{k} \binom{r_2}{n-k}$  .

Also gilt: *Hypergeometrische Verteilung*

$$P(k) = h(k, n, r, r_1) = \frac{\binom{r_1}{k} \binom{r - r_1}{n - k}}{\binom{r}{n}}$$

*Anwendung: Qualitätskontrolle*

$r$  produzierte Stücke , davon  $r_1$  Ausschußstücke.

Wir entnehmen eine *Stichprobe* vom Umfang  $n$ .

$\Rightarrow P(k) = h(k, n, r, r_1)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Stichprobe vom Umfang  $n$  genau  $k$  Ausschußstücke sind.

## 2. Binomialverteilung

*Gegeben:* Ein Sack mit  $r$  Kugeln, davon  $r_1$  schwarze und  $r_2 = r - r_1$  rote Kugeln.  $n$  Kugeln werden mit Zurücklegung gezogen,

$X \hat{=}$  Anzahl schwarzer gezogener Kugeln.

*Gesucht:*  $P(X = k)$  mit  $0 \leq k \leq n$ .

Wir schreiben kurz:  $P(k)$  anstelle von  $P(X = k)$ .

*Mathematisches Modell:*

$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$  ,  $P(k) = ?$  für  $k \in \Omega$ .

Die Wahrscheinlichkeit, bei *einem* Zug eine schwarze Kugel zu ziehen ist  $p = \frac{r_1}{r}$  , eine rote Kugel zu ziehen ist  $q = 1 - p$ .

Alle Züge sind voneinander unabhängig, da mit Zurücklegung gezogen wird.

Also gilt: *Binomialverteilung*

$$P(k) = b(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

### Beispiele

1. Ein Würfel wird 12 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zahl 6 mindestens 3 mal erscheint ?

$A_k \hat{=}$  "Die Zahl 6 erscheint genau  $k$  mal"

$\bar{A} \hat{=}$  "Die Zahl 6 erscheint mindestens 3 mal"

$\Rightarrow \bar{A} = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \Rightarrow P(\bar{A}) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$  .

$$P(A_k) = \binom{12}{k} p^k (1-p)^{12-k} \quad \text{mit } p = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = \sum_{k=0}^2 \binom{12}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k} = \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \sum_{k=0}^2 \binom{12}{k} \frac{1}{5^k} = \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \left(1 + \frac{12}{5} + \frac{66}{25}\right) = 0.677$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = P(X \geq 3) = 0.323.$$

2. Bei einer Klausur werden 12 Fragen gestellt. Bei jeder Frage sind 3 mögliche Antworten vorgegeben. Genau 1 Antwort ist jeweils richtig. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 5 Fragen richtig angekreuzt worden sind. Alle Studenten raten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Klausur bestanden wird ?

$r = 3$  Antworten,  $n = 12$  mal wird gezogen (geraten), alle Antworten sind gleichwahrscheinlich. Unter den 3 Antworten sind  $r_1 = 1$  richtige und  $r_2 = r - r_1 = 3 - 1 = 2$  falsche Antworten, also ist  $p = \frac{1}{3}$  ,  $q = 1 - p = \frac{2}{3}$ .

$A \hat{=}$  "Klausur bestanden"  $\hat{=}$   $k \geq 5$

$\Rightarrow P(A) = P(k \geq 5) = 1 - P(k \leq 4)$  mit

$$\begin{aligned}
P(k \leq 4) &= \sum_{k=0}^4 \binom{12}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{12-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \sum_{k=0}^4 \binom{12}{k} \frac{1}{2^k} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \left(1 + \frac{12}{2} + \frac{1}{4} \binom{12}{2} + \frac{1}{8} \binom{12}{3} + \frac{1}{16} \binom{12}{4}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \left(1 + 6 + \frac{33}{2} + \frac{55}{2} + \frac{495}{16}\right) = 0.63 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0.37.
\end{aligned}$$

Annäherung der *hypergeometrischen Verteilung* durch die *Binomialverteilung*

Ist die Gesamtzahl  $r$  sehr groß und  $n \ll r$ , so spielt es keine wesentliche Rolle, ob *mit* oder *ohne* Zurücklegung gezogen wird. Also kann in diesem Fall die *hypergeometrische Verteilung* durch die *Binomialverteilung* ersetzt werden:

$$h(k, n, r, r_1) \approx b(k, n, p) \quad \text{mit} \quad p = \frac{r_1}{r} \quad , \quad \text{falls } r \text{ sehr groß und } n \ll r$$

*Anwendung: Qualitätskontrolle*

$r$  produzierte Stücke, davon  $r_1$  Ausschußstücke.

Wir entnehmen eine *Stichprobe* vom Umfang  $n$ .

Ist  $r$  sehr groß und  $n \ll r$ , so gilt in diesem Fall

$P(k) = h(k, n, r, r_1) \approx b(k, n, \frac{r_1}{r})$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Stichprobe vom Umfang  $n$  genau  $k$  Ausschußstücke sind.

### 3. Poisson - Verteilung

Ist  $X$  binomialverteilt mit  $n$  und  $p$ , und ist  $n$  groß und  $p$  klein mit  $np = \lambda$ , so kann die Binomialverteilung näherungsweise durch die *Poisson - Verteilung* ersetzt werden.

Es gilt dann: *Poisson - Verteilung*

$$b(k, n, p) \approx p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , \quad np = \lambda$$

Denn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , \quad \text{falls} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda .$$

*Beweis :*

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= \underbrace{\frac{(np_n)^k}{k!}}_{\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}} \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{-k}}_{\rightarrow 1} \\
&\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für } n \rightarrow \infty .
\end{aligned}$$

### Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von 600 Personen genau 5 Personen am 1. Juli Geburtstag haben? Alle Tage sollen als Geburtstag gleichwahrscheinlich sein. Der 29. Februar soll nicht vorkommen.

$$\begin{aligned}\Rightarrow p &= \frac{1}{365}, \quad n = 600, \quad \lambda = np = \frac{600}{365} \\ \Rightarrow b(5, 600, \frac{1}{365}) &\approx p(5, \frac{600}{365}) = \frac{1}{5!} \left(\frac{600}{365}\right)^5 e^{-\frac{600}{365}} = 0.0193. \\ \text{Zum Vergleich: } b(5, 600, \frac{1}{365}) &= 0.0192.\end{aligned}$$

### Beispiel Qualitätskontrolle

Bei der Produktion von Blitzbirnen weiß man aus Erfahrung, daß 1% Ausschuß produziert wird. Zur Qualitätskontrolle entnimmt man bei einer Lieferung von 1000 Stück eine Stichprobe vom Umfang  $n = 10$  Stück.

Die Lieferung wird angenommen, falls höchstens 1 defektes Birnchen in der Stichprobe enthalten ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Lieferung angenommen wird?

$A \hat{=} \text{ "Lieferung wird angenommen" } \hat{=} k \leq 1,$   
 $r = 1000, \quad n = 10, \quad r_1 = 10$  (da 1% Ausschuß).

$$\begin{aligned}P(A) &= \sum_{k=0}^1 h(k, 10, 1000, 10) = h(0, 10, 1000, 10) + h(1, 10, 1000, 10) \\ &= \frac{\binom{10}{0} \binom{990}{10}}{\binom{1000}{10}} + \frac{\binom{10}{1} \binom{990}{9}}{\binom{1000}{10}} = 0.9961 \\ &\approx \sum_{k=0}^1 b(k, 10, 0.01) \quad (\text{da } r \text{ sehr groß, } n \ll r \text{ und } p = \frac{10}{1000} = 0.01) \\ &= b(0, 10, 0.01) + b(1, 10, 0.01) \\ &= \binom{10}{0} (0.01)^0 (1 - 0.01)^{10} + \binom{10}{1} (0.01)^1 (1 - 0.01)^9 = 0.9957 \\ &\approx \sum_{k=0}^1 p(k, 0.1) \quad (\text{da } \lambda = np = \frac{1}{10} = 0.1) \\ &= p(0, 0.1) + p(1, 0.1) = \frac{(0.1)^0}{0!} e^{-0.1} + \frac{(0.1)^1}{1!} e^{-0.1} = (1 + 0.1)e^{-0.1} = 0.9953 \\ &\approx F\left(\frac{1 - 0.1}{\sqrt{0.1(1 - 0.01)}}\right) = F(2.86) = 0.9979 \\ & \quad (\text{vgl. später, } \mu = np = 0.1, \quad \sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{0.1(1 - 0.01)}).\end{aligned}$$

### Erwartungswert, Varianz

Verteilungen werden durch 2 Maßzahlen charakterisiert:

**Definition 18.3 :** *Erwartungswert , Varianz*

Sei  $\Omega$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit der Verteilung  $P(k)$  ,  $k \in \Omega$ .

a)  $\mu := \sum_{k \in \Omega} kP(k)$  heißt *Erwartungswert* (Mittelwert).

b)  $\sigma^2 := \sum_{k \in \Omega} (k - \mu)^2 P(k)$  heißt *Varianz* (Streuung).

Für die Varianz gilt:  $\sigma^2 = \sum_{k \in \Omega} k^2 P(k) - \mu^2$  .

Denn:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{k \in \Omega} (k - \mu)^2 P(k) = \sum_{k \in \Omega} k^2 P(k) - 2\mu \sum_{k \in \Omega} kP(k) + \mu^2 \sum_{k \in \Omega} P(k) \\ &= \sum_{k \in \Omega} k^2 P(k) - 2\mu^2 + \mu^2 = \sum_{k \in \Omega} k^2 P(k) - \mu^2 , \end{aligned}$$

da  $\sum_{k \in \Omega} P(k) = P(\Omega) = 1$  und  $\sum_{k \in \Omega} kP(k) = \mu$  .

**Beispiel** *Binomialverteilung*

Es gilt

$\mu = np$ , $\sigma^2 = np(1 - p)$
-------------------------------------

*Beweis :*

Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-p)^{n-k} = (x + 1 - p)^n .$$

Differenzieren wir diese Gleichung mehrmals und multiplizieren nach jeder Differentiation beide Seiten mit  $x$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-p)^{n-k} &= n(x + 1 - p)^{n-1} \quad \Rightarrow \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-p)^{n-k} &= n x (x + 1 - p)^{n-1} . \\ (3) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^{k-1} (1-p)^{n-k} &= n \left( (x + 1 - p)^{n-1} + (n-1)x(x + 1 - p)^{n-2} \right) \quad \Rightarrow \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^k (1-p)^{n-k} &= n x (x + 1 - p)^{n-2} (x + 1 - p + (n-1)x) . \end{aligned}$$

Für  $x = p$  erhalten wir aus diesen Gleichungen (1),(2),(3) :

$$(1) \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 .$$

$$(2) \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k p^k (1-p)^{n-k} = np .$$

$$(3) \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 p^k (1-p)^{n-k} = np(1 + (n-1)p) = np + n(n-1)p^2 .$$

Damit erhalten wir für die Binomialverteilung :

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^n b(k, n, p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 ,$$

$$\mu = \sum_{k=0}^n k b(k, n, p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k p^k (1-p)^{n-k} = np ,$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n (k - \mu)^2 b(k, n, p) = \sum_{k=0}^n k^2 b(k, n, p) - \mu^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2 = np - np^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = np(1-p) .$$

## Stetige Verteilungen

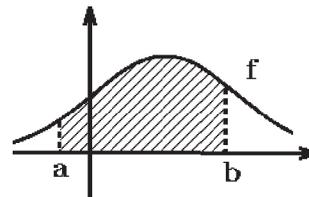
Kann die Zufallsvariable  $X$  alle Werte eines Intervalls aus  $\mathbb{R}$  annehmen (also  $\Omega$  ist nicht mehr abzählbar), so ist anstelle einer diskreten Verteilung eine *stetige Verteilung* zu wählen.

Bei einer diskreten Verteilung gilt:  $P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq k \leq b} P(k)$ .

Bei einer *stetigen Verteilung* geht die Summe in ein Integral über:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt ,$$

$f$  heißt *Dichtefunktion* der Verteilung.



Es muß gelten:

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 ,$$

$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$  und  $f$  integrierbar über  $\mathbb{R}$ .

Da  $\int_a^a f(t) dt = 0 \Rightarrow P(X = a) = 0$  bei einer stetigen Verteilung.

Analog zur diskreten Verteilung definieren wir den *Erwartungswert* und die *Varianz* :

**Definition 18.4 :** *Erwartungswert , Varianz*

Auf  $\Omega$  sei eine stetige Verteilung definiert mit der Dichtefunktion  $f$ .

a)  $\mu := \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt$  heißt *Erwartungswert*.

b)  $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 f(t) dt$  heißt *Varianz*.

Für die Varianz gilt:  $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - \mu^2$ .

Denn:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - 2\mu^2 + \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - \mu^2, \end{aligned}$$

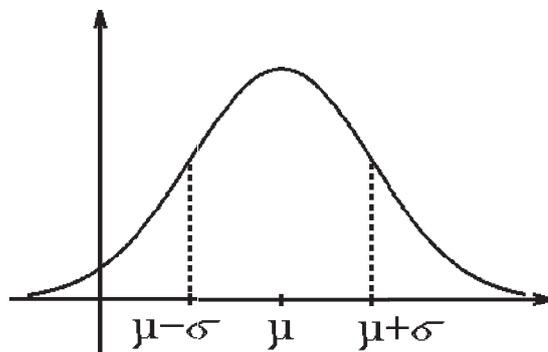
da  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \mu$ .

**Gaußsche Normalverteilung**

Die für die Anwendung wichtigste stetige Verteilung ist die *Gaußsche Normalverteilung* mit der Dichtefunktion

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

*Kurvenverlauf von  $f(t)$ : Gaußsche Glockenkurve*



**Satz 18.5 :** *Eigenschaften der Normalverteilungsdichtefunktion  $f$*

a)  $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} .$

b)  $P(-\infty < X < \infty) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = 1 .$

c)  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \mu \quad (\text{Erwartungswert}).$

d)  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \sigma^2 \quad (\text{Varianz}).$

e) Das Maximum von  $f$  liegt an der Stelle  $t_0 = \mu$ .

f) Die Wendepunkte von  $f$  liegen an den Stellen  $t_{1,2} = \mu \pm \sigma$ .

g)  $P(X \leq a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{mit}$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds$$

Also gilt für eine  $(\mu, \sigma)$ -normalverteilte Zufallsvariable  $X$  :

$$P(X \leq a) = F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

*Beweis :*

g)  $P(X \leq a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-s^2/2} ds = F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$   
 (Substitution  $s = \frac{t-\mu}{\sigma}$ ,  $ds = \frac{1}{\sigma} dt$ ) mit obiger Funktion  $F$ .

a)  $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , da e-Funktion  $> 0$ .

b) Nach dem Beweis zu g) gilt:

$$P(-\infty < X < \infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 \quad (\text{vgl. S.408}).$$

(Substitution  $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ ,  $dt = \frac{1}{\sqrt{2}} ds$ )

c) d) Nach b) gilt:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \sigma\sqrt{2\pi} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} .$

Wir differenzieren diese Gleichung 2-mal nach  $\mu$  (die Differentiation unter dem Integral ist erlaubt, da das Integral und die Ableitungsintegrale jeweils gleichmäßig konvergent sind). Wir erhalten dann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (*) \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Nochmalige Differentiation ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Da das letzte Integral  $= \sigma\sqrt{2\pi}$  ist, folgt hieraus

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \sigma^2.$$

Aus Gleichung (\*) folgt

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \mu \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \mu,$$

da das letzte Integral  $= \sigma\sqrt{2\pi}$  ist.

$$\text{e) f) } f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

$$f'(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( \frac{-(t-\mu)}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \mu.$$

$$f''(t) = \frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \left( 1 - \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow t - \mu = \pm\sigma \Leftrightarrow t = \mu \pm \sigma, \quad f''(\mu) < 0 \Rightarrow \text{Maximum.}$$

Nach g) gilt also für eine  $(\mu, \sigma)$ -normalverteilte Zufallsvariable  $X$ :

$$P(X \leq a) = F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

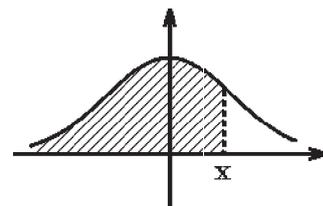
Hieraus folgt sofort

$$P(X > a) = 1 - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \quad P(a \leq X \leq b) = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Denn:  $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$ .

Zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten benötigt man also nur die Funktionswerte der Funktion  $F$  mit

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds$$



Da  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} ds = 1$ , und da der Integrand eine gerade Funktion ist, gilt:  $F(0) = \frac{1}{2}$ .

Damit gilt für  $x \geq 0$ :  $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-s^2/2} ds$ .

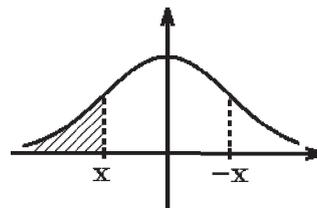
Die Werte dieses Integrals können z.B. mit Hilfe der Simpson-Formel (vgl. S.371) berechnet werden.

*Tabelle für die Funktionswerte  $F(x)$  für  $x \geq 0$ :*

$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$
0.00	0.50000	1.35	0.91149	2.70	0.99653
0.05	0.51994	1.40	0.91924	2.75	0.99702
0.10	0.53983	1.45	0.92647	2.80	0.99744
0.15	0.55962	1.50	0.93319	2.85	0.99781
0.20	0.57926	1.55	0.93943	2.90	0.99813
0.25	0.59871	1.60	0.94520	2.95	0.99841
0.30	0.61791	1.65	0.95053	3.00	0.99865
0.35	0.63683	1.70	0.95543	3.05	0.99886
0.40	0.65542	1.75	0.95994	3.10	0.99903
0.45	0.67364	1.80	0.96407	3.15	0.99918
0.50	0.69146	1.85	0.96784	3.20	0.99931
0.55	0.70884	1.90	0.97128	3.25	0.99942
0.60	0.72575	1.95	0.97441	3.30	0.99952
0.65	0.74215	2.00	0.97725	3.35	0.99960
0.70	0.75804	2.05	0.97982	3.40	0.99966
0.75	0.77337	2.10	0.98214	3.45	0.99972
0.80	0.78814	2.15	0.98422	3.50	0.99977
0.85	0.80234	2.20	0.98610	3.55	0.99981
0.90	0.81594	2.25	0.98778	3.60	0.99984
0.95	0.82894	2.30	0.98928	3.65	0.99987
1.00	0.84134	2.35	0.99061	3.70	0.99989
1.05	0.85314	2.40	0.99180	3.75	0.99991
1.10	0.86433	2.45	0.99286	3.80	0.99993
1.15	0.87493	2.50	0.99379	3.85	0.99994
1.20	0.88493	2.55	0.99461	3.90	0.99995
1.25	0.89435	2.60	0.99534	3.95	0.99996
1.30	0.90320	2.65	0.99598	4.00	0.99997

Für  $x < 0$  gilt:

$$F(x) = 1 - F(-x), \quad \text{falls } x < 0$$



## Beispiel

Bei der Produktion von Achsen weiß man aus Erfahrung, daß die Werte für den Durchmesser (Zufallsvariable  $X$ ) normalverteilt sind mit dem Erwartungswert  $\mu = 3$  cm und der Streuung  $\sigma = 0.2$  cm.

Die vorgegebenen Toleranzgrenzen sind  $3 \pm 0.5$  cm.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Ausschuß produziert wird ?

$A \hat{=}$  "Ausschuß" .

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(3 - 0.5 \leq X \leq 3 + 0.5) = 1 - P(2.5 \leq X \leq 3.5) \\ &= 1 - \left( F\left(\frac{3.5 - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{2.5 - \mu}{\sigma}\right) \right) = 1 - F\left(\frac{0.5}{0.2}\right) + F\left(-\frac{0.5}{0.2}\right) \\ &= 1 - F(2.5) + (1 - F(2.5)) = 2(1 - F(2.5)) = 2(1 - 0.9938) = 0.0124 . \end{aligned}$$

## Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Für große  $n$  gilt näherungsweise für die *Binomialverteilung*

$$P(X \leq a) = \sum_{k=0}^a b(k, n, p) \approx F\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Denn: Für die Binomialverteilung gilt:  $\mu = np$  ,  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$  (vgl. [S.737](#) ).

**Beispiel hierzu** (vgl. Beispiel [S.736](#) ).

Oft ist der Erwartungswert und/oder die Varianz einer Normalverteilung nicht bekannt. Man versucht dann ein *Konfidenzintervall* anzugeben, in dem mit "hoher" Wahrscheinlichkeit dieser gesuchte Wert liegt.

### Konfidenzintervall für den Erwartungswert $\mu$ (bei bekanntem $\sigma$ )

*Gesucht:*  $C(\bar{X}) = [\bar{X} - c, \bar{X} + c]$   $(1 - \alpha)\%$  (zweiseitiges) *Konfidenzintervall* für den Erwartungswert  $\mu$ .

D.h.: Es soll gelten:  $P(\mu \in C(\bar{X})) = 1 - \alpha$  ,  $\alpha$  vorgegeben.

Um  $C(\bar{X})$  zu bestimmen, entnimmt man eine *Stichprobe* vom Umfang  $n$  und berechnet

den *Mittelwert*  $\bar{X}$  :  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$  .

Ist jedes  $X_i$   $(\mu, \sigma)$ -normalverteilt, so gilt für den Mittelwert  $\bar{X}$  :

$$\bar{X} \text{ ist } \left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\text{-normalverteilt}$$

Denn:  $\bar{\mu} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu}{n}\right) = n\left(\frac{\mu}{n}\right) = \mu$  ,  $\bar{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma}{n}\right)^2 = n\left(\frac{\sigma}{n}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$  .

Nun gilt:  $\mu \in C(\bar{X}) \Leftrightarrow \bar{X} - c \leq \mu \leq \bar{X} + c \Leftrightarrow \mu - c \leq \bar{X} \leq \mu + c$ .

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} P(\mu \in C(\bar{X})) &= P(\mu - c \leq \bar{X} \leq \mu + c) = F\left(\frac{\mu + c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - F\left(\frac{\mu - c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= F\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) - F\left(-\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2F\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow F\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) &= 1 - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Sei  $u_{\alpha/2}$  der Wert, für den  $F(u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$  gilt, so folgt hieraus

$$\frac{c\sqrt{n}}{\sigma} = u_{\alpha/2} \Leftrightarrow c = \frac{u_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}.$$

Also ist

$$C(\bar{X}) = \left[ \bar{X} - \frac{u_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{u_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} \right], \text{ mit } F(u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$$

das  $(1 - \alpha)\%$  Konfidenzintervall für  $\mu$ .

Das Intervall wird kleiner, je größer der Umfang der Stichprobe ist.

### Beispiel

Bei der Produktion von Glühbirnen soll die Brenndauer getestet werden.

$\sigma = 120$  h sei bekannt. Man entnimmt eine Stichprobe vom Umfang  $n = 50$ .

Der Mittelwert der Brenndauer ergebe:  $\bar{X} = 1570$  h.

Gesucht: Ein 95% (zweiseitiges) Konfidenzintervall für den Erwartungswert  $\mu$ .

*Rechnung:*

$$\begin{aligned} 1 - \alpha = 0.95 &\Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \\ \Rightarrow u_{\alpha/2} = 1.96 &\text{ (aus der Tabelle für } F(x), \text{ denn } F(1.96) = 0.975) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$C(\bar{X}) = \left[ 1570 - \frac{1.96 \cdot 120}{\sqrt{50}}, 1570 + \frac{1.96 \cdot 120}{\sqrt{50}} \right] = [1536.7, 1603.3].$$

*Ergebnis:* Mit 95% Sicherheit liegt der Erwartungswert  $\mu$  zwischen 1536.7 h und 1603.3 h.

*Zusatz* Wie groß muß  $n$  (der Umfang der Stichprobe) gewählt werden, damit die Länge des Konfidenzintervalls höchstens 30 h beträgt?

$$\begin{aligned} \text{Lösung: Länge des Intervalls: } 2 \frac{u_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} &= 30 \\ \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{u_{\alpha/2} \sigma}{15} &\Rightarrow n = \left( \frac{1.96 \cdot 120}{15} \right)^2 = 245.86 \Rightarrow n = 246. \end{aligned}$$

Man kann auch Konfidenzintervalle für  $\mu$  bei unbekanntem  $\sigma$  und Konfidenzintervalle für  $\sigma$  bei bekanntem oder unbekanntem  $\mu$  bestimmen (vgl. Literatur über Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik).

# Inhalt

<b>0 Bezeichnungen</b>	1	Cauchy Produkt	110
		Unendliche komplexe Reihen	112
<b>I Reelle Zahlen, Polynome, Komplexe Zahlen</b>	2	<b>IV Elementare Funktionen, Potenzreihen</b>	114
Reelle Zahlen	2	Funktionen	114
Binomialkoeffizienten	4	Potenzreihen	117
Schwarzsche Ungleichung	8	Exponentialfunktion	121
Dualzahlen	10	Logarithmus-Funktion	122
Nullstellen von Polynomen	12	Komplexe e-Funktion	124
Horner Schema	14	Trigonometrische Funktionen	126
Komplexe Zahlen	16	Hyperbolische Funktionen	134
Partialbruchzerlegung	23		
<b>II Vektoren, Matrizen, Determinanten</b>	26	<b>V Grenzwerte, Stetigkeit, Differentialrechnung</b>	138
Vektoren	26	Grenzwerte bei Funktionen	138
Geraden	33	Stetigkeit	139
Ebenen	34	Folgen von Funktionen	143
Vektorprodukt	38	Reihen von Funktionen	146
Matrizen	42	Eigenschaften stetiger Funktionen	150
Koordinatentransformation	50	Differentialrechnung	153
Lineare Gleichungssysteme	52	Rechenregeln der Differential- rechnung	156
Determinanten	60	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	164
Cramersche Regel	65	Newton-Verfahren	168
Eigenwerte, Eigenvektoren	69	Höhere Ableitungen	170
Schmidtsches Orthonormalisierungs- Verfahren	78	Taylor-Polynom	171
Hauptachsentransformation	81	Taylorentwicklung	173
Kegelschnitte	81	Taylorreihe	173
Quadratische Formen	85	Division von Potenzreihen	177
<b>III Folgen, Reihen</b>	90	Kurvendiskussion	178
Reelle Zahlenfolgen	90	Regeln von de l' Hospital	187
Eulersche Zahl	94	Verallgemeinerte Produktregel	190
Intervallschachtelung	97	<b>VI Integralrechnung</b>	191
Komplexe Zahlenfolgen	98	Obersumme, Untersumme	191
Vektorfolgen	98	(Riemann) - Integral	193
Unendliche Reihen	100	Riemannsche Summe	194
Konvergenzkriterien	102		

Eigenschaften des Integrals	195	Folgen von Vektoren	256
Hauptsatz der Integralrechnung	198	Banachraum, Hilbertraum	257
Stammfunktion	199	Stetigkeit	258
Unbestimmtes Integral	199	Richtungsableitung	260
Integrationsregeln	200	Partielle Ableitung	261
Integration rationaler Funktionen	204	Gradient	262
Integration rat. Fkt. von		(total) differenzierbar	263
$\sin x$ und $\cos x$	207	Differentiation parameter-	
Integration komplexwertiger		abhängiger Integrale	266
Funktionen	207	Partielle Ableitungen höherer	
Mittelwertsatz der Integral-		Ordnung	269
rechnung	210	Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$	272
Integration von Funktionen-		Funktionalmatrix	273
Folgen und -Reihen	211	Divergenz	273
Uneigentliche Integrale	215	Kettenregel	274
Konvergenzkriterien	218	Polarkoordinaten	276
Gammafunktion	220	Zylinderkoordinaten	276
Integralkriterium für		Kugelkoordinaten	276
unendliche Reihen	222	Differentiation parameter-	
Bogenlänge ebener Kurven	223	abhängiger Integrale	278
		Mittelwertsatz	279
<b>VII Gewöhnliche</b>		Gebiet	280
<b>Differentialgleichungen</b>		Taylorentwicklung	282
<b>(Einführung)</b>	228	Implizite Funktionen	283
		Umkehrfunktion	287
Trennung der Variablen	231	Extrema ohne Nebenbedingungen	290
Lineare DGL n.-ter Ordg.	233	Extrema mit Nebenbedingungen	295
Fundamentalsystem	235		
Lineare DGL 1. Ordnung	236	<b>IX Orthonormalsysteme,</b>	
Lineare DGL n.-ter Ordnung		<b>Fourierreihen</b>	303
mit konstanten Koeff.	238		
Ansatz für partikuläre Lösung	243	Unitärer Raum	304
Superpositionsprinzip	246	Orthonormalsystem	306
Partikuläre Lösung mittels		Besselsche Ungleichung	307
Integral	249	Beste Approximation im	
		quadratischen Mittel	307
<b>VIII Differentialrechnung</b>		Fourierreihen	308
<b>für Funktionen von</b>		Parsevalsche Gleichung	309
<b>mehreren Variablen</b>	251	Konvergenzkriterium	311
		Gibbssches Phänomen	314
Höhenlinien	251	Komplexe Darstellung	318
Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$	254	Integration von Fourierreihen	320
Unitärer Raum	254	Fourierreihenansatz bei	
Normierter Vektorraum	254	Differentialgleichungen	322
Metrischer Raum	255	Delta-Distribution	324

Legendre-Polynome	325
Tschebyscheff-Polynome	328

## X Laplace-Transformation

	330
Originalfunktion	330
Eigenschaften der Laplace-Transformation	332
Grenzwertsätze	334
Delta-Distribution	337
Anwendung auf DGL	338
Faltung	341
Anwendung auf Integralgleichungen	343

## XI Einführung in die numerische Mathematik

	344
Fixpunktverfahren	344
Lipschitzkonstante	346
Fixpunktsatz	346
Berechnung von Nullstellen	349
Newton-Verfahren	349
Regula-falsi	355
Nichtlineares Gleichungssystem	356
Interpolation	359
Fehler	361
Newton-Darstellung	363
Newton-Schema	364
Hermite-Interpolation	365
Numerische Integration	367
Trapezformel	368
Simpsonformel	369
Zusammengesetzte Trapezformel	370
Zusammengesetzte Simpsonformel	371
Wahl der Schrittweite	373
Uneigentliche Integrale	376
Abschneidemethode	376
Numerische Differentiation	377
Differenzenverfahren	380

## XII Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

	381
(Riemann)-Integral	381
Integrale über Intervalle des $\mathbb{R}^2$	382
Integrale über Intervalle des $\mathbb{R}^n$	384
Beschränkte Mengen	385
(Riemann)-meßbar	387
Nullmengen	389
Kriterium für Meßbarkeit	391
Mittelwertsatz	392
Normalbereich	394
Prinzip des Cavalieri	399
Volumen eines Rotationskörpers	399
Substitution	401
Integral von $\exp(-x^2)$	407
Schwerpunkt	409
Trägheitsmoment	410
Uneigentliche Integrale	411

## XIII Vektoranalysis, Integralsätze

	417
Jordan-Kurve	417
Tangentenvektor	419
Glatte Kurve	421
Stückweise glatte Kurve	421
Bogenlänge	422
Vektorfeld	425
Divergenz	425
Rotation	426
Maxwellsche Gleichungen	429
Kurvenintegrale	430
Potentialfeld	432
Einfach zusammenhängendes Gebiet	433
Integrabilitätsbedingungen	434
Berechnung von Potentialen	435
Wegunabhängig	439
Solenoidale Vektorfelder	442
Flächen in $\mathbb{R}^3$	444
Glatte Flächen	444
Tangentialebene	447

Normalenvektor	447	Hermitesche DGL	511
Flächeninhalt	450	Legendresche DGL	513
Rotationskörper	451	Verallgemeinerter Potenz-	
Flächenintegral	453	reihenansatz	515
Fluß durch eine Fläche	454	Besselsche DGL	515
Integralsätze von		Besselfunktionen	517
Green	456	Neumannfunktionen	518
Stokes	459	Modifizierte Besselsche DGL	520
Gauß	460	Randwertaufgaben	521
Krummlinige orthogonale		Eigenwertaufgaben	522
Koordinaten	466	DGL-Systeme 1. Ordnung	523
Differentialoperatoren	468	Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung	525
- in Zylinderkoordinaten	471	Variation der Konstanten	527
- in Kugelkoordinaten	471	Spezieller Ansatz	530
Greensche Formeln	474	Fundamentalsystem	530
		DGL-System höherer Ordnung	535
Harmonische Funktionen	475	Numerische Verfahren	536
Greensche Darstellungsfomel	476	Euler-Cauchy-Verfahren	536
Gaußscher Mittelwertsatz	477	Verbessertes Euler-Cauchy-	
Dirichlet-Problem	478	Verfahren	538
		Runge-Kutta-Verfahren	539
<b>XIV Gewöhnliche Differen-</b>		<b>XV Partielle Differential-</b>	
<b>    tialgleichungen</b>	479	<b>    gleichungen</b>	544
Richtungsfeld	479	Quasilineare partielle DGL	
Lipschitzbedingung	481	1. Ordnung	544
Existenz- und Eindeutigkeitssatz		Lineare partielle DGL 2. Ordnung	549
von Picard-Lindelöf	481	Transformation auf Normalform	549
Verfahren von Picard-Lindelöf	482	Behandlung der Normalformen	552
Existenzsatz von Peano	483	Fouriermethode	552
$y' = f((ax + by + c)/(dx + ey + f))$	484	Wärmeleitungsgleichung	552
Lineare DGL 1. Ordnung	487	Produktansatz	553
Bernoullische DGL	489	Greensche Funktion	556
Riccatische DGL	489	Variation der Konstanten	557
Exakte DGL	490	Inhomogene Randbedingungen	558
Integrierender Faktor	491	Schwingungsgleichung	561
Clairautsche DGL	493	Methode von d'Alembert	565
Lineare DGL n-ter Ordnung	494	Mehrdimensionale Probleme	568
Wronski Determinante	495	Dirichlet Problem für	
Variation der Konstanten	497	Rechteck	573
Reduktion der Ordnung	499	Kreis	577
Eulersche DGL	503	Zylinder	581
Ansatz $y = uv$	506	Kugel	582
Substitution	507		
Potenzreihenansatz	509		

Anwendung der Laplace-Transformation auf partielle DGL	584	Identitätssatz für holomorphe Funktionen	675
Unendlich ausgedehnte Probleme	590	Laurent-Reihen	676
Fourier-Transformation	591	Isolierte Singularitäten	684
Umkehrformel	592	Nullstellen der Ordnung $p$	686
Eigenschaften der Fourier-Transformation	596	Regeln von de l' Hospital	686
Anwendung der Fourier-Transformation auf partielle DGL	599	Residuum	691
Differenzenverfahren	605	Residuensatz	695
		Berechnung reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes	696
<b>XVI Komplexe Funktionentheorie</b>	607	Berechnung der inversen Laplace-Transformation mit Hilfe des Residuensatzes	709
Kurven	609	Prinzip des Arguments	715
Gebiete	611	Satz von Rouché	716
Stetigkeit	612	<b>XVII Z-Transformation</b>	717
Gebrochen lineare Abbildungen	615	Z-Transformation	717
Potenzfunktion $z^n$	623	Faltung	719
Exponentialfunktion $e^z$	624	Eigenschaften	719
Differenzierbarkeit	627	Inverse Z-Transformation	721
Cauchy-Riemannsche DGL	629	Grenzwertsätze	722
Holomorphe Funktionen	630	Anwendung auf Differenzengleichungen	724
Harmonische Funktionen	631	<b>XVIII Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	727
Umkehrfunktionen	632	Grundraum, Ereignis	727
Logarithmusfunktion	636	Gleichverteilung	729
Allgemeine Potenzfunktion	637	Permutationen	730
Konforme Abbildungen	638	Kombinationen	731
Komplexe Kurvenintegrale	646	Zufallsvariable	732
Eigenschaften komplexer Kurvenintegrale	649	Diskrete Verteilungen	733
Cauchyscher Integralsatz	650	Hypergeometrische Verteilung	733
Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz	655	Binomialverteilung	734
Cauchysche Integralformel	657	Poisson-Verteilung	735
Poissonsche Integralformel	659	Erwartungswert, Varianz	736
Erweiterte Cauchysche Integralformeln	660	Stetige Verteilungen	738
Fundamentalsatz der Algebra	663	Gaußsche Normalverteilung	739
Stammfunktionen	665	Konfidenzintervall	743
Funktionsfolgen	667		
Kompakte Konvergenz	667		
Funktionsreihen	669		
Potenzreihen	671		



# Literatur

## Allgemeine Literatur

Brauch/Dreyer/Haacke: Mathematik für Ingenieure  
Burg/Haf/Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure (5 Bände)  
Habetha: Höhere Mathematik für Ingenieure und Physiker (3 Bände)  
Meyberg/Vachenauer: Höhere Mathematik (2 Bände)  
Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik (4 Bände)

## Zusätzliche Literatur zu speziellen Themen

### Lineare Algebra und Geometrie

Andrié/Meier: Lineare Algebra und analytische Geometrie  
Fischer: Lineare Algebra  
Jeger/Eckmann: Einführung in die vektorielle Geometrie und lineare Algebra für Ingenieure  
Zurmühl/Falk: Matrizen

### Analysis

Endl/Luh: Analysis (3 Bände)  
Forster: Analysis (3 Bände)  
Heuser: Lehrbuch der Analysis (2 Bände)

### Differentialgleichungen

Braun: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen  
Collatz: Differentialgleichungen  
Jänisch: Analysis für Physiker und Ingenieure  
Kamke: Differentialgleichungen  
Meinhold/Wagner: Partielle Differentialgleichungen

### Laplace Transformation

Doetsch: Laplace Transformation  
Henrici/Jeltsch: Komplexe Analysis für Ingenieure (2 Bände)  
Weber: Laplace Transformation

## **Numerische Mathematik**

Jordan-Engeln/Reutter: Numerische Mathematik für Ingenieure

Engeln-Müllges/Reutter: Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Pascal-Programmen

Törnig/Spellucci: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker (2 Bände)

Schwarz: Numerische Mathematik

Werner: Numerische Mathematik (2 Bände)

## **Komplexe Funktionentheorie**

Behnke/Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen

Henrici/Jeltsch: Komplexe Analysis für Ingenieure (2 Bände)

Jänisch: Einführung in die Funktionentheorie

## **Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik**

Heinhold/Gaede: Ingenieur Statistik

Kreyszig: Statistische Methoden und ihre Anwendungen

Krickeberg/Ziezold: Stochastische Methoden

## **Aufgabensammlungen**

Ayres: Matrizen, Diff. u. Integr.-Rechnung, Differentialgleichungen

Spiegel: Höhere Mathematik für Ing. u. Naturwiss., Einf. in die höhere Math., Komplexe Variable, Laplace Transformation, Fourier-Analysis, Vektoranalysis, usw

## **Formelsammlungen**

Abramowitz/Stegun: Handbook of Mathematical Functions

Bartsch: Mathematische Formeln

Bronstein/Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik

Stöcker: Taschenbuch Math. Formeln u. moderner Verfahren

# Sachverzeichnis

- A**bbildung 272
  - gebrochen lineare 615
  - konforme 638
  - lineare 46
- abelsche Gruppe 3
- abgeschlossene Hülle 390
- abgeschlossene Menge 256
- Ableitung 153
  - einseitige 155
  - elementarer Funktionen (Tabelle) 161-163
  - höhere 170
  - komplexe 627
  - partielle 261
  - partielle höherer Ordnung 269
  - Umkehrfunktion 156
- Abschneidemethode 376
- Absoluter Betrag 7
- Abstand 21,255,303
  - Funktionen 303
  - komplexe Zahlen 21
  - Vektoren 255
- Ähnlichkeitssatz 332
- Amplitude 131
- Anfangsbedingung 229
- Anfangswertaufgabe 479
- Approximation im quadratischen Mittel 306,307
- arithmetisches Mittel 8,9
- Assoziativität 3,28
- Asymptote 183
- asymptotisches
  - Verhalten 183,230
- Axiom 3
  - Archimedisches 3
  - Vollständigkeits- 3
- B**anachraum 257
- Basis 32,58
  - natürliche 33
- Bernoullische DGL 489
- Bernoullische Ungleichung 7
- beschränkte Menge 385
- Besselfunktion 517-519,572
- Besselsche DGL 517
  - modifizierte 520
- Besselsche Ungleichung 307
- Betrag eines Vektors 29
- bijektiv 114
- Binomial-Verteilung 734
- Binomialkoeffizient 4
  - verallgemeinerter 5
- Binomischer Lehrsatz 6
- Bogenlänge 223,422
- Bogenmaß 18,19
- C**auchy-Produkt 110
- Cauchy-Riemannsche DGL 629
- Cauchysche Integralformel 657
  - erweiterte 660
- Cauchysche Konvergenz 95
- Cauchysche Ungleichung 663
- Cauchyscher Integralsatz 650
- Cavalieri 399
- charakteristisches System 544
- Clairautsche DGL 493
- Cosinussatz 30
- Cramersche Regel 65
- D**ämpfungssatz 332
- Definitionsbereich 114
- Determinante 60
  - Entwicklung einer- 63
- diagonalisierbar 73
- diagonalähnlich 73
- Dichtefunktion 738,739
- Differentialgleichung
  - Ansatz  $y(x) = u(x)v(x)$  506
  - Bernoullische 489
  - Besselsche 515
  - Clairautsche 493
  - Eulersche 503

- Differentialgleichung
  - exakte 490
  - exakte durch integrierenden Faktor 491,548
  - explizite 1.ter Ordnung 479
  - Fourierreihenansatz 322
  - gewöhnliche 229
  - Hermitesche 511
  - homogene 233,494
  - inhomogene 233,494
  - Legendresche 513
  - linear homogene 233,494
  - linear inhomogene 233,494
  - lineare 1.ter Ordnung 236,487
  - lineare 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 242
  - lineare n-ter Ordnung 233,494
  - lineare n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 233,238
  - Normalform einer linearen- 494
  - Ordnung 229
  - partikuläre Lösung 233,236,243
  - Potenzreihenansatz 509
  - Riccatische 489
  - Substitution  $t = \varphi(x)$  507
  - verallgemeinerter Potenzreihenansatz 515
- Differentialgleichungssystem
  - 1.ter Ordnung 523
  - höherer Ordnung 535
  - linear 1.ter Ordnung 525
- Differentialoperatoren
  - in krummlinigen orthogonalen Koordinaten 468
- Differentiation
  - numerische 377
- Differenzen k-ter Ordnung 719
- Differenzenverfahren 380,605
- differenzierbar 153,263,272
  - einseitig 153
  - Funktionsfolge 158
  - Funktionsreihe 159
  - komplex- 627
  - n-mal 170
- differenzierbar 153,263,272
  - n-mal stetig- 270
  - stetig 158,170
  - Potenzreihe 161
- Dimension 32,58
- Dirichlet Problem 478,573,660
  - für Kreis 577,660
- Dirichlet Problem 478,573,660
  - für Kugel 582
  - für Rechteck 573
  - für Zylinder 581
- Distribution 324,337
- Distributivität 3,28
- Divergenz 273,425
- Drehmoment 40
- Drehstreckung 614
- Drehung 47
- Dreiecksungleichung 8,9,17,29,305
  - verallgemeinerte 9
- Dualzahlen 10
- E**bene 34
  - Abstand eines Punktes zur- 37
  - Abstand zum Nullpunkt 36
  - drei-Punkte-Form 35
  - Hessesche Normalform 35
  - lineare Form 35
  - Normale 35,39
  - Parameterdarstellung 34
- Eigenfunktion 522
- Eigenraum 69
- Eigenvektor 69
- Eigenwert 69,522
  - Vielfachheit 73
- Eigenwertaufgabe 522
- einfach zusammenhängend 433,611
- Einheitsmatrix 44
- Einheitstetraeder 397
- Einhüllende 493
- Einschaltvorgang 229
- Elementarereignis 727
- Eliminationsverfahren 52
- Ellipse 81,83
- elliptische partielle DGL 550

Entwicklungssatz 41  
 Ereignis 727  
   –sicheres 727  
   –unabhängiges 728  
   –unmögliches 727  
 Erwartungswert 737,739  
 Euklidische Norm 254  
 Euler-Cauchy-Verfahren 536  
   –verbessertes 538  
 Eulersche DGL 503  
 Eulersche Zahl 94  
 Exakte DGL 490,491,548  
 Existenzsatz von Peano 483  
 Existenz- und Eindeutigkeits-  
   Satz 234,481,525,527  
 Exponentialfunktion 121,125  
   –komplexe 124,624,635  
 Extremum  
   –absolutes 152,298,664  
   –bei Funktionen mehrerer  
     Variabler 290  
   –hinreichende Bedingung 180,291  
   –mit Nebenbedingungen 295  
   –notwendige Bedingung 164,290  
   –relatives 164

**F**akultät 4  
 Faltung 341,595,719  
 Faltungseigenschaft 341,596,719  
 Federschwingung 228  
 Fehlerabschätzung 107  
 Fehlerrechnung 280  
 Fixpunkt 344  
 Fixpunktsatz 346  
 Fixpunktverfahren 344  
 Fläche  
   –glatte 444  
   –Parameterdarstellung 444  
 Flächenberechnung 209  
 Flächenelement 450  
 Flächeninhalt 450  
 Flächenintegral 453  
 Fluß durch eine Fläche 454

Folge  
   –beschränkte 91  
   –komplexer Zahlen 98  
   –monotone 91  
   –reeller Zahlen 90  
   –von Vektoren 98,256  
 Fourier-Transformation 591,703  
   –Anwendung auf partielle DGL 509  
   –Eigenschaften 596  
   –Faltung 595  
   –Faltungseigenschaft 596  
   –Umkehrformel 592  
   –Zusammenhang zu Laplace-  
     Transformation 605  
 Fourierkoeffizient 309  
 Fouriermethode 552,556  
 Fourierreihe 308  
   –komplexe 318  
 Fourierreihenansatz bei DGL 322  
 Frequenz 131  
 Fundamentalsatz der Algebra 22,663  
 Fundamentalsystem 235,527,530  
 Funktion  
   –arccos- 132,637  
   –arccot- 132  
   –arcosh- 135  
   –arcoth- 135  
   –arcsin- 132,637  
   –arctan- 132  
   –arsinh- 135  
   –artanh- 135  
   –charakteristische 386  
   –cos- 18,126,612,626  
   –cosh- 134,627  
   –cot- 131  
   –coth- 134  
   –Definitionsbereich 114  
   –Exponential- 121,125,624  
   –gerade 183  
   –harmonische 475-477,631  
   –implizite 283  
   –Logarithmus- 122,125,635  
   –n-mal stetig differenzierbare 170  
   –Potenz- 637

- Funktion
  - rationale 116
  - sin- 18,126,613,626
  - sinh- 134,627
  - Symmetrie 183
  - tan- 18,131
  - tanh- 134
  - ungerade 183
  - Wertebereich 114
  - zusammengesetzte 114
- Funktionalmatrix 273
- Funktionenfolge 143,158,667
  - Differentiation einer 158
  - Integration einer 211
- Funktionenreihe 146,159,669
  - Differentiation einer 159
  - Integration einer 211
- G**ammafunktion 220
- Gauß-Klammer 7
- Gaußsche Normalverteilung 739
- Gaußsche Zahlenebene 16
- Gaußscher Mittelwertsatz 477
- Gaußscher Integralsatz 460
- Gaußsches Eliminationsverfahren 52
- Gebiet 280,611
  - einfach zusammenhängendes 433,611
- gebrochen lineare Abbildung 615
- geometrische Reihe 101
- geometrisches Mittel 8,9
- Gerade 33
  - Abstand eines Punktes zur- 39
  - Parameterdarstellung 33
  - Richtungsvektor 33
- Gibbssches Phänomen 314
- glatte Kurve 421,610
  - stückweise- 421,610
- Gleichungssystem
  - lineares 52
  - nichtlineares 356
- gleichverteilt 729
- Gradient 262,264
- Gradientenfeld 432
- Greensche Darstellungsformel 476
- Greensche Formeln 474,476
- Greensche Funktion 556
- Greenscher Bereich 457
- Greenscher Integralsatz 456
- Grenzwert
  - einer Funktion 138
  - einer Zahlenfolge 90
  - einseitiger 138
  - uneigentlicher 139
- Grenzwertsätze 334,722
- Grundraum 727
- H**armonische Funktion 475-477,631
- harmonische Reihe 101
- Hauptachsentransformation 81
- Hauptunterdeterminante 87,291
- Hauptvektor 531
- Hermite-Interpolation 365
- Hermitesche DGL 511
- Hermitesche Polynome 513
- Hilbertraum 257
- Höhenlinien 251
- holomorph 630
- Horner Schema 14
- Hyperbel 81,83
- hyperbolische Funktionen 134
  - komplexe 136,627
- hyperbolische partielle DGL 550,561
- Hyperebene 389
- hypergeometrische Verteilung 733
- I**dentität von Lagrange 41
- Identitätssatz
  - für holomorphe Funktionen 675
  - für Potenzreihen 672
- implizite Funktion 283
- indefinit 86,88,290
- Induktionsgesetz 40
- Infimum 92
- injektiv 114
- innerer Punkt 256,390
- Inneres einer Menge 390
- Integrabilitätsbedingungen 434

Integral 193  
   –bestimmtes 200  
   –Eigenschaften 195  
   –iteriertes 382,384  
   –komplexes 646  
   –parameterabhängiges 266,278  
   –unbestimmtes 199  
   –uneigentlich mehrdimensionales 411  
   –uneigentliches 215  
 Integralberechnung  
   –mit Hilfe des Residuensatzes 696-708  
 Integralgleichung 343  
 Integralkriterium 222  
 Integralrechnung  
   –Hauptsatz 198  
   –Mittelwertsatz 210,392  
 Integration  
   –komplexwertiger Funktionen 207  
   –numerische 367  
   –von Funktionenfolgen 211  
   –von Funktionenreihen 211  
 integrierbar 193,381,386  
 Interpolation 359  
   –Hermite- 365  
   –nach Lagrange 359  
   –nach Newton 363  
 Intervallschachtelung 97  
 Isoklinen 480  
 Isolierte Singularität 684  
  
**J**acobi-Matrix 273  
 Jordan-Kurve 417,610  
  
**K**egelschnitt 81  
 Kettenregel 156,274  
 Koeffizientenmatrix 52  
 Koeffizientenvergleich 24  
 Kombination 731  
 Kommutativität 3,28  
 kompakt konvergent 667,669  
 kompakte Menge 298  
  
 komplexe Zahl 16  
   –Argument 18  
   –Betrag 17  
   –Imaginärteil 16  
   –konjugiert 17  
   –Polarkoordinatendarstellung 18  
   –Realteil 16  
   –Wurzel einer 21  
 Konfidenzintervall 743  
 konform 639  
   –global 639  
   –lokal 639  
 konforme Abbildung 638  
 konkav 181  
 Konvergenz 90  
   –absolute 104  
   –Cauchy- 95  
   –einer Zahlenfolge 90  
   –gleichmäßige 143,267,304,306  
   –im quadratischen Mittel 306  
   –kompakte 667,669  
   –koordinatenweise 256  
   –punktweise 143  
   –quadratische 352  
   –uneigentliche 91  
 Konvergenzkriterium  
   –für gleichmäßige Konvergenz von Integralen 267  
   –für Reihen 102  
   –für uneigentliche Integrale 218  
 Konvergenzradius 118  
 konvex 181  
 Koordinaten 27  
   –krümmenlinig orthogonale 466  
 Koordinatenlinien 252  
 Koordinatentransformation 50,401  
 Körper  
   –angeordneter 3  
 Kreisverwandtschaft 617  
 Kubischer Spline 366  
 Kugelkoordinaten 276,289,406,468,471

- Kurve 223,417,609
  - geschlossene 417,610
  - glatte 421,610
  - Länge einer 422,610
  - Parameterdarstellung 225,417
  - Polarkoordinatenform 227,422
  - positiv orientiert 441,610
  - stückweise glatt 421,610
- Kurvendiskussion 178
- Kurvenintegral 430,646
  - wegunabhängiges 439,655
- L**agrange-Parameter 295
- Längenelement 455
- Laplace-Operator 276,426
  - in Kugelkoordinaten 277
  - in Polarkoordinaten 276
  - in Zylinderkoordinaten 276
- Laplace-Transformation 330
  - Ähnlichkeitssatz 332
  - Anwendung auf gewöhnliche DGL 338
  - Anwendung auf Integralgleichungen 343
  - Anwendung auf partielle DGL 584
  - Berechnung der Inversen mit Hilfe des Residuensatzes 710
  - Dämpfungssatz 332
  - Eigenschaften 332
  - Faltungseigenschaft 341
  - komplexe Umkehrformel 709
- Laurent-Reihe 676,677
- Legendre-Polynome 325,515
- Legendresche DGL 513
- Leibniz-Kriterium 108
- linear abhängig 31,32
  - Funktionen 234
- linear unabhängig 31,32
  - Funktionen 234
- lineare Abbildung 46
- lineares Gleichungssystem 52
  - homogen 58
  - inhomogen 58
  - komplexes 59
- Linearität 29
- Linearkombination 32
- Lipschitzbedingung 346,481,524
- Lipschitzkonstante 346
- Logarithmische Darstellung 124
- Logarithmusfunktion 122,125,635
- Lösungsmenge 52
  - Dimension 58
- Lotfußpunkt 37,39
- M**ajorantenkriterium 103,106
  - für gleichmäßige Konvergenz 147
  - für uneigentliche Integrale 218
- mathematisches Pendel 40,228
- Matrix 42
  - charakteristisches Polynom 70
  - diagonalisierbar 73
  - hermitesche 49
  - inverse 45
  - komplexe 49,59,68
  - Kondition 56
  - orthogonale 43,64
  - Rang 46,53
  - reguläre 45
  - singuläre 45
  - symmetrische 49
  - transponierte 43
  - unitäre 49
- Maximum 152,290
- Maximumprinzip 477,664
- Maxwellsche Gleichungen 429
- Menge
  - abgeschlossene 256
  - abzählbare 115
  - beschränkte 385
  - Inneres 390
  - kompakte 298
  - meßbare 387,391
  - offene 256
  - Rand 390
  - sternförmige 442
  - unendliche 115
- meßbare Menge 387,391
- Methode von d’Alembert 565
- Metrik 255

Metrischer Raum 255  
 Minimum 152,290  
 Mittelwertsatz 165,279  
   –der Integralrechnung 210,392  
   –erweiterter 187,392  
 monoton 121,166  
   –fallend 121,166  
   –wachsend 121,166  
 Multiplikatorenregel von Lagrange 295  
  
**N**abla-Operator 426  
 negativ definit 86,88,290  
 Neumann-Funktion 518  
 Newton-Schema 364  
 Newton-Verfahren 168,349,350,356  
 Norm 29,254,303  
   –Euklidische 254  
   –unendlich 303  
   –eines Vektors 29  
 Normalbereich 394,397  
 Normale 35,39,447  
 Normalenvektor 447  
 normierter Vektorraum 254,303  
 Nullfolge 91  
 Nullmenge 389  
 Nullstelle der Ordnung  $n$  23,182,686  
 Nullstellenmenge 13  
 numerische Differentiation 377  
 numerische Integration 367  
  
**O**bersumme 191,381  
 offene Menge 256  
 Ordnungsrelation 3  
 Originalfunktion 330  
 Orthonormalsystem 49,306  
   –vollständiges 309  
 Ortsvektor 33  
  
**P**arabel 81,83  
 parabolische partielle DGL 550,552  
 Parallelepiped 39  
 Parameterdarstellung 33,34  
 Parsevalsche Gleichung 309  
  
 Partialbruchzerlegung 23,689  
 Partialsummenfolge 101  
 partielle Ableitung 261  
 partielle Differentialgleichung  
   –Differenzenverfahren 605  
   –elliptische 550  
   –Fourier-Transformation 599  
   –Fouriermethode 552  
   –hyperbolische 550,561  
   –inhomogene Randbedingungen 558  
   –Laplace-Transformation 584  
   –lineare 2.ter Ordnung 549  
   –mehrdimensionale Probleme 568  
   –Methode von d’Alembert 565  
   –parabolische 550,552  
   –Produktansatz 553  
   –quasilineare 1.ter Ordnung 544  
   –Separationsansatz 553  
   –Transformation auf Normalform 549  
 partielle Integration 200  
 partikuläre Lösung 233  
   –Ansatz 243  
   –mit Integralfunktion 249  
 Pascalsches Dreieck 5  
 Peano-Satz 483  
 Pendel 40,228  
 Permutation 730  
 Phasenverschiebung 131  
 Picard-Lindelöf  
   –Satz 481  
   –Verfahren 482  
 Pivotelement 53  
 Poissonsche Integralformel 659  
 Poissonsche Verteilung 735  
 Pol der Ordnung  $n$  685,687  
 Polarkoordinaten 276,288,403  
 Polynom 12  
   –Nullstellen 12  
   –von mehreren Variablen 281  
 positiv definit 86,88,290  
 positiv orientierte Kurve 441,610  
 Potential 432,435  
 Potentialfeld 432,434

- Potentialgleichung 589,604  
 Potenzfunktion 623,637  
 Potenzreihe 117,148,160,671,672  
 –Division 177  
 –Identitätssatz 672  
 –komplexe 120  
 –Multiplikation 111,177  
 –von  $(1+x)^a$  174  
 –von  $\operatorname{artanh} x$  176  
 –von  $\ln x$  167,174  
 Potenzreihenansatz 509  
 –verallgemeinerter 515  
 Prinzip des Arguments 715  
 Prinzip des Cavalieri 399  
 Produktregel 156  
 –verallgemeinerte 190  
 Projektion eines Vektors 31
- Q**uadratische Form 82,85,290,299  
 –Extrema 88  
 –indefinit 86,88  
 –negativ definit 86,88  
 –positiv definit 86,88  
 quasilineare partielle DGL 1.ter  
 Ordnung 544  
 Quelle 426  
 quellenfreies Feld 426,443  
 Quotientenkriterium 103  
 Quotientenregel 156
- R**and einer Menge 390  
 Randbedingung 230,521,552,558  
 Randpunkt 390  
 Randwertaufgabe 521  
 Rang einer Matrix 46,53  
 Reduktion der Ordnung 499  
 Regeln von de l' Hospital 187,686  
 Regula falsi 355  
 Reihe 100  
 –alternierende 108  
 –geometrische 101  
 –harmonische 101  
 –komplexe 112
- Reihenschwingkreis 229  
 Residuensatz 695  
 Residuum 691  
 –für einfachen Pol 692,693  
 –für mehrfachen Pol 692  
 Resonanz 243  
 Riccatische DGL 489  
 Richtungsableitung 260  
 Richtungsfeld 479  
 Richtungsvektor 33  
 Riemann-Integral 193,381,386  
 Riemann-Stieltjes-Summe 646  
 Riemannsche Fläche 635,636  
 Riemannsche Summe 194  
 Riemannscher Abbildungssatz 643  
 Rotation 426  
 Rotationskörper  
 –Mantelfläche 451  
 –Volumen 400  
 Runge-Kutta-Verfahren 539
- S**attelpunkt 291  
 Satz von  
 –Gauß 460  
 –Green 456  
 –Liouville 663  
 –Peano 483  
 –Picard-Lindelöf 481  
 –Rolle 165  
 –Rouché 716  
 –Steiner 411  
 –Stokes 459  
 Schmidtsches Orthonormalisierungs-  
 Verfahren 78,325  
 Schnittpunkte von Ebenen 38  
 Schraubenlinie 418  
 Schrittweitenkontrolle 373,540  
 Schrittweitenwahl 373,540  
 Schwarzsche Ungleichung 8,29,254,305  
 Schwerpunkt 409  
 Schwingungsdauer 131  
 Schwingungsgleichung 561,569  
 Senke 426

Simpsonformel 369  
   –zusammengesetzte 371  
 Singularität 684  
   –hebbare 685  
   –isolierte 685  
   –Pol 685  
   –wesentliche 685  
 Skalarprodukt 29,44,254,304  
 solenoidal 442  
 Spat 39  
   –Inhalt 39,67  
 Spatprodukt 41  
 Spiegelung 48  
 Sprungstelle 141  
 Stammfunktion 199  
   –(Tabelle) 202 ff  
   –komplex 665  
 Steinerscher Satz 411  
 sternförmig 442  
 stetig ergänzbar 140  
 Stetigkeit 139,141,258,272,613  
   –einseitige 140  
   –partielle 259  
 Stokesscher Integralsatz 459  
 streckentreu 638  
 Stützstelle 359  
 Stützwert 359  
 Substitution 201,401  
 Superpositionsprinzip 246  
 Supremum 92  
 surjektiv 114  
 Symmetrie einer Funktion 183

**T**angente 153,419  
 Tangentenvektor 419  
 Tangentialebene 447  
 Taylor-Polynom 171,282  
 Taylorentwicklung 173,282  
 Taylorreihe 173  
 Teilfolge 92  
 Tetraeder 397,399  
 total differenzierbar 263  
 Trägheitsmoment 40,410  
 Translation 614

Trapezformel 368  
   –zusammengesetzte 370  
 Trennung der Variablen 231,484  
 Trigonometrische  
   Funktionen 18,126,612,626  
   –komplexe 136,626  
 Tschebyscheff-Polynome 328

**U**mgebung 256  
 umkehrbar  
   –lokal 287,632  
   –global 633  
 Umkehrfunktion 114,152,287,632  
   –global 633  
   –lokal 632  
 unendliche Reihe 100  
 Ungleichungen  
   –Bernoullische- 7  
   –Besselsche- 307  
   –Dreiecks- 8,9,17,29,305  
   –Rechenregeln 7  
   –Schwarzsche- 8,29,254,305  
 unitärer Raum 254,304  
 Untersumme 191,381

**V**andermondsche Determinante 74  
 Varianz 737,739  
 Variation der  
   Konstanten 236,487,497,527,557  
 Vektor 26  
   –Betrag 29  
   –Länge 29  
   –Norm 29  
 Vektorfeld 425  
   –solenoidal 442  
 Vektorfolge 98  
 Vektorpotential 442  
 Vektorprodukt 38  
 Vektorraum 32,44,58,303  
   –Basis 32,58  
   –Dimension 32,58  
   –Euklidischer 27  
   –normierter 254,303  
   –unitärer 254,304

Verfahren von Picard-Lindelöf 482  
Verteilung 727,729  
–Binomial- 734  
–diskrete 727,733  
–Gaußsche Normal- 739  
–hypergeometrische 733  
–Poissonsche 735  
–stetige 738  
Vollständige Induktion 5  
Volumenelement 403

**W**ahrscheinlichkeit 727  
–bedingte 728  
Wahrscheinlichkeitsraum 727  
–diskreter 727  
Wärmeleitungsgleichung 552,568  
wegunabhängig 439,655  
Wendepunkt 181  
Wertebereich 114  
Winkel zwischen Vektoren 30  
winkeltreu 638  
Wirbel 426  
wirbelfreies Feld 426  
Wronski-Determinante 495,527  
Wurzelkriterium 103

## **Z**ahlen

–ganze 2  
–irrationale 2  
–komplexe 16  
–natürliche 2  
–rationale 2  
–reelle 3  
Zahlenfolge  
–komplexe 98  
–reelle 90  
Zerlegung 191,381  
–Verfeinerung 192  
Z-Transformation 717  
–Anwendung auf Differenzengleichungen 724  
–Differenzen k-ter Ordnung 719  
–Eigenschaften 719  
–Faltung 719  
–Grenzwertsätze 722  
–Inverse Z-Transformation 721,722  
Zufallsvariable 732  
zusammenhängend 280,433,611  
–einfach- 433,611  
Zwischenwertsatz 151  
Zykloide 226  
Zylinderkoordinaten 276,404,467,471