

# Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen in Magnetoplasmen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades  
„Doktor der Naturwissenschaften“  
an der Fakultät für  
Physik und Astronomie  
der  
Ruhr-Universität Bochum



vorgelegt von  
**Dennie Lange**  
aus  
**Marl**

Bochum 2014

1. Gutachter: Prof. Dr. Rainer Grauer
  2. Gutachter: PD Dr. Horst Fichtner
- Datum der Disputation: 01.07.2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzüberblick</b>	<b>v</b>
<b>Glossar</b>	<b>vii</b>
<b>1. Einführung: Komplexe (staubige) Plasmen</b>	<b>1</b>
1.1. Technische Anwendungen . . . . .	2
1.2. Plasmakristalle . . . . .	4
1.3. Staubige Plasmen in der Weltraum- und Astrophysik . . . . .	7
1.4. Aufladung von Staubteilchen in einem Plasma . . . . .	10
1.5. Staubige Magnetoplasmen . . . . .	14
<b>2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen</b>	<b>17</b>
2.1. Die Orbital Motion Limited (OML) Theorie . . . . .	17
2.1.1. Dreidimensionaler Fall . . . . .	19
2.1.2. Zweidimensionaler Fall . . . . .	23
2.2. Gültigkeitsbereich der OML-Theorie . . . . .	25
2.3. Die Orbital Motion (OM) Theorie . . . . .	28
2.3.1. Abstoßendes Potenzial . . . . .	28
2.3.2. Anziehendes Potenzial . . . . .	29
2.3.3. Dreidimensionaler Fall . . . . .	32
2.3.4. Zweidimensionaler Fall . . . . .	36
2.4. Staubteilchen in einem Magnetoplasma . . . . .	38
2.4.1. Gyrationradius in einem Plasma . . . . .	38
2.4.2. OML-Theorie unter Berücksichtigung eines Magnetfeldes . . . . .	40
<b>3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR</b>	<b>51</b>
3.1. Das „Particle-In-Cell“ Verfahren . . . . .	51
3.2. Abbildung der Superteilchen auf ein diskretes Gitter . . . . .	53
3.3. Lösung der Poissongleichung . . . . .	53
3.3.1. Eindimensionale Poissongleichung . . . . .	54
3.3.2. Zweidimensionale Poissongleichung . . . . .	55
3.3.3. Dreidimensionale Poissongleichung . . . . .	62
3.4. Berechnung des E-Feldes und Interpolation an einen Superteilchenort . . . . .	67
3.5. Integration der Bewegungsgleichungen . . . . .	69
3.6. Berücksichtigung von Randbedingungen . . . . .	72

<b>4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen</b>	<b>75</b>
4.1. Simulation ohne Staubteilchen . . . . .	75
4.2. Eindimensionale Simulationen mit Staubteilchen . . . . .	79
4.2.1. Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht . . . . .	80
4.2.2. Verlauf der Ionen- und Elektronendichte . . . . .	84
4.2.3. Verlauf des Potenzialprofils . . . . .	85
4.3. Dreidimensionale Simulationen mit Staubteilchen . . . . .	90
4.3.1. Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht . . . . .	91
4.3.2. Verlauf der Ionen- und Elektronendichte . . . . .	94
4.3.3. Verlauf des Potenzialprofils . . . . .	95
4.4. Zweidimensionale Simulationen mit Staubteilchen . . . . .	100
4.4.1. Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht . . . . .	101
4.4.2. Verlauf der Ionen- und Elektronendichte . . . . .	104
4.4.3. Verlauf des Potenzialprofils . . . . .	105
<b>5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen</b>	<b>111</b>
5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen .	111
5.1.1. Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht . . . . .	112
5.1.2. Modellierung des Potenzialverlaufs . . . . .	124
5.1.3. Verlauf des Potenzials und der Ladungsdichte . . . . .	126
5.1.4. Verlauf der Ionen- und Elektronendichte . . . . .	127
5.1.5. Verlauf des Potenzialprofils . . . . .	134
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>137</b>
<b>A. Andere Aufladungsprozesse von Staubteilchen</b>	<b>143</b>
<b>B. Geschwindigkeit des magnetischen Führungszentrums</b>	<b>145</b>
<b>C. Debye-Hückel-Theorie</b>	<b>147</b>
<b>D. Abbildungsvorschrift in einem mehrdimensionalen Gitter</b>	<b>151</b>
<b>E. Mathematischer Anhang</b>	<b>153</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>155</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>159</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>171</b>
<b>Danksagung</b>	<b>173</b>

# Kurzüberblick

Ein staubiges oder komplexes Plasma besteht neben den Elektronen, Ionen und Neutralgasteilchen aus kompakten Partikeln im Mikro- oder Submikrometerbereich. Die Staubpartikel wechselwirken mit den Plasmateilchen und laden sich elektrisch auf, bis eine Gleichgewichtsladung erreicht ist, welche von der Größe der Staubteilchen und den Plasmaparametern abhängt. Die Gleichgewichtsladung oder das Gleichgewichtspotenzial stellt eine der charakteristischen Größen eines staubigen Plasmas dar. Eine analytische Bestimmung des Gleichgewichtspotenzials für sphärische Staubteilchen ist mit der OML-Theorie möglich, welche allerdings lediglich in einem eingeschränkten Parameterbereich eine gute Approximation darstellt, nämlich wenn das Staubteilchen kleiner als die Debyelängen des Plasmasystems ist und kein Magnetoplasma vorliegt. Die wesentlich aufwändigere OM-Theorie erlaubt die Bestimmung des Gleichgewichtspotenzials in Abhängigkeit des Staubteilchenradius, wobei eine numerische Lösung der Poissongleichung erforderlich ist.

In dieser Arbeit wird mit dem „Particle-In-Cell“-Code OPAR die Aufladung von einzelnen, sphärischen Staubteilchen unterschiedlicher Größe bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustands untersucht. Die Staubteilchen sind dabei als innere und ortsfeste Randbedingungen mit einer zeitabhängigen Staubteilchenladung implementiert. In den OPAR-Simulationen werden Elektronen und Ionen dynamisch betrachtet, wobei das Simulationsgebiet durch entsprechende äußere Randbedingungen in ein „unendlich“ ausgedehntes, ungestörtes Maxwellplasma eingebettet ist. Es sind Plasmasysteme bei verschiedenen Temperaturverhältnissen (Ionen zu Elektronen) sowie mit verschiedenen Staubteilchenradien simuliert worden. Die Radien fallen dabei kleiner als auch größer als die Debyelängen des betrachteten Plasmasystems aus. Es werden die Gleichgewichtspotenziale, die Elektronen- und Ionendichten in der Umgebung des Staubteilchens sowie der Potentialverlauf sowohl für Plasmasysteme ohne Magnetfeld als auch für Magnetoplasmen mit unterschiedlichen magnetischen Flussdichten diskutiert. Das Magnetoplasma wird dabei durch die Überlagerung des Simulationsgebietes mit einem homogenen und konstanten Magnetfeld erzeugt.

Die Ladungsströme auf ein sphärisches Staubteilchen verlieren in einem Magnetoplasma die Rotationssymmetrie, welche in der OML- und OM-Theorie angesetzt wird. Da Elektronen stärker an Magnetfeldlinien gebunden werden als Ionen, wird der Elektronenstrom auf ein Staubteilchen stets stärker beeinflusst als der Ionenstrom. Mit Hilfe der OML-Theorie werden qualitative Aussagen über das Verhalten des Gleichgewichtspotenzials unter dem Einfluss eines Magnetfeldes analytisch abgeleitet und mit den Simulationsergebnissen verglichen, wobei insbesondere der Übergang zwischen dem unmagnetisierten und dem voll magnetisierten Fall untersucht und modelliert wird.

## *Kurzüberblick*

# Glossar

## Konstanten

Symbol	Name	Wert
$\varepsilon_0$	Elektrische Feldkonstante	$8,85419 \cdot 10^{-12}$ F/m
$\pi$	Kreiszahl	3,141592654
$e$	Elementarladung	$1,6022 \cdot 10^{-19}$ C
$k$	Boltzmannkonstante	$1,3807 \cdot 10^{-23}$ J/K
$m_e$	Elektronenmasse	$9,1094 \cdot 10^{-31}$ kg

## Wichtige Variablen und Parameter

Symbol	Name	Einheit
$\alpha$	Streuparameter	dimensionslos
$\beta$	Normierte Temperatur $T_i/T_e$	dimensionslos
$\gamma_e$	Normierter Radius $R/r_{ge}^{mp}$	dimensionslos
$\gamma_i$	Normierter Radius $R/r_{gi}^{mp}$	dimensionslos
$\Gamma^n$	Stromdichte, $n = 1D, 2D, 3D$	1/m, 1/m <sup>2</sup> , 1/m <sup>3</sup>
$\Delta t$	Zeitschrittweite	s
$\Delta x$	Gitterpunktabstand $x$ -Richtung	m
$\Delta y$	Gitterpunktabstand $y$ -Richtung	m
$\Delta z$	Gitterpunktabstand $z$ -Richtung	m
$\eta_R$	Normiertes Oberflächenpotenzial $eV_R/kT_e$	dimensionslos
$\Theta$	Heaviside-Funktion	dimensionslos
$\lambda_d$	Abschirmlänge	m
$\lambda_e$	Debyelänge der Elektronen	m
$\lambda_i$	Debyelänge der Ionen	m
$\lambda_l$	Linearisierte Debyelänge	m
$\rho$	Ladungsdichte, 1D, 2D, 3D	C/m, C/m <sup>2</sup> , C/m <sup>3</sup>
$\rho_0$	Superteilchenladung pro Gitterzelle, 1D, 2D, 3D	C/m, C/m <sup>2</sup> , C/m <sup>3</sup>
$\sigma$	Stoßparameter	m
$\sigma_b$	Kritischer Stoßparameter (Potenzialbarrieren)	m
$\sigma_{krit}$	Kritischer Stoßparameter	m
$\sigma_{krit}^-$	Kritischer Stoßparameter, abstoßendes Potenzial	m
$\sigma_{krit}^+$	Kritischer Stoßparameter, anziehendes Potenzial	m
$\phi$	Potential (numerische Lösung Poissongleichung)	V

## Glossar

$\psi$	Phasenwinkel	rad
$\psi_{\text{krit}}$	Kritischer Phasenwinkel	rad
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	rad/s
$\omega_e$	Plasmafrequenz Elektronen	1/s
$\omega_g$	Zyklotronfrequenz	1/s
$A$	Entmagnetisierungsfunktion	dimensionslos
$\vec{B}$	Magnetisches Feld	T
$B_e$	Magnetische Flussdichte gemäß magnetisierter Elektronen	T
$B_i$	Magnetische Flussdichte gemäß magnetisierter Ionen	T
$B_z$	Magnetische Flussdichte in $z$ -Richtung	T
$C$	Kapazität	F
$D$	Magnetisierungsfunktion	dimensionslos
$E$	Energie	eV
$\vec{E}$	Elektrisches Feld	V/m
erfc	Komplementäre Fehlerfunktion	dimensionslos
$f_M^n(\vec{v})$	Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell, $n = 2D, 3D$	dimensionslos
$i, j, k$	Indizierung Gitterpunkte	
$I_0$	Potenzialunabhängiger Strom	A
$I_e$	Elektronenstrom	A
$I_i$	Ionenstrom	A
$I_i^{B_i}$	Magnetisierter Ionenstrom	A
$J$	Drehimpuls	kg m <sup>2</sup> /s
$J_{\text{krit}}$	Kritischer Drehimpuls	kg m <sup>2</sup> /s
$K_0$	Modifizierte Besselfunktion	dimensionslos
$l_{\text{mfp}}$	Mittlere freie Weglänge	m
$m$	Masse	kg
$m_i$	Ionenmasse	kg
$n_0$	Teilchendichte, 1D, 2D, 3D	1/m, 1/m <sup>2</sup> , 1/m <sup>3</sup>
$n_e$	Elektronendichte, 1D, 2D, 3D	1/m, 1/m <sup>2</sup> , 1/m <sup>3</sup>
$n_i$	Ionendichte, 1D, 2D, 3D	1/m, 1/m <sup>2</sup> , 1/m <sup>3</sup>
$N_{\text{SP}}$	Anzahl Superteilchen	dimensionslos
$N_{\text{SPC}}$	Superteilchendichte pro Gitterzelle, 1D, 2D, 3D	1/m, 1/m <sup>2</sup> , 1/m <sup>3</sup>
$N_n$	Anzahl Gitterpunkte, $n = x, y, z$	dimensionslos
$q$	Ladung	C
$Q$	Ladung auf Gitterpunkt	C
$Q_R$	Oberflächenladung Staubteilchen	C
$Q_{\text{SP}}$	Superteilchenladung	e
$R$	Staubteilchenradius	m
$\vec{r}$	Abstandsvektor	m
$r_A$	Absorptionsradius	m

$r_g$	Gyrationsradius	m
$r_{ge}^{mp}$	Wahrscheinlichster Gyrationsradius Elektronen in Maxwellverteilung	m
$r_{gi}^{mp}$	Wahrscheinlichster Gyrationsradius Ionen in Maxwellverteilung	m
$r_{ge}^{av}$	Mittlerer Gyrationsradius Elektronen	m
$r_{gi}^{av}$	Mittlerer Gyrationsradius Ionen	m
$S$	Abbildungsfunktion	dimensionslos
$t$	Zeit	s
$T$	Temperatur	K
$T_e$	Elektronentemperatur	K
$T_i$	Ionentemperatur	K
$V$	Potenzial (analytische Lösung Poissongleichung)	V
$V_R$	Oberflächenpotenzial Staubteilchen	V
$V_{eff}$	Effektives Potenzial	eV
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	m/s
$v_\infty$	Geschwindigkeit im unendlichen	m/s
$v_\perp$	Senkrechte Geschwindigkeit	m/s
$v_\parallel$	Parallele Geschwindigkeit	m/s
$v_\phi$	Tangentiale Geschwindigkeit	m/s
$v_{av}^n$	Mittlere Geschwindigkeit in Maxwellverteilung, $n = 2D, 3D$	m/s
$v_{mp}^n$	Wahrscheinlichste Geschwindigkeit in Maxwellverteilung, $n = 2D, 3D$	m/s
$v_r$	Radiale Geschwindigkeit	m/s
$x$	Kartesische $x$ -Koordinate	m
$X$	Gitterpunkt	dimensionslos
$y$	Kartesische $y$ -Koordinate	m
$z$	Kartesische $z$ -Koordinate	m
$\hat{\phantom{x}}$	Normierter Wert	

## Abkürzungen

### Bezeichnung Beschreibung

1D, 2D, 3D	Ein-, Zwei-, Dreidimensional
Ar <sup>40</sup>	Argon 40
CCD	Charge Coupled Device
H <sup>+</sup>	Ionisierter Wasserstoff (Proton)
HF	Hochfrequenz
HST	Hubble Space Telescop
IMPF	International Microgravity Plasma Facility
ISS	International Space Station
ITER	International Thermonuclear Experimental Reactor

## *Glossar*

MDPX	Magnetized Dusty Plasma Experiment
NGP	Nearest Grid Point
OM	Orbital Motion
OML	Orbital Motion Limited
PECVD	Plasma Enhanced Chemical Vapour Deposition
PIC	Particle In Cell
PK-3 Plus	Plasma Kristall Experiment 3 Plus
PK-4	Plasma Kristall Experiment 4
PKE	Plasma Kristall Experiment
RF	Radiofrequenz
SCEPTIC	Specialized Coordinate Electrostatic Particle Thermals In Cell
UKW	Ultrakurzwelle
UV	Ultraviolett

# 1. Einführung: Komplexe (staubige) Plasmen

Aus der alltäglichen Erfahrung sind uns die drei Aggregatzustände „fest“, „flüssig“ und „gasförmig“ sehr gut vertraut. Wasser befindet sich bei atmosphärischem Normaldruck und einer Temperatur zwischen  $0^{\circ}\text{C}$  und  $100^{\circ}\text{C}$  im flüssigen Zustand. Die Kühlung auf unter  $0^{\circ}\text{C}$  bewirkt den Phasenübergang in den festen Zustand (Eis) und die Erwärmung auf über  $100^{\circ}\text{C}$  in den gasförmigen Zustand (Wasserdampf). Die Temperatur bestimmt also den Aggregatzustand eines Stoffes, wobei die Temperatur wiederum ein Maß für die durchschnittliche kinetische Energie der Moleküle oder Atome darstellt. Die weitere Heizung eines Gases bzw. die Zuführung von kinetischer Energie führt dazu, dass durch die entsprechend energiereichen Stöße unter den Molekülen die Molekülverbindungen aufbrechen und das Gas schließlich nur noch aus Atomen besteht. Heizt man das atomare Gas noch weiter, können die an die Atomkerne gebundenen Elektronen durch Stöße schließlich so viel Energie aufnehmen, dass die Bindung an die Atomkerne verloren geht und das Atom *ionisiert* wird. Zurück bleiben die negativ geladenen Elektronen, die positiv geladenen Atomkerne (auch Ionen genannt) und ein Anteil neutraler Atome, welche nicht ionisiert wurden. Ein solches Gemisch wird als *Plasma* bezeichnet. Obwohl es keinen direkten Phasenübergang vom gasförmigen Zustand in den eines Plasmas gibt, wird ein Plasma auch oft als vierter Aggregatzustand der Materie bezeichnet. Auf der Erde ist der Zustand eines Plasmas infolge natürlicher Prozesse äußerst selten zu finden. Flammen eines Feuers stellen streng genommen kein Plasma da, auch wenn in einer Flamme ein gewisser Ionisationsgrad erreicht wird. Neben der Oxidationsreaktion werden lediglich Elektronen in höhere Bahnen bzw. Energieniveaus gehoben und emittieren beim Zurückfallen auf die ursprünglichen Bahnen Photonen bzw. Licht. In einer Kerzenflamme oxidieren Kohlenwasserstoffe, aus welchen Kerzenwachs hauptsächlich besteht, zu  $\text{CO}_2$  und  $\text{H}_2\text{O}$ , wobei ein gewisser Anteil von Kohlenstoffpartikeln in der Größenordnung von einigen Nanometern zurückbleibt, welche aufgrund der hohen Temperaturen ( $>1.000^{\circ}\text{C}$ ) zu glühen und zu leuchten beginnen.

Während eines Gewitters kommt es zu Funkenentladungen (Blitzen) zwischen Wolken oder zwischen Wolken und der Erde. In einer Gewitterwolke bilden sich relativ große Eiskristalle (Graupelteilchen), welche aufgrund der Schwerkraft nach unten sinken. Durch Reibung an noch relativ kleinen Eiskristallen, welche durch Aufwinde in der Wolke nach oben getrieben werden, laden sich die Graupelteilchen negativ und die Eiskristalle folglich positiv auf. Es findet somit eine gewaltige Ladungstrennung innerhalb der Gewitterwolke statt. Durch den Effekt der *Influenz* lädt sich der direkt unter der Wolke befindliche Erdboden wie der obere Bereich der Gewitterwolke positiv auf. Befinden sich nun zwischen dem Erdboden und der Wolke oder innerhalb der Wolke freie Elektronen,

## 1. Einführung: Komplexe (staubige) Plasmen

werden diese im starken elektrischen Feld beschleunigt und lösen schließlich eine Stoßionisation der Luftmoleküle aus. Hierdurch bildet sich ein hochleitfähiger Plasmakanal von nur wenigen Millimetern Breite aus, durch welchen schließlich ein den Ladungsunterschied ausgleichender Strom fließt. Das heiße Plasma wird dann im sichtbaren Licht als der eigentliche Blitz wahrgenommen.

In einer Höhe von ca. 80 bis 800 km ist die Atmosphäre der Erde teilweise ionisiert, weshalb dieser Bereich *Ionosphäre* genannt wird [1]. Die Ionisierung der Luftmoleküle wird hauptsächlich durch die UV- und Röntgenstrahlung der Sonne sowie durch kosmische Strahlung verursacht. Durch die freien Elektronen in der Ionosphäre können Radiowellen reflektiert werden, wodurch ein weltweiter Funkverkehr ermöglicht wird.

Enthält ein Plasma neben den üblichen Komponenten wie Elektronen, Ionen und Neutralgasteilchen zusätzlich kompakte Partikel im Mikro- oder Submikrometerbereich, bezeichnet man es als ein *staubiges Plasma*. Die Staubpartikel oder Staubteilchen laden sich durch Wechselwirkung mit den Elektronen und Ionen im Plasma elektrisch auf und können eine Ladung von mehreren tausend Elementarladungen aufnehmen. Die Ladung ist dabei zeitlich nicht konstant, sondern fluktuiert um einen Gleichgewichtszustand, welcher von der Größe der Staubteilchen sowie den Plasmaparametern abhängt. Die geladenen Staubteilchen können sowohl untereinander wechselwirken als auch eine Rückwirkung auf das Plasma selbst ausüben. Da die Masse eines Staubteilchens sehr viel größer ist als die der Ionen, stellen Staubteilchen infolge ihrer relativen Unbeweglichkeit eine Hintergrundladung im Plasma dar. Durch die Anwesenheit von vielen, stark miteinander wechselwirkenden Staubteilchen wird die Komplexität eines Plasmasystems enorm erhöht, weshalb ein solches Plasma auch *komplexes Plasma* genannt wird. Insbesondere nach der Entdeckung des *Plasmakristalls* im Jahr 1994 (siehe Abschnitt 1.2) ist die Anzahl der Veröffentlichungen zum Thema nahezu exponentiell angestiegen. Das Gebiet der staubigen oder komplexen Plasmen berührt heute eine Vielzahl von wissenschaftlichen Themengebieten und bietet viele Anwendungsmöglichkeiten. Die folgenden Abschnitte geben einen Überblick.

### 1.1. Technische Anwendungen

Die Aufladung eines von einem Plasma umgebenen Objekts ist ein typisches Problem in der Plasmaphysik und wurde schon in den 1920er Jahren im Rahmen der Plasmasondentheorie diskutiert [2]. In den 1980er Jahren wurden bei der Fertigung von immer kleiner werdenden Mikrochips vermehrt Plasmaprozesse eingesetzt, wobei das Problem der Kontamination durch Staubpartikel auftrat und zu einem wachsenden Interesse an der Erforschung von staubigen Plasmen in der Industrie führte [3, 4]. In experimentellen Kernfusionsreaktoren stellen Staubpartikel ein Problem wegen ihrer kühlenden Wirkung auf das Fusionsplasma dar. Die Kontamination mit Staubpartikeln wird in den Reaktoren hauptsächlich durch die Plasma-Wand-Wechselwirkung verursacht, zudem reichert sich in den Staubpartikeln das als Fusionsbrennstoff verwendete radioaktive Wasserstoffisotop Tritium an, was zu Entsorgungs- und Sicherheitsproblemen führt [5, 6]. Zudem wirken sich chemische Reaktionen und Ablagerungen des Staubes an sensiblen Stellen



Abbildung 1.1.: Der Verlauf einer Plasmaentladung in der Zündeinheit einer Hochleistungsfunkenstrecke bei einer Energieentladung von ca. 11 MW (Treibende Lichtbogenspannung ca. 2 kV, Stromstärke: ca. 5 kA, 50 Hz). Links die Zündung zwischen den Zündelektroden in zwei Teilfunkenstrecken. Die nächsten Bilder zeigen die Entladung jeweils ca. 50 ms später. In den Randbereichen der Entladung sind Staub- und Rußwolken zu erkennen, welche aus dem Abbrand von Elektrodenmaterial stammen und die Plasmaentladung kontaminieren. Die Seitenlänge des Gehäuses beträgt ca. 2,5 m. Mit Genehmigung der Siemens AG.

im Fusionsreaktor negativ auf einen Langzeitbetrieb aus [7, 8]. Mit dem seit 2009 im Bau befindlichen Großforschungsreaktor *ITER* (engl. International Thermonuclear Experimental Reactor) im französischen Cadarache soll die technische und kommerzielle Realisierbarkeit der Nutzung der Kernfusion zur Energieversorgung erforscht und bewertet werden. Die Inbetriebnahme ist für das Jahr 2018 vorgesehen [9, 10].

In Hochspannungsschaltanlagen werden Funkenstrecken als Schutzschalter vor Überspannungen und als Energieableiter eingesetzt. In diesen Hochleistungsfunkenstrecken erhöhen geladene Staubpartikel die Gefahr von Rückzündungen an den Zündelektroden, da die Entionisierungszeit des Gases nach Löschung der kontaminierten Plasmaentladung stark erhöht wird. Um die Kontamination in der Plasmaentladung zu reduzieren, wird der Hochstromlichtbogen (mit Stromstärken von bis zu 63 kA) zum einen in einem Mehrelektrodensystem gehalten, zum anderen bestehen die Elektroden aus sehr abbrandarmem und temperaturresistentem Material (Wolfram und Graphit). Abbildung 1.1 zeigt den Verlauf einer Plasmaentladung in der Zündeinheit einer Hochleistungsfunkenstrecke bei einer Energieentladung von ca. 11 MW, aufgenommen mit einer Hochgeschwindigkeitskamera. Die Plasmaentladung kann durch Abbrand an den Elektroden mit Staubteilchen kontaminiert werden, was zu Rückzündungen nach Löschung der Entladung und kurz darauffolgender Wiederaufschaltung ( $< 500$  ms) der Spannung führen kann.

Neben diesen unerwünschten Effekten können geladene, kompakte Partikel in Plasmen aber auch gezielt eingesetzt und technisch nutzbar gemacht werden, wodurch sich insbesondere in den letzten zwei Dekaden eine Vielzahl von Anwendungsgebieten ergeben haben [11, 3, 12]. Durch eine Plasmabeschichtung mit Mikropartikeln können die chemischen, mechanischen, magnetischen und elektrischen Oberflächeneigenschaften eines Materials verändert werden, womit beispielsweise eine Effizienzsteigerung von Solarzel-

## 1. Einführung: Komplexe (staubige) Plasmen

len und Halbleiterchips erreicht werden kann [13, 14]. Auch die Herstellung von neuen Verbundwerkstoffen durch eine schichtweise Ablagerung von Mikropartikeln verschiedener Größe oder chemischer Beschaffenheit wird diskutiert [3]. Im chemischen Gasphasenabscheidungsverfahren *PECVD* (engl. Plasma Enhanced Chemical Vapour Deposition), welches durch ein Plasma angetrieben wird, können die Abscheidungsraten durch den Einsatz von geladenen Mikropartikeln gezielt erhöht und kontrolliert werden [14]. Zur Herstellung von leitenden Metallschichten in der Mikroelektronik wird häufig das *Magnetron-Beschichtungsverfahren* (engl. Magnetron Sputtering) eingesetzt. Hierbei wird in der Gasentladung die Ionisierungsrate der Elektronen durch Überlagerung eines externen Magnetfeldes erhöht, was wiederum zu einer höheren Beschichtungsrate führt. Abbildung 1.2 aus Kersten et al. [15] zeigt Aufnahmen eines Elektronenmikroskopes von Siliziumoxidteilchen, welche in einer Argon RF-Entladung mit Kupfer, Titanium und Aluminium beschichtet wurden. Die Schichtdicke beträgt dabei nur wenige Nanometer. Mit dem gleichen Verfahren lassen sich sehr dünne Metallschichten auf Glas oder transparenten Folien aufbringen, wodurch das Material für UV-Licht undurchlässig aber für sichtbares Licht weiterhin transparent bleibt.

## 1.2. Plasmakristalle

Für die physikalische Grundlagenforschung bieten sich komplexe Plasmen ebenfalls an. Im Jahr 1994 konnten am Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik in Garching geladene Staubpartikel in einem Plasma durch die Coulomb-Wechselwirkung derart stark aneinander gekoppelt werden, dass diese sich in einer regelmäßigen Struktur anordneten [16]. Diese Kristallisation von Staubpartikeln wird seitdem auch als *Plasmakristall* bezeichnet. Die mikrometergroßen Partikel besitzen dabei einen Abstand, welcher typischerweise um den Faktor 100 größer ist als der Partikelradius. Ein Plasmakristall besitzt also eine große optische Transparenz und ist damit durch Videomikroskopie direkt beobachtbar. Durch Veränderung der Plasmaeigenschaften oder durch Manipulation mit Lasern kann der Plasmakristall zum Schmelzen gebracht werden, sodass die Staubpartikel fluide Eigenschaften annehmen können [18]. Laborexperimente mit komplexen Plasmen eignen sich also hervorragend, um Wachstumsprozesse von kristallinen Strukturen, Phasenübergänge sowie die Dynamik von Coulomb-Wechselwirkungen auf dem elementarsten physikalischen Niveau, dem kinetischen, direkt und systematisch zu untersuchen [19]. Bisher ließen sich nur die durch gravitative Wechselwirkungen verursachten Bewegungen direkt beobachten, z.B. die der Planeten. Allerdings entsteht in einem Labor auf der Erde immer ein in vertikaler Richtung deformierter Plasmakristall, da die Schwerkraft einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Mikropartikel ausübt [20]. Die Untersuchung in einem erdgebundenen Labor ist also auf nahezu zweidimensionale Kristallstrukturen beschränkt. Um den störenden Einfluss der Schwerkraft zu reduzieren und auch dreidimensionale Plasmakristalle studieren zu können, werden Plasmakristallexperimente seit den 1990er Jahren auf Parabel- und Raketenflügen durchgeführt [21]. Zudem wurde als eines der ersten wissenschaftlichen Experimente im Jahr 2001 das *PKE* (Plasma Kristall Experiment) auf der Raumstation *ISS* (engl. International

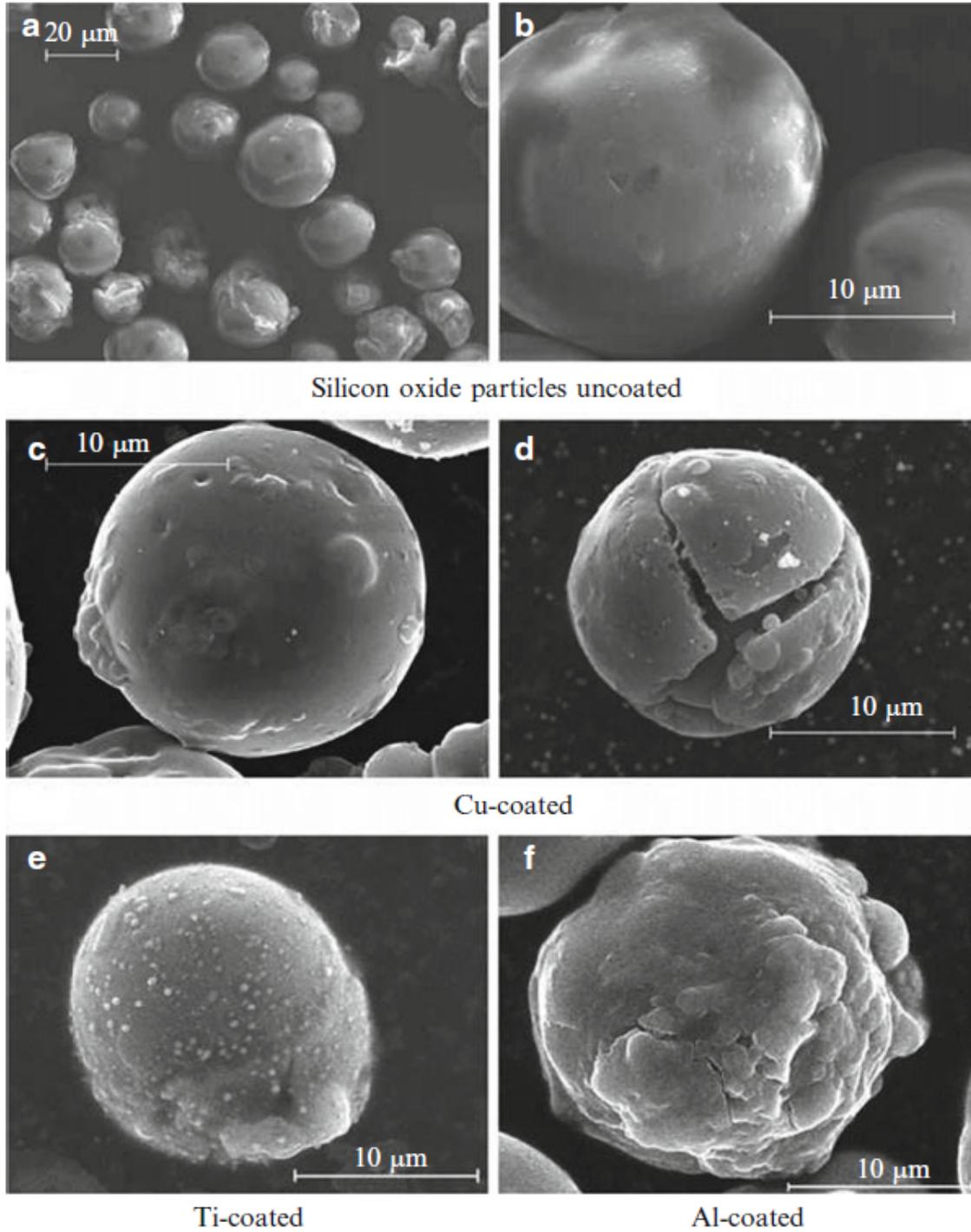


Abbildung 1.2.: Aufnahmen eines Elektronenmikroskopes von Siliziumoxidteilchen a) und b), welche in einer Argon RF-Entladung durch das Magnetron-Verfahren mit Kupfer c) und d), mit Titanium e) sowie mit Aluminium f) beschichtet wurden. Bildmaterial aus Kersten et al. [15].

## 1. Einführung: Komplexe (staubige) Plasmen

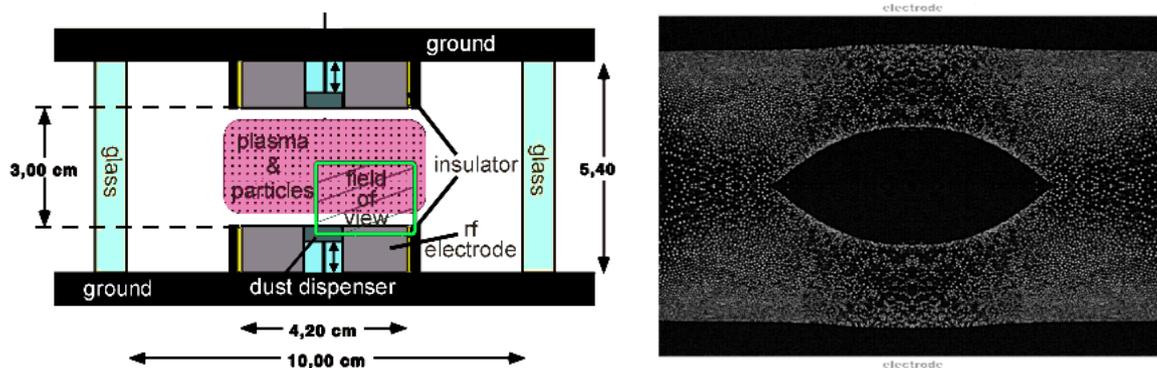


Abbildung 1.3.: Links: Eine schematische Darstellung des PKE (Plasma Kristall Experiment) [4]. Rechts: Ein im PKE erzeugtes komplexes Plasma mit einem staubleeren Gebiet (Void) in der Mitte der Entladungskammer, aus Morfill et al. [17].

Space Station) in Betrieb genommen [4, 22]. Das PKE besteht aus einer Plasmakammer, welche ein Plasma in Argon mittels einer Hochfrequenzentladung (HF) erzeugt, siehe Abbildung 1.3 (links). In dieses Plasma können dann Polymerkugeln mit einem Durchmesser von 3 bis 7  $\mu\text{m}$  injiziert werden. Die Schwerkraft auf der Raumstation beträgt nur noch  $10^{-4}$  g, womit die elektromagnetische Wechselwirkung der Mikropartikel die dominierende Kraft im PKE ist [20, 23]. Bis zum Jahr 2005 konnten über 30 Experimente erfolgreich durchgeführt werden, ehe das PKE durch das Nachfolgeexperiment *PK-3 Plus* abgelöst wurde [17]. *PK-3 Plus* bietet eine noch größere Bandbreite an einstellbaren Parametern, u.a. können Polymerkugeln bis zu einem Durchmesser von 20  $\mu\text{m}$  sowie exakter dosiert injiziert werden [24]. Bereits in Planung ist ein weiterer Nachfolger, das *PK-4* Experiment, welches im Jahr 2014 auf die Raumstation gebracht werden soll und eine Gleichspannungs-Glimmentladung zur Plasmaerzeugung nutzen wird. Mit *PK-4* sollen dann vor allem die fluiden und rheologischen Eigenschaften des Plasmakristalls wie etwa die Strömungseigenschaften der Mikropartikel bei Turbulenz untersucht werden [25, 26, 27]. Ebenfalls in Planung ist der Betrieb eines langzeit Forschungslabors auf der ISS, die *IMPF* (engl. International Microgravity Plasma Facility), welches durch einen modularen Aufbau immer wieder neue Experimente aufnehmen und durchführen soll [4].

Abbildung 1.3 (rechts) aus Morfill et al. [17] zeigt ein typisches komplexes Plasma, welches man im PKE beobachten kann [17]. Die hellen Punkte sind die geladenen Mikropartikel (Durchmesser 3, 4  $\mu\text{m}$ ). Auffällig ist der große leere Bereich in der Mitte, welcher *Void* genannt wird [28]. Dieser Void, welcher in Experimenten unter Schwerkraftbedingungen nicht auftritt, wird vermutlich durch Ionen verursacht, welche von der Mitte der Entladung nach außen beschleunigen und somit die Mikropartikel durch Stöße verdrängen [29]. In den Randgebieten bilden sich Wirbel von Mikropartikeln, welche durch Inhomogenitäten des elektrischen Feldes an den Elektroden und Partikeldispensoren verursacht werden [22]. Durch Anregung von akustischen Wellen unter den Mikropartikeln konnten Vereinigungen zu größeren Agglomeraten von einigen 100.000 Partikeln beob-

achtet werden [30]. Nach Abschaltung der Plasmaentladung treten ebenfalls Agglomerate auf, wobei diese insgesamt sowohl positiv wie auch negativ geladen sein können [4]. Die Erforschung dieser durch Coulomb-Wechselwirkungen angetriebenen Wachstumsprozesse von Mikropartikeln ist vor allem für die Modellierung der Planetenentstehung aus protoplanetaren Staubscheiben von enormem Interesse [31]. Die Ergebnisse der Plasmakristallexperimente auf der internationalen Raumstation ISS haben für die Grundlagenforschung auf dem Gebiet der komplexen Plasmen als auch für technologische Anwendungen wertvolle Resultate geliefert. Beispielsweise konnte die Geräteentwicklung in der Plasmamedizin angewendet werden, um eine kontaktfreie Sterilisation sowie eine Behandlung von antibiotikaresistenten Wunden durch ein Niedertemperaturplasma unter Atmosphärendruck zu ermöglichen [32, 33].

## 1.3. Staubige Plasmen in der Weltraum- und Astrophysik

Staubige Plasmen spielen eine Hauptrolle in der Weltraum- und Astrophysik. 99% der sichtbaren Materie im Universum befindet sich im Zustand eines Plasmas. Die restliche Materie besteht zum großen Teil aus Staubteilchen, weshalb die Wechselwirkung dieser beiden Hauptbestandteile des Kosmos in den meisten astrophysikalischen Systemen allgegenwärtig ist [34, 35, 36]. Bis hin zu Eisen werden in Sternen durch die Kernfusion schwerere Elemente als Wasserstoff und Helium gebildet. Über Sternenwinde oder Supernova-Explosionen werden diese erbrüteten Elemente dann ans *interstellare Medium* abgegeben, wobei die (gasförmigen) Elemente aufgrund der fallenden Temperatur der ausströmenden Materie zu Staubpartikeln auskondensieren können. Allerdings wird ein beträchtlicher Anteil von schweren Elementen dem interstellaren Medium auch im gasförmigen Zustand zugeführt, welcher erst in dichten Molekülwolken zu festen Partikeln kondensiert [37].

In der *Mesosphäre* der Erde führen Staubpartikel zu Leuchterscheinungen, welche in den Sommermonaten auf der Nordhalbkugel kurz nach Sonnenuntergang sichtbar werden und als *nachtleuchtende Wolken* (engl. Noctilucent Clouds) bezeichnet werden. Das Sonnenlicht wird hier an Eiskristallen reflektiert, welche durch Kondensation an Staubpartikeln entstehen. Die Herkunft dieser Staubpartikel ist noch nicht vollständig geklärt, jedoch verglühen Meteoriten in etwa der gleichen Höhe (ca. 80 km) und reichern somit die Mesosphäre mit Staubpartikeln an [38, 39]. Als weitere Erklärung kommen starke Vulkanausbrüche in Frage, welche große Mengen an Vulkanasche hoch in die Atmosphäre schleudern. Neben den Leuchterscheinungen treten starke Radar-Echos im Ultrakurzwellenbereich (UKW) auf, was darauf hindeutet, dass sich die Eispartikel im Strahlungsfeld der Sonne durch den photoelektrischen Effekt positiv aufladen und somit freie Elektronen bereit stellen, an welchen die Radarreflexionen stattfinden [40, 36].

Der interplanetare Raum unseres Sonnensystems wird kontinuierlich durch einen Teilchenstrom, welcher von der Sonne ausgeht und *Sonnenwind* genannt wird, mit einem Plasma angefüllt. Die Dichte dieses Plasmas beträgt dabei in Erdnähe etwa 5 – 10 Teil-

## 1. Einführung: Komplexe (staubige) Plasmen

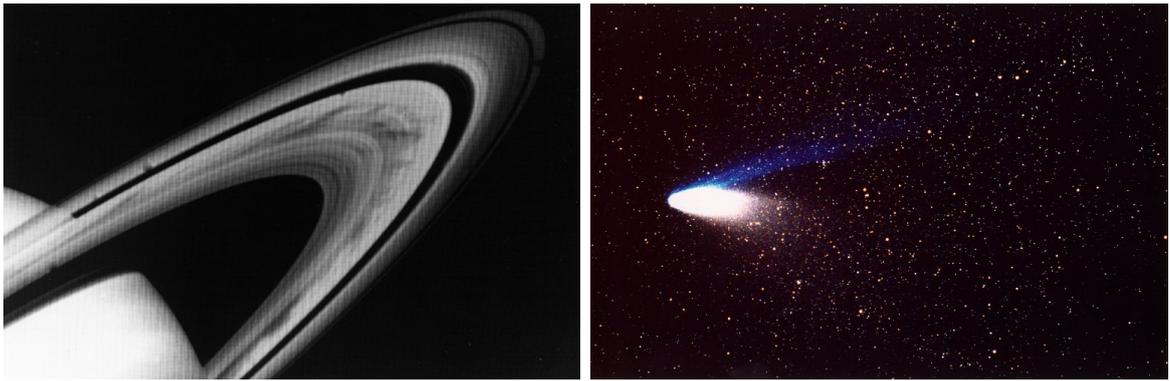


Abbildung 1.4.: Links: Radiale, speichenartige Strukturen (engl. *spokes*) in den Saturnringen, aufgenommen von den *Voyager*-Sonden im Jahr 1981. Rechts: Der Komet Hale-Bopp, welcher im Jahr 1995 entdeckt wurde und einen Ionenschweif (oben) und einen Staubschweif (unten) aufweist. Bildmaterial aus [41].

chen pro  $\text{cm}^3$  [1]. Seit den ersten Raumfahrtmissionen ist bekannt, dass sich Satelliten und Raumsonden in der Magnetosphäre der Erde und im interplanetaren Raum elektrostatisch aufladen können. Schon im Vorfeld der ersten Satellitenmission *Sputnik* im Jahr 1957 wurden Berechnungen zum Gleichgewichtspotenzial des Flugkörpers in der Ionosphäre durchgeführt [42]. Die Aufladung wird dabei zum einen durch die Wechselwirkung mit Plasmateilchen und zum anderen durch den photoelektrischen Effekt (siehe Anhang A) verursacht, denn im Weltraum sind Raumsonden und Satelliten teilweise der direkten Sonneneinstrahlung ausgesetzt. Elektrische Entladungen können zu Beschädigungen der elektrischen Systeme und zum Ausfall der Raumsonde oder des Satelliten führen. Während die sonnenzugewandte Seite einer Raumsonde abhängig vom Material in der Magnetosphäre der Erde ein positives elektrisches Potenzial von bis zu 1 V annehmen kann, kann sich die sonnenabgewandte Seite mit bis zu  $-10\text{ kV}$  aufladen [43]. Ähnlich nehmen Meteoriten und Staubpartikel im Strahlungsfeld der Sonne ein positives Potenzial an, da hier der photoelektrische Effekt der dominante Aufladungsprozess ist. Der Mond besitzt keine ihn schützende Atmosphäre, weshalb die Mondoberfläche stets der direkten Strahlung aus dem Weltraum ausgesetzt ist. Staubpartikel auf der Mondoberfläche laden sich daher in der UV-Strahlung der Sonne positiv auf und werden dann durch elektrostatische Kräfte von der Mondoberfläche abgestoßen. Die Staubpartikel können bis in einige Kilometer Höhe über der Mondoberfläche gelangen und bilden somit eine Art Staubatmosphäre [42]. Diese Erscheinung wurde auch von den *Apollo* Astronauten beobachtet [44].

Anfang der 1980er Jahre passierten die *Voyager* Raumsonden den Planeten Saturn und lieferten zum ersten Mal detaillierte Aufnahmen des Ringsystems, welches den Planeten umgibt. Innerhalb des Ringsystems waren radiale, speichenartige Strukturen (engl. *spokes*) zu erkennen, siehe Abbildung 1.4 (links). Diese Strukturen erscheinen im Auflicht dunkler als im Gegenlicht der Sonne, was auf das Vorhandensein von Staubteilchen im Mikrometerbereich hindeutet [45]. Allein durch gravitative Wechselwirkungen las-



Abbildung 1.5.: Links: Der Orionnebel, aufgenommen vom *HST*. Mitte und Rechts: Protoplanetare Staubscheiben im Orionnebel, welche sich als dunkle Silhouetten von dem leuchtenden Hintergrundgas des Nebels abheben. Bildmaterial aus [41].

sen sich diese auftretenden Strukturen nicht erklären. Weitere Beobachtungen u.a. mit dem *HST* (engl. Hubble Space Telescope) und der Raumsonde *Cassini* zeigten, dass die speichenartigen Strukturen periodisch auftreten, und zwar immer dann, wenn die Ringebene der direkten Sonneneinstrahlung ausgesetzt ist [46, 47]. Es wird vermutet, dass die elektrostatisch geladenen Staubpartikel in einem relativ dichten Plasma nahe der Ringebene in einem Schwebezustand (Levitation) gehalten werden [48]. Auch ein Einfluss von elektrodynamischen Kräften wird diskutiert, welche durch das rotierende Magnetfeld des Saturns verursacht werden könnten [49, 50]. Kometen, die unser Sonnensystem durchqueren, zeigen stets einen von der Sonne wegzeigenden Schweif. Der Schweif teilt sich dabei in einen radial von der Sonne zeigenden *Ionenschweif* und in einen diffus gekrümmten *Staubschweif* auf. Die Raumsonde *Rosetta* wird im Jahr 2014 in eine Umlaufbahn des Kometen *67P/Tschurjumow-Gerasimenko* einschwenken um u.a. die Zusammensetzung des Staubschweifes zu bestimmen [51].

Bei der erstmals von Alfvén im Jahr 1954 formulierten Theorie zur Entstehung des Sonnensystems aus einer protoplanetaren Staubscheibe spielen die elektrostatischen Kräfte unter geladenen Mikropartikeln eine entscheidende Rolle. Die großen Objekte unseres Sonnensystems wie die Planeten, Monde, Asteroiden und Kometen gingen demnach aus der Verschmelzung und dem Wachstum von Mikropartikeln hervor [52]. Das Frühstadium des Sonnensystems wies demzufolge die Eigenschaften eines staubigen Plasmas auf. Unter bestimmten Bedingungen, z.B. in der intensiven UV-Strahlung eines neu entstandenen Sterns, können Staubpartikel unterschiedlicher Größe und Beschaffenheit in der gleichen Plasmaumgebung sowohl eine negative als auch eine positive Ladung annehmen. Dies könnte folglich zu einem beschleunigten Staubwachstum und schließlich zu den sogenannten *Planetesimalen* geführt haben [53, 31].

Im 18. Jahrhundert entdeckte William Herschel dunkle, scheinbar sternleere Gebiete in der Milchstraße. Durch photometrische Beobachtungen konnte schon in den 1930er Jahren gezeigt werden, dass es sich um interstellare Staubwolken handelt, welche das Licht dahinter liegender Sterne absorbieren [54]. Die Absorption ist dabei wellenlängen-

## 1. Einführung: Komplexe (staubige) Plasmen

abhängig und wird als *Extinktion* bezeichnet. Durch Spektralmessungen im Infrarotbereich konnten auch mikrometergroße Staubpartikel in interstellaren und zirkumstellaren Molekül- und Gaswolken nachgewiesen werden. Die Staubpartikel werden dabei in den Hüllen von roten Riesensternen gebildet und bestehen aus Silikaten, Graphit und amorphem Kohlenstoff bei einer Partikelgröße von ca. 0,05 bis 0,25  $\mu\text{m}$  [35]. Der Massenanteil der Staubpartikel in solchen Gaswolken liegt dabei typischerweise nur bei ca. 1%. Durch das interstellare Strahlungsfeld, welches vor allem junge, massereiche und sehr leuchtkräftige Sterne erzeugen, wird der Wasserstoff in Gas- und Molekülwolken ionisiert. In diesen *HII-Regionen*, welche die Hauptentstehungsgebiete für neue Sterne darstellen, können sich die Staubpartikel in dem ionisierten Gas aufladen und so die Entwicklung und Entstehung von protostellaren Kernen wesentlich beeinflussen. Die Verschmelzung von Staubteilchen zu größeren Kernen bewirkt dabei eine wachsende inhomogene Verteilung der Staubpartikel, was den globalen selbstgravitativen Kollaps der Gaswolke durch die elektrostatische Abstoßung der Kerne sowie durch turbulente Gasströmungen verhindern kann [55]. Lokal können somit in diesen riesigen ionisierten Gaswolken Millionen neuer Sterne entstehen, wie zum Beispiel im *Orionnebel*, siehe Abbildung 1.5. Die vielen offenen Detailfragen in der Theorie der Sternentstehung wurden und werden durch das Forschungsgebiet der staubigen oder komplexen Plasmen entscheidend inspiriert.

### 1.4. Aufladung von Staubteilchen in einem Plasma

Die Ladungsdichten und Temperaturen der Elektronen, Ionen, Neutralgasteilchen sowie der Staubteilchen stellen die zentralen Größen zur Charakterisierung eines staubigen oder komplexen Plasmas dar. Von fundamentaler Bedeutung ist zusätzlich die Oberflächenladung der Staubteilchen. Die Oberfläche eines Staubteilchens wird in einem Plasma von geladenen Plasmateilchen (Elektronen und Ionen) getroffen und durch Absorption elektrisch aufgeladen. Da die Elektronen aufgrund ihrer geringeren Masse im Vergleich zu den Ionen eine höhere thermische Geschwindigkeit besitzen, treffen Elektronen wesentlich häufiger auf die Oberfläche als die schwereren Ionen. Daher wird sich ein Staubteilchen in einem Plasma im Regelfall negativ aufladen. Die Folge ist, dass das Staubteilchen nun aufgrund der Coulombabstoßung Elektronen abstoßen und Ionen entsprechend anziehen. Der Ionenstrom wird also erhöht und der Elektronenstrom verringert. Dies geschieht so lange, bis beide Ströme gleich groß werden, der Nettostrom auf das Staubteilchen also Null wird. Das Staubteilchen hat dann eine Gleichgewichtsladung (oder Gleichgewichtspotenzial) erreicht, die sich im zeitlichen Mittel nicht mehr ändert. Um das Gleichgewichtspotenzial in Abhängigkeit der Plasmaparameter zu bestimmen, wird häufig die ursprünglich von Langmuir und Mott-Smith [2] entwickelte OML-Theorie (engl. Orbital Motion Limited) verwendet. Der Name „Limited“ bezieht sich dabei auf die Existenz einer oberen Grenze für den Drehimpuls (in Abhängigkeit der Energie) für alle Plasmateilchen, die zum Strom auf das (sphärische) Staubteilchen beitragen. Aus der OML-Theorie folgt dann ein Oberflächenpotenzial in Abhängigkeit des Massen- und Temperaturverhältnisses der Plasmateilchen (Elektronen und Ionen), jedoch nicht in Abhängigkeit des Radius des Staubteilchens. Zudem behält die OML-Theorie nur im

## 1.4. Aufladung von Staubteilchen in einem Plasma

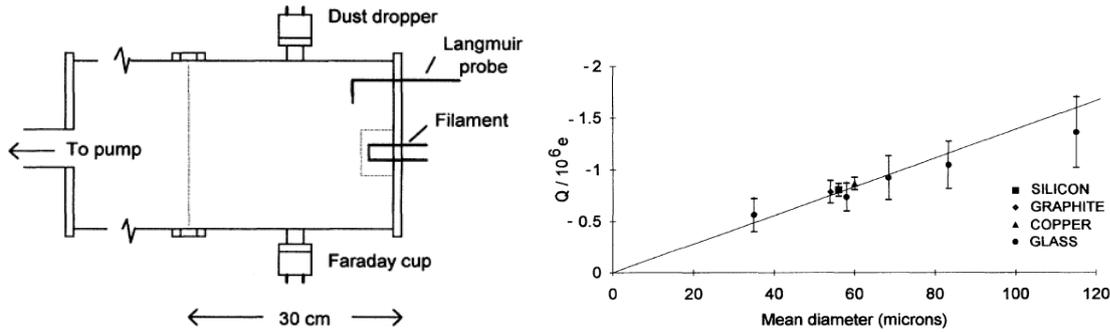


Abbildung 1.6.: Links: Schematische Darstellung eines experimentellen Aufbaus zur Messung der Oberflächenladung von Staubpartikeln. Die Staubpartikel fallen von oben durch eine Plasmakammer in einen Faraday-Behälter. Rechts: Die Oberflächenladung in Einheiten der Elementarladung von Silikon-, Graphit-, Kupfer- und Glaspartikeln in Abhängigkeit des Radius der Partikel. Es zeigt sich, dass die Staubteilchenladung proportional zum Radius ist. Bildmaterial aus Walch et al. [57].

Falle eines kleineren Radius im Vergleich zu den Debyelängen des betrachteten Plasmas ihre Gültigkeit. Für größere Radien muss die volle orbitale Bewegung der Plasmateilchen betrachtet werden, welche durch die wesentlich aufwändigere OM-Theorie (engl. Orbital Motion) beschrieben wird. Die OML- und OM-Theorie wird im nächsten Kapitel ausführlich vorgestellt und deren Gültigkeitsbereich diskutiert. Die Wechselwirkung mit Plasmateilchen stellt den hauptsächlichen Aufladungsprozess von Staubteilchen dar. Im Anhang A sind noch weitere Effekte beschrieben, welche die Ladung eines Staubteilchens unter bestimmten Bedingungen beeinflussen kann.

Erste Verfahren zur Messung der Staubteilchenladung wurden Mitte der 1990er Jahre entwickelt [56]. Abbildung 1.6 (links) aus Walch et al. [57] zeigt ein Experiment, in welchem Staubteilchen von oben in eine Plasmakammer eingestreut werden. Die Staubpartikel laden sich im Plasma elektrisch auf und fallen aufgrund der Schwerkraft durch die Plasmakammer in einen Faraday-Behälter. Der Faraday-Behälter wird auf einem definierten und konstantem Potenzial gehalten, weshalb ein Ladungsstrom gemessen werden kann, der wiederum von der Oberflächenladung der einzelnen Staubteilchen abhängt. Gemessen wurde die Oberflächenladung von Staubteilchen aus Silikon, Graphit, Kupfer und Glas bei einem Partikelradius zwischen  $30 \mu\text{m}$  und  $125 \mu\text{m}$ , womit die Staubteilchen klein gegenüber den Debyelängen in dem betrachteten Plasma ausfallen. Es zeigt sich ein linearer Anstieg der Staubteilchenladung mit dessen Größe, die Ladung ist also proportional zum Radius, siehe Abbildung 1.6 (rechts). Die Proportionalitätskonstante ist das Oberflächenpotenzial, welches sich aus der OML-Theorie ergibt. Der Zusammenhang zwischen dem Oberflächenpotenzial und der Oberflächenladung wird im Abschnitt 3.6 näher erläutert. Erhöht sich die Dichte der Staubpartikel, sodass der mittlere Abstand zwischen diesen in der Größenordnung der Debyelängen des Plasmas liegt, beobachtet man eine signifikante Reduzierung der Oberflächenladung im Vergleich zu einer geringeren Dichte [58]. Dieser Effekt wird durch die gegenseitige Beeinflussung der

## 1. Einführung: Komplexe (staubige) Plasmen

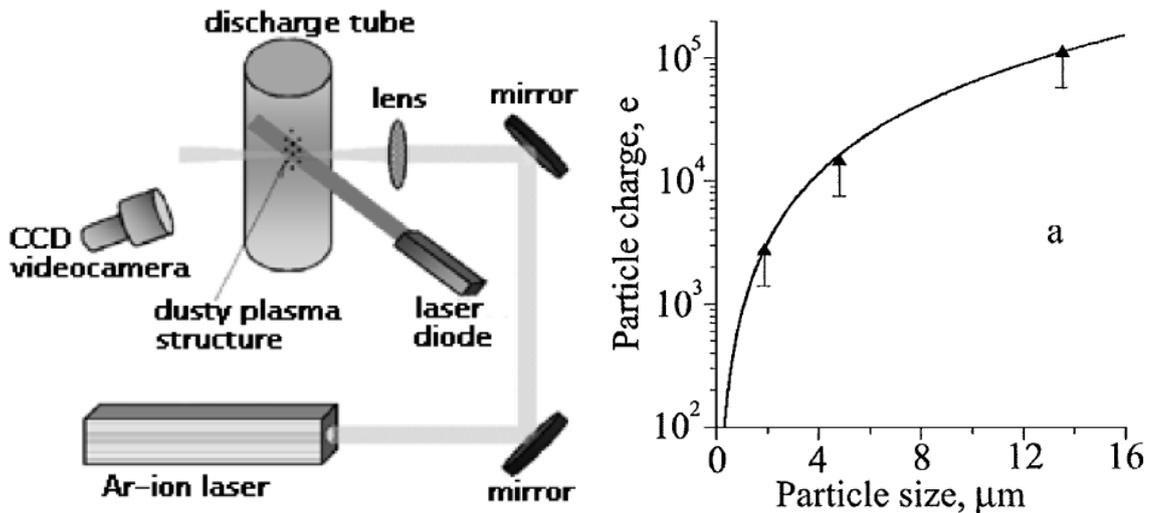


Abbildung 1.7.: Links: Schematische Darstellung eines experimentellen Aufbaus zur Messung der Oberflächenladung von Staubpartikeln. Mit einem Argon-Laser bei einer Strahldicke von ca.  $60 \mu\text{m}$  können mikrometergroße Partikel ( $< 15 \mu\text{m}$ ) einige Millimeter aus der Staubstruktur hinausbewegt werden, wobei die Oberflächenladung durch die Laserenergie nicht beeinflusst wird. Rechts: Die Oberflächenladung in Einheiten der Elementarladung von Partikeln aus Melamin-Formaldehydharz der Größe  $1,87 \mu\text{m}$ ,  $4,82 \mu\text{m}$  und  $13,57 \mu\text{m}$ . Es zeigt sich ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen der Oberflächenladung und dem Partikelradius. Bildmaterial aus Fortov et al. [62].

Ladungsströme aufgrund der starken Kopplung der Staubteilchen untereinander sowie die damit verbundene Abnahme der Plasmadichte innerhalb des Staubteilchenclusters oder Plasmakristalls hervorgerufen, wie mittels numerischer Simulationen gezeigt werden konnte [45, 59]. Eine Messung der Ladung von Staubpartikeln bei hoher Staubteilchendichte kann dabei indirekt über eine *Langmuirsonde* erfolgen, welche eine modifizierte Strom-Spannungs-Kennlinie im Vergleich zu einem staubfreien Plasma aufweist [58]. Auch die direkte Beobachtung eines komplexen Laborplasmas mit CCD-Kameras lässt Rückschlüsse auf die Oberflächenladung von mikrometergroßen Staubpartikeln zu. Aus den Trajektorien von elastischen Stößen unter Staubteilchen können die Ladungsgrößen der Stoßpartner bestimmt werden [60]. Geladene Staubteilchen können zwischen den Entladungselektroden in einem Schwebezustand (Levitation) gehalten werden, indem die Schwerkraft durch die elektrostatische Abstoßung der unteren Elektrode kompensiert wird. Aus der Schwebehöhe über den Elektroden lässt sich dann die Ladung der Partikel bestimmen [61]. Mit Hilfe von Lasern können in einem Plasmakristall Schwingungen angeregt werden, aus dessen Struktur und Frequenz die Ladung der Partikel im Kristall berechnet werden kann [63, 64, 65].

Abbildung 1.7 (links) aus Fortov et al. [62] zeigt ein weiteres Experiment, in welchem mittels eines Argon-Lasers ein einzelnes mikrometergroßes Staubpartikel aus dem Plasmakristall hinausbewegt werden kann. Fällt es in die Staubstruktur zurück, lässt sich

aus der Trajektorie auf die Ladung des Partikels schließen. Im Unterschied zu Abbildung 1.6 (rechts) wurde in diesem Experiment kein linearer Zusammenhang zwischen dem Partikelradius und der Oberflächenladung gemessen, siehe Abbildung 1.7 (rechts). Obwohl die Staubteilchen mit einem Radius von  $< 15 \mu\text{m}$  ebenfalls deutlich kleiner als die Debyelängen des Laborplasmas ausfallen, ist hier die OML-Theorie mit einem konstanten Oberflächenpotenzial nicht anwendbar. Denn mit einer Plasmadichte im Bereich von  $10^8/\text{cm}^3$  liegt die mittlere freie Weglänge der Ionen in der Größenordnung der linearisierten Debyelänge (siehe Anhang C), wodurch Teilchenstöße nicht mehr vernachlässigt werden können, welche in der OML-Theorie jedoch nicht berücksichtigt werden.

Als Alternative und Ergänzung gegenüber relativ aufwändigen Experimenten bieten numerische Simulationen die Möglichkeit, die grundlegenden physikalischen Prozesse und Effekte der Aufladung von Staubteilchen in einem Plasma sehr detailreich zu modellieren. Hierbei werden zwei Grundtypen von Simulationen unterschieden. Zum einen kann das Plasma hydrodynamisch in einem Flüssigkeitsmodell beschrieben werden, wobei Elektronen, Ionen und Staubteilchen als elektromagnetisch in Wechselwirkung stehende Flüssigkeiten behandelt werden. Zum anderen wird ein rein kinetischer Ansatz verfolgt, in welchem die Bewegungsgleichungen der Plasmateilchen numerisch direkt integriert werden. Dieses sogenannte *Particle-In-Cell* (PIC) Verfahren wird im Kapitel 3 ausführlich vorgestellt. Flüssigkeitsmodelle erfordern im Allgemeinen im Vergleich zu den PIC-Simulationen einen numerisch geringeren Aufwand, allerdings liefert die Lösung der Kontinuitätsgleichung lediglich eine zeitlich wie räumlich gemittelte Ladungs- und Energiedichte des Plasmas. Das aufwändigere PIC-Verfahren simuliert die kinetischen Prozesse in einem Plasma elementarer und detailreicher. Numerische Flüssigkeitsmodelle eignen sich insbesondere, um das Wachstum und den Transport von Staubpartikeln zu studieren.

Bartoš et al. [66] verwendet ein numerisches Hybridmodell, um die Oberflächenladung von Staubteilchen verschiedener Größe zu bestimmen, wobei die Partikelgröße nur in einem Bereich variiert wurde, welcher stets deutlich kleiner als die Debyelängen des betrachteten Plasmas ausfällt. Somit ergab sich ähnlich wie in Abbildung 1.6 (rechts) gezeigt ein linearer Zusammenhang zwischen Oberflächenladung und Staubteilchenradius. In dem numerischen Hybridmodell ist hierzu zunächst mit einem Flüssigkeitsmodell ein Potenzialprofil des Staubteilchens ermittelt worden, mit welchem dann über einen kinetischen Ansatz eine Gleichgewichtsladung berechnet wurde.

In Willis et al. [67] ist mit einem PIC-Modell und einem ortfesten Staubteilchen das Gleichgewichtspotenzial von Staubpartikeln verschiedener Größe bestimmt worden, wobei die Partikelradien sowohl größer als auch kleiner als die Debyelängen des Plasmasystems gewählt wurden. Das Oberflächenpotenzial steigt dabei vom Betrag her mit dem Radius an, wenn dieser in die Größenordnung der Debyelänge der Ionen gelangt. Die Ergebnisse entsprechen denen aus der OML-Theorie, welche im Abschnitt 2.3 ausführlich diskutiert werden wird. Verwendet wurde der von Hutchinson [68] entwickelte *SCEPTIC*-Code, welcher teilweise auf dem PIC-Verfahren beruht. Dabei sind nur die Ionen als stoßfreie, kinetische Komponenten simuliert worden, die Elektronendichte zur Lösung der Poissongleichung auf dem numerischen Gitter ist stets durch eine Boltzmannverteilung berücksichtigt worden. Ebenfalls mit dem *SCEPTIC*-Code ist in Hutchinson

[69] das (schwebende) Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht eines sphärischen Objekts bestimmt worden, wobei zusätzlich eine Ionenströmung angesetzt wurde. Die Relativbewegung zwischen den Ionen und dem Objekt verursacht dabei einen betragsmäßigen Anstieg des Oberflächenpotenzials mit der Driftgeschwindigkeit der Ionen.

In Gatsonis et al. [70] werden PIC-Simulationen in einem zweidimensionalen numerischen Gitter vorgestellt, wobei drei kinetische Komponenten berücksichtigt werden: Elektronen, Ionen und Staubteilchen, wobei die Staubteilchen eine zeitlich variable Ladung besitzen. Die Oberflächenladung der Staubteilchen ist in jedem Zeitschritt der Simulation über eine statistische Anzahl von Teilchenabsorptionen bestimmt worden, welche durch eine *Monte-Carlo-Methode* beschrieben wurde. Neben dem Vergleich des zeitlichen Verlaufs der Oberflächenladung von einzelnen Staubteilchen mit der OML-Theorie sind insbesondere „Wolken“ aus Staubteilchen simuliert worden. Hierbei zeigt sich, dass die Ladung der Staubteilchen innerhalb der Wolke mit steigender Staubteilchendichte abnimmt, wie oben erwähnt auch in Experimenten beobachtet werden konnte [58]. Ebenfalls zweidimensionale PIC-Simulationen mit ortsfesten Staubteilchen werden in Young et al. [59] behandelt. Dabei werden sehr große Partikel sowie Debyelängen im Zentimeterbereich betrachtet, was insbesondere für astrophysikalische Systeme von Interesse ist. Neben dem Gleichgewichtspotenzial eines einzigen Staubteilchens wird auch ein Gitter aus insgesamt 16 ( $4 \times 4$ ) Staubteilchen im Abstand der Größenordnung einer Debyelänge simuliert. Auch hier zeigt sich eine signifikante Abnahme der Oberflächenladung in dem Gitter aus Staubteilchen.

### 1.5. Staubige Magnetplasmen

Eine vollständige Beschreibung und Untersuchung von komplexen (staubigen) Plasmen muss den Einfluss von Magnetfeldern beinhalten. Denn sowohl Laborplasmen als auch insbesondere astrophysikalische Plasmen werden ständig von externen Magnetfeldern durchdrungen und überlagert. Ein Magnetfeld fügt dem Plasmasystem dabei einen weiteren Parameter hinzu, wodurch neue Eigenschaften und Effekte hervorgerufen werden können. Einer dieser Effekte ist die Kopplung der Bewegung der Plasmateilchen (Elektronen und Ionen) an die Magnetfeldlinien aufgrund der Lorentzkraft, siehe Abschnitt 2.4.1. Erste Beschreibungen eines Plasmas in einem externen Magnetfeld wurden im Rahmen der Plasmasondentheorie bereits in den 1930er Jahren veröffentlicht [71]. Sammartin [72] sowie Laframboise und Rubinstein [73, 74, 75, 76] haben in den 1970er und 1980er Jahren numerische Berechnungen insbesondere des Elektronenstroms in Abhängigkeit des Sondenpotenzials durchgeführt (siehe Abschnitt 2.4.2). Im Vergleich zu nicht-magnetisierten Plasmen wird die Modellierung der Strom-Spannungs-Kennlinie sowie des Potenzialverlaufs von Plasmasonden zum einen durch die Anisotropie des Magnetoplasmas erheblich verkompliziert, zum anderen müssen Stöße mit Neutralgasteilchen insbesondere bei starken Magnetfeldern berücksichtigt werden, was den kinetischen Gleichungen durch die Transportkoeffizienten einen statistischen Charakter verleiht [77]. Denn durch die Kopplung der Elektronen an das Magnetfeld erhöht sich die Wahrscheinlichkeit der Stoßionisation von Neutralgasteilchen. In Verbindung mit der Betrachtung

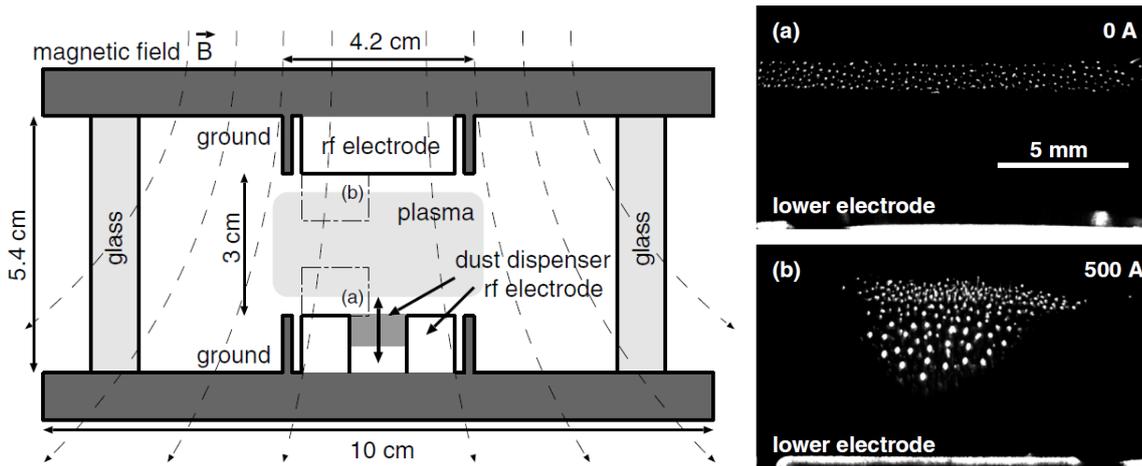


Abbildung 1.8.: Links: Schematische Darstellung eines experimentellen Aufbaus zur Erzeugung eines komplexen Plasmas. In der kapazitiv gekoppelten (RF) Plasmaentladung werden Plastikugeln (Durchmesser  $4,5 \mu\text{m}$ ) injiziert und ein inhomogenes Magnetfeld überlagert. Die Bereiche (a) und (b) können mit einer Kamera aufgenommen werden. Rechts oben: Ohne ein überlagertes Magnetfeld ordnen sich die geladenen Plastikugeln in einer regelmäßigen Struktur an. Rechts unten: In einem überlagerten Magnetfeld von  $0,04 \text{ T}$  sind Vereinigungen zu größeren Agglomeraten zu erkennen, welche über der unteren Elektrode schweben. Bildmaterial aus Samsonov et al. [83].

von Satelliten und Raumsonden in der Iono- und Magnetosphäre der Erde ist die Aufladung von Objekten in einem Magnetoplasma ebenfalls behandelt worden. In Whipple [78, 42] wird der Ladungsstrom auf ein ungeladenes, sphärisches Objekt in Abhängigkeit des wahrscheinlichsten Gyrationradius (siehe Gleichung (2.49)) in einer Geschwindigkeitsverteilung der Plasmateilchen nach Maxwell bestimmt, siehe Abbildung 2.15 und die Herleitung im Abschnitt 2.4.2.

Erste Laborexperimente mit komplexen Plasmen unter dem Einfluss von magnetischen Feldern wurden Ende der 1990er Jahre vorgenommen [79]. Die beiden größten derzeit im Betrieb befindlichen Versuchsaufbauten zur Erforschung von komplexen Magnetoplasmen werden an der Universität in Kiel (*Dustwheel*) und am Max Planck Institut in Garching (*Para-Magnetic Laboratory*) betrieben [80, 81, 82]. In Konopka et al. [84] wird ein Experiment vorgestellt, in welchem einer Argon-Entladung mit mikrometergroßen Staubteilchen ein konstantes magnetisches Feld von  $10^{-2} \text{ T}$  überlagert wurde, wobei eine Rotation des Plasmakristalls in einer Ebene senkrecht zur Magnetfeldrichtung beobachtet werden konnte [84]. Die Rotation wird dabei nicht durch die magnetische Lorentzkraft verursacht, sondern ist auf eine Reibungskraft (engl. drag force) der Argonionen auf die Staubteilchen zurückzuführen, welche aufgrund der  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift auftritt. Der Ladungsstrom von Plasmateilchen auf ein Staubteilchen in einem Magnetfeld ist also nicht mehr rotationssymmetrisch, wie im Abschnitt 2.4.2 ausführlich diskutiert werden wird. In einem weiteren Laborexperiment mit einem inhomogenen Magnetfeld (siehe Abbildung 1.8, links) konnten magnetische Staubteilchen (bestehend aus Plastikugeln

## 1. Einführung: Komplexe (staubige) Plasmen

mit einem Eisenanteil) in einem Schwebezustand über den Elektroden gehalten werden, indem durch die magnetische Kraft die Gravitationskraft vollständig kompensiert wurde [83]. In Abhängigkeit der Magnetfeldstärke sowie der Schwebehöhe kann die Ladung der Staubteilchen sowie die Dicke der Plasmarandschicht abgeleitet werden. Das überlagerte Magnetfeld kann also als ein Diagnoseinstrument für das komplexe Plasma verwendet werden. Durch die magnetische Anziehung aufgrund des induzierten magnetischen Moments in den Staubteilchen konnten auch Vereinigungen zu größeren Agglomeraten beobachtet werden (siehe Abbildung 1.8, rechts), dessen Rate von der Magnetfeldstärke abhängt, da die geladenen Staubteilchen eine ausreichende kinetische Energie besitzen müssen, um das elektrostatische Abstoßungspotenzial zu überwinden [83]. Wie bereits im letzten Abschnitt erwähnt, sind derartige Wachstumsprozesse insbesondere für die Modellierung der Entstehung des Sonnensystems interessant. In der Bauphase befindet sich derzeit das *MDPX* (engl. Magnetized Dusty Plasma eXperiment, Auburn Universität), welches die bislang größte Plasmakammer erhalten und sehr variable Versuchsparameter bezüglich der Magnetfeldkonfiguration erlauben wird [85].

Mit Hilfe von numerischen Simulationen ist in Land [86] die Bildung der oben erwähnten staubleeren Gebiete (Voids, siehe Abbildung 1.3) unter dem Einfluss eines axialen und homogenen Magnetfeldes untersucht worden. Die Entstehung eines Voids erfordert eine höhere Ionisationsrate in der Mitte der Plasmakammer als in den äußeren Bereichen der Elektroden, da die Staubteilchen durch Stöße mit Ionen aus der Mitte verdrängt werden. Die Elektronen des Plasmas werden durch die negativ geladenen Staubteilchen geheizt, was in Verbindung mit dem elektrischen Feld der Elektroden zu einem Gradienten in der Elektronentemperatur führt. Wie in den Simulationen gezeigt wird, verursacht dieser Temperaturgradient einen Wärme- und Energiefluss in die Mitte der Entladungskammer, was zu der erhöhten Ionisationsrate und schließlich zu dem staubfreien Void führt. In einem Magnetfeld verändert sich die ambipolare Diffusion der Elektronen und Ionen, weshalb sich der Void wesentlich schneller ausbilden kann, auch wenn der magnetische Fluss zu gering ist, um die Ionen direkt zu magnetisieren. Die Oberflächenladung der Staubteilchen wird dabei stets mittels der OML-Theorie (siehe Kapitel 2.1) bestimmt, wobei eine Beeinflussung der Oberflächenladung durch das Magnetfeld in dem numerischen Modell nicht berücksichtigt wird.

Mit dem bereits oben erwähnten SCEPTIC-Code [68] haben Hutchinson und Patacchini [87, 88] den Ionenstrom auf eine Plasmasonde unter dem Einfluss eines äußeren, konstanten und homogenen Magnetfeldes bestimmt. Im Falle einer relativ schwachen Magnetisierung der Ionen, d.h. wenn der Gyrationradius viel größer als der Radius der Sonde ist, nimmt der Ionenstrom dabei mit ansteigendem magnetischem Fluss linear ab, unabhängig von den Plasmametern wie der IONENTemperatur. Zudem ist in Patacchini et al. [89] mit dem SCEPTIC-Code das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht eines sphärischen Objekts in Abhängigkeit eines äußeren Magnetfeldes bestimmt worden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 2.18 dargestellt und werden im Abschnitt 2.4.2 diskutiert.

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

In einem Plasma nehmen Staubteilchen aufgrund der Wechselwirkung mit den Plasmateilchen eine Gleichgewichtsladung (oder Gleichgewichtspotenzial) an, welche sich im zeitlichen Mittel nicht mehr ändert. Um dieses Gleichgewichtspotenzial in Abhängigkeit der Plasmaparameter zu bestimmen, wird häufig die ursprünglich von Langmuir und Mott-Smith [2] entwickelte OML-Theorie (engl. Orbital Motion Limited) verwendet. Der Name „Limited“ bezieht sich dabei auf die Existenz einer oberen Grenze für den Drehimpuls (in Abhängigkeit der Energie) für alle Plasmateilchen, die zum Strom auf das (sphärische) Staubteilchen beitragen. Aus der OML-Theorie folgt dann ein Oberflächenpotenzial in Abhängigkeit des Massen- und Temperaturverhältnisses der Plasmateilchen (Elektronen und Ionen), jedoch nicht in Abhängigkeit des Radius des Staubteilchens. Zudem behält die OML-Theorie nur im Falle eines kleineren Radius im Vergleich zu den Debyelängen des betrachteten Plasmas ihre Gültigkeit. Für größere Radien muss die volle orbitale Bewegung der Plasmateilchen betrachtet werden, welche durch die wesentlich aufwändigere OM-Theorie (engl. Orbital Motion) beschrieben wird. In diesem Kapitel werden die OML- und die OM-Theorie vorgestellt und deren Gültigkeitsbereich diskutiert, sowohl für den dreidimensionalen (sphärischen) als auch für den zweidimensionalen (zylindersymmetrischen) Fall. Im letzten Abschnitt wird der Einfluss eines externen magnetischen Feldes auf das Gleichgewichtspotenzial diskutiert. Durch die Überlagerung eines externen Magnetfeldes erhält das Plasma einen zusätzlichen Freiheitsgrad, welcher die Plasmaeigenschaften erheblich beeinflussen kann. Durch die Bindung der Plasmateilchen an die Magnetfeldlinien verliert der Ladungsstrom auf ein sphärisches Staubteilchen die Rotationssymmetrie, welche in der OML- und OM-Theorie stets angenommen wird.

### 2.1. Die Orbital Motion Limited (OML) Theorie

Im Folgenden sei ein negativ geladenes Staubteilchen mit dem Radius  $R$  betrachtet, welches ein attraktives Potenzial für (positive) Ionen darstellt. In Abbildung 2.1 ist schematisch die Bahn eines im Coulombfeld des Staubteilchens abgelenkten Ions gezeigt, wobei  $v_\infty$  die anfängliche Geschwindigkeit und  $\sigma$  der Stoßparameter des Ions ist. Für die Energie- und Drehimpulserhaltung gilt:

$$E = \frac{1}{2}m_i v_\infty^2 = \frac{1}{2}m_i(v_r^2 + v_\phi^2) + eV(r) = \frac{1}{2}m_i v_r^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{const.} \quad (2.1)$$

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

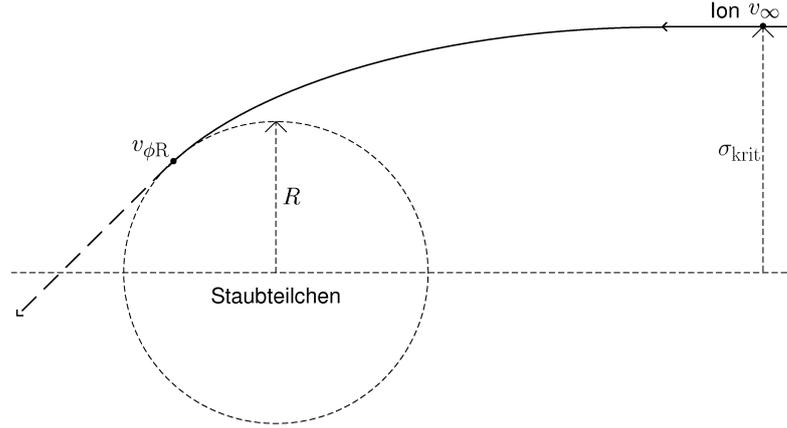


Abbildung 2.1.: Ein aus dem unendlichen kommendes Ion streift die Oberfläche eines negativ geladenen Staubteilchens tangential.

und

$$J = m_i v_\infty \sigma = \text{const.} \quad , \quad (2.2)$$

wobei  $m_i$  die Masse,  $v_r$  und  $v_\phi$  die radiale und tangentielle Geschwindigkeit des Ions ist. Zudem sei  $V(r)$  das Potenzial des Staubteilchens bei  $r$ . Das *effektive* Potenzial  $V_{\text{eff}}(r)$  ist durch

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m_i v_\phi^2 + eV(r) = \frac{J^2}{2m_i r^2} + eV(r) = E \frac{\sigma^2}{r^2} + eV(r) \quad . \quad (2.3)$$

gegeben. Die Bewegung des Teilchens ist dabei stets auf  $V_{\text{eff}}(r) \leq E$  beschränkt. Der kritische Stoßparameter bzw. Drehimpuls, bei dem ein Ion die Oberfläche des Staubteilchens tangential streift, sei  $\sigma_{\text{krit}}$  bzw.  $J_{\text{krit}}$ . Die Radialgeschwindigkeit ist dann gleich Null ( $v_r = 0$ ) und das effektive Potenzial gleich der Gesamtenergie ( $E = V_{\text{eff}}(R, \sigma_{\text{krit}})$ ). Aus der Energie- und Drehimpulserhaltung folgt demnach:

$$E = \frac{1}{2} m_i v_{\phi R}^2 + eV_R = \frac{J_{\text{krit}}^2}{2m_i R^2} + eV_R = E \frac{\sigma_{\text{krit}}^2}{R^2} + eV_R \quad (2.4)$$

und

$$J_{\text{krit}} = m_i v_\infty \sigma_{\text{krit}} = m_i v_{\phi R} R \quad , \quad (2.5)$$

wobei  $v_{\phi R}$  die (tangentielle) Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Staubteilchens ist und  $eV_R$  das Potenzial auf der Oberfläche ( $V(R) = V_R$ ). Aus den Erhaltungsgrößen lässt sich nun der kritische Stoßparameter und der kritische Drehimpuls in Abhängigkeit der Energie des Ions, des Radius und Oberflächenpotenzials des Staubteilchens darstellen:

$$\sigma_{\text{krit}} = R \sqrt{1 - \frac{eV_R}{E}} \quad (2.6)$$

und

$$J_{\text{krit}} = R\sqrt{2m_i(E - eV_R)} \quad . \quad (2.7)$$

Im Folgenden sei ein Coulomb-Potenzial der Form

$$V(r) = V_R \frac{R}{r} \quad (2.8)$$

betrachtet. In Abbildung 2.2 ist das effektive Potenzial aus (2.3) mit dem Coulomb-Potenzial (2.8) dargestellt.  $V_{\text{eff}}(r, \sigma)$  ist dabei auf die Gesamtenergie  $E$ , die Abstände  $r$  und  $\sigma$  sind auf den Radius  $R$  des Staubteilchens normiert. Die Gesamtenergie sei dabei durch den dimensionslosen Streuparameter  $\alpha$  bestimmt:

$$\alpha = \frac{|eV_R|}{2E} \quad . \quad (2.9)$$

Abbildung 2.2 zeigt  $V_{\text{eff}}(r, \sigma)$  für  $\alpha = 0, 2$  und fünf verschiedene Stoßparameter. In Abbildung 2.3 sind die entsprechenden Teilchenbahnen dargestellt. Die Teilchenbahnen beginnen ungestört am rechten Rand (im Unendlichen) und enden auf der Oberfläche des Staubteilchens, falls das Teilchen absorbiert wird. Der kritische Stoßparameter ist hier  $\sigma_{\text{krit}}/R = 1, 2$ . Für  $\sigma = \sigma_{\text{krit}}$  streift das Teilchen die Oberfläche gerade tangential, da dort das effektive Potenzial gleich der Gesamtenergie ist ( $V_{\text{eff}}(R, \sigma_{\text{krit}}) = E$ ). Ist  $\sigma > \sigma_{\text{krit}}$ , können die Teilchen die Oberfläche nicht erreichen, da sie bei einem  $r > R$  reflektiert werden. Nur Teilchen mit  $\sigma \leq \sigma_{\text{krit}}$  können die Oberfläche erreichen. Für das Coulomb-Potenzial (2.8) werden also alle Ionen, die einen Stoßparameter bzw. Drehimpuls kleiner als  $\sigma_{\text{krit}}(E)$  bzw.  $J_{\text{krit}}(E)$  besitzen vom Staubteilchen absorbiert. Somit lässt sich nun der Ionenstrom auf die Oberfläche des Staubteilchens folgendermaßen ausdrücken, wobei die Integration bei genügend großem Abstand  $r$  vom Staubteilchen betrachtet wird:

$$dI_i = \begin{cases} e f^n(\vec{v}) v_r d^n v & \text{für } J \leq J_{\text{krit}} \\ 0 & \text{für } J > J_{\text{krit}} \end{cases} \quad , \quad (2.10)$$

wobei  $f^n(\vec{v})$  die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit und  $v_r$  die radiale Geschwindigkeit der Ionen ist. Der Index  $n$  steht für die Dimension des betrachteten Systems. Im Folgenden werden der drei- und zweidimensionale Fall behandelt.

### 2.1.1. Dreidimensionaler Fall

Das Integral über (2.10) ergibt für  $n = 3$ :

$$I_i = 4\pi r^2 \int_{J \leq J_{\text{krit}}} e f^{3D}(\vec{v}) v_r d^3 v \quad . \quad (2.11)$$

Die radiale Geschwindigkeit  $v_r$  und das Geschwindigkeitsdifferential  $d^3 v$  lassen sich mit (2.1) und (2.2) durch  $E$  und  $J$  ausdrücken:

$$v_r(r) = \sqrt{\frac{2}{m_i}(E - eV(r)) - \frac{J^2}{m_i^2 r^2}} \quad (2.12)$$

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

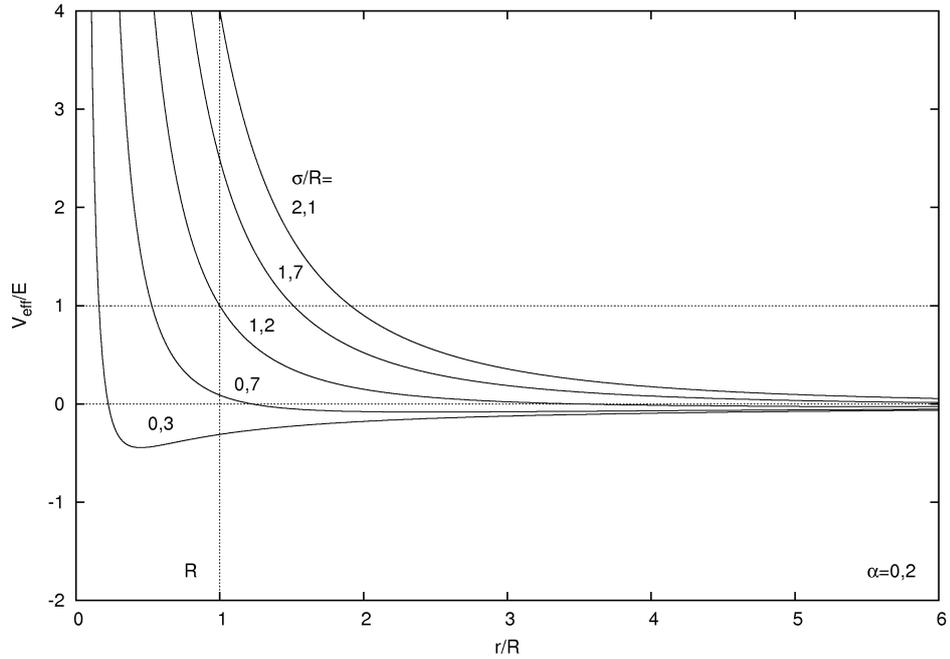


Abbildung 2.2.: Das normierte effektive Potenzial mit dem Coulomb-Potenzial (2.8) für einen Streuparameter  $\alpha = 0,2$  und fünf Stoßparameter  $\sigma/R$ . Alle Abstände sind auf den Radius  $R$  des Staubteilchens normiert. Für den kritischen Stoßparameter  $\sigma_{\text{krit}}/R = 1,2$  ist das effektive Potenzial auf der Oberfläche des Staubteilchens gleich der Gesamtenergie  $E$ .

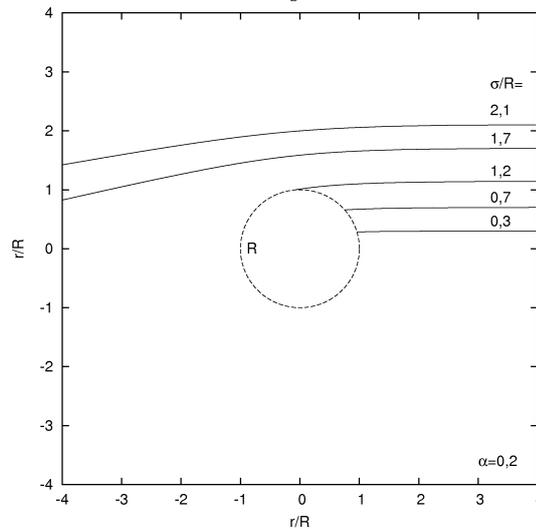


Abbildung 2.3.: Die entsprechenden Teilchenbahnen nach Abbildung 2.2. Die Teilchenbahnen beginnen ungestört am rechten Rand (im Unendlichen) und enden auf der Oberfläche des Staubteilchens mit dem Radius  $R$ , falls das Teilchen absorbiert wird. Alle Abstände sind auf den Radius  $R$  normiert. Für den kritischen Stoßparameter  $\sigma_{\text{krit}}/R = 1,2$  streift das Teilchen die Oberfläche tangential. Nur Teilchen mit  $\sigma \leq \sigma_{\text{krit}}$  können die Oberfläche erreichen, Teilchen mit  $\sigma > \sigma_{\text{krit}}$  werden reflektiert.

und

$$d^3v = \frac{2\pi J}{m_i^3 r^2 v_r} dJ dE \quad . \quad (2.13)$$

Für die Verteilungsfunktion  $f^3(\vec{v})$  der Geschwindigkeit wird eine Maxwellverteilung angesetzt:

$$f_M^{3D}(\vec{v}) = n_0 \left( \frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} e^{-E/kT_i} \quad , \quad (2.14)$$

wobei  $n_0$  die Ionendichte bei großem  $r$  und  $T_i$  die Iontemperatur ist. Nun werden (2.13) und (2.14) in (2.11) eingesetzt:

$$I_i = en_0 \sqrt{\pi} \left( \frac{2}{m_i k T_i} \right)^{3/2} \int_0^\infty \int_0^{J_{\text{krit}}} dJ dE J e^{-E/kT_i} \quad . \quad (2.15)$$

Die obere Integrationsgrenze  $J_{\text{krit}}$  ist durch (2.7) gegeben. Nach Integration ergibt sich der Ionenstrom zu:

$$I_i = 4\pi R^2 en_0 \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i}} \left( 1 - \frac{eV_R}{kT_i} \right) \quad . \quad (2.16)$$

Um nun das Oberflächenpotenzial  $eV_R$  zu erhalten muss noch der Elektronenstrom  $I_e$  auf das negativ geladene Staubeilchen bestimmt werden. Analog zu (2.15) lautet der Elektronenstrom:

$$I_e = -en_0 \sqrt{\pi} \left( \frac{2}{m_e k T_e} \right)^{3/2} \int_{-eV_R}^\infty \int_0^{J_{\text{krit}}} dJ dE J e^{-E/kT_e} \quad , \quad (2.17)$$

wobei die untere Integrationsgrenze der Energie hier auf das Oberflächenpotenzial  $-eV_R$  gesetzt werden muss, da die Elektronen mindestens diese kinetische Energie besitzen müssen, um die Oberfläche des Staubeilchens erreichen zu können.  $J_{\text{krit}}$  ist wieder durch (2.7) gegeben, wobei ein Vorzeichenwechsel von  $V_R$  beachtet werden muss, da es sich für Elektronen um ein abstoßendes Oberflächenpotenzial handelt. Die Integration von (2.17) ergibt den Elektronenstrom zu:

$$I_e = -4\pi R^2 en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} e^{eV_R/kT_e} \quad . \quad (2.18)$$

Der Ionenstrom (2.16) nimmt also mit  $-V_R/T_i$  linear zu, während der Elektronenstrom (2.18) mit  $-V_R/T_e$  exponentiell abfällt. Das Oberflächenpotenzial wird in einem Plasma mit konstanter Temperatur einen Wert annehmen, der den Ionen- und Elektronenstrom gleich groß werden lässt. Das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht ergibt sich demnach aus  $I_i + I_e = 0$ . Mit (2.16) und (2.18) folgt:

$$\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \left( 1 - \frac{\eta_R}{\beta} \right) e^{-\eta_R} \quad , \quad (2.19)$$

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

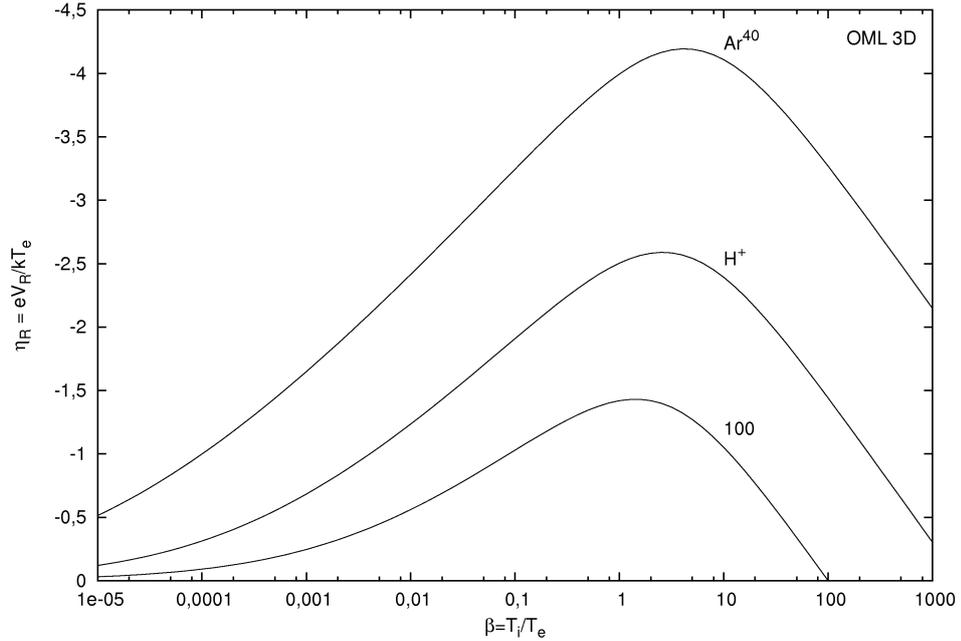


Abbildung 2.4.: Das normierte Oberflächenpotenzial  $\eta_R = eV_R/kT_e$  aus (2.19) in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses  $\beta$ . Für das Massenverhältnis (Ionen- zu Elektronenmasse,  $m_i/m_e$ ) wurde 1836,2 (Wasserstoff  $H^+$ ), 73.609 (Argon  $Ar^{40}$ ) und 100 angenommen, welches oft in numerischen Simulationen verwendet wird.

wobei  $\beta$  das Verhältnis von Ionen- zu Elektronentemperatur ist,  $T_i/T_e$ , und  $\eta_R$  das normierte Oberflächenpotenzial,  $eV_R/kT_e$ . Zu beachten ist, dass (2.19) nicht vom Radius  $R$  des Staubteilchens abhängt, sondern nur noch vom Massenverhältnis  $m_i/m_e$  und dem Temperaturverhältnis  $\beta$ .

Abbildung 2.4 zeigt das normierte Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  aus (2.19) in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses  $\beta$ . Für das Massenverhältnis (Ionen- zu Elektronenmasse,  $m_i/m_e$ ) wurde hier 1836,2 (Wasserstoff  $H^+$ ), 73.609 (Argon  $Ar^{40}$ ) und 100 angesetzt, welches oft in numerischen Simulationen verwendet wird. Sind die Elektronen- und Iontemperatur gleich ( $\beta = 1, T_e = T_i = T$ ) ergibt sich das Oberflächenpotenzial zu  $V_R(H^+) = -2,5kT/e$ ,  $V_R(Ar^{40}) = -3,99kT/e$  und  $V_R(100) = -1,42kT/e$ . Je größer das Massenverhältnis, desto größer fällt der Betrag des Oberflächenpotenzials aufgrund der jeweils geringeren kinetischen Energie der Ionen aus. Bei sehr kleinen Temperaturverhältnissen geht das Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  asymptotisch gegen Null. Denn verfügen die Ionen nur über eine sehr geringe kinetische Energie im Vergleich zu den Elektronen, werden diese vom negativen Oberflächenpotenzial nahezu radial auf das Staubteilchen beschleunigt und auch absorbiert, wobei die Anzahl der reflektierten Ionen mit kleiner werdendem  $\beta$  immer geringer wird. Steigt dagegen das Temperaturverhältnis an, werden immer mehr Ionen aufgrund der höheren kinetischen Energie vom Staubteilchen reflektiert, weshalb der Strom von Elektronen und Ionen im Gleichgewicht sinkt, wodurch der Betrag des negativen Oberflächenpotenzials entsprechend ansteigt. Das Oberflächenpo-

tenzial kann jedoch nur solange mit dem Temperaturverhältnis zunehmen, wie es vom Betrag größer als  $\beta$  ausfällt. Ist der Betrag des Oberflächenpotenzials gleich dem Temperaturverhältnis, ist ein Maximum erreicht und das Oberflächenpotenzial fällt wieder ab. Denn ist die kinetische Energie der Ionen größer als der Betrag des Oberflächenpotenzials, nähern sich die Ionen dem kinetischen Energieniveau der Elektronen an und der Betrag des Oberflächenpotenzials sinkt wieder. Stimmen schließlich das Massenverhältnis und das Temperaturverhältnis überein, besitzen die Ionen die gleiche kinetische Energie wie die Elektronen und das Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  verschwindet.

Aus dem Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht lässt sich über einen Kapazitätswert auch die Oberflächenladung bestimmen, wie im Abschnitt 3.6 diskutiert ist.

### 2.1.2. Zweidimensionaler Fall

Betrachtet man nur die Bewegung von Plasmateilchen in der Ebene, so stellt sich der Ionenstrom analog zu (2.11) wie folgt dar:

$$I_i = 2\pi r \int_{J \leq J_{\text{krit}}} e f^{2D}(\vec{v}) v_r d^2v \quad . \quad (2.20)$$

Das Geschwindigkeitsdifferential  $d^2v$  lautet:

$$d^2v = \frac{2\pi}{m_i} dE \quad . \quad (2.21)$$

Für die radiale Geschwindigkeit in (2.20) wird  $v_r(R)$  aus (2.12) mit dem Oberflächenpotenzial  $V(R) = V_R$  eingesetzt:

$$v_r(R) = \sqrt{\frac{2}{m_i}(E - eV_R)} \quad , \quad (2.22)$$

wobei  $J = 0$  auf der Oberfläche des nun zweidimensionalen, also zylinderförmigen Staubteilchens angenommen wird. Mit der zweidimensionalen Maxwellverteilung der Geschwindigkeit

$$f_M^{2D}(\vec{v}) = n_0 \left( \frac{m_i}{2\pi kT_i} \right) e^{-E/kT_i} \quad (2.23)$$

zusammen mit (2.21) und (2.22) eingesetzt in (2.20) ergibt sich:

$$I_i = en_0 \frac{2\pi R}{kT_i} \sqrt{\frac{2}{m_i}} \int_0^\infty dE \sqrt{E - eV_R} e^{-E/kT_i} \quad . \quad (2.24)$$

Das Integral (2.24) lässt sich mit Hilfe der komplementären Fehlerfunktion angeben (siehe Anhang E):

$$I_i = en_0 \frac{2\pi R}{kT_i} \sqrt{\frac{2}{m_i}} (kT_i)^{3/2} \left( \sqrt{\frac{-eV_R}{kT_i}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-eV_R/kT_i} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{-eV_R}{kT_i}} \right) \right) \quad . \quad (2.25)$$

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

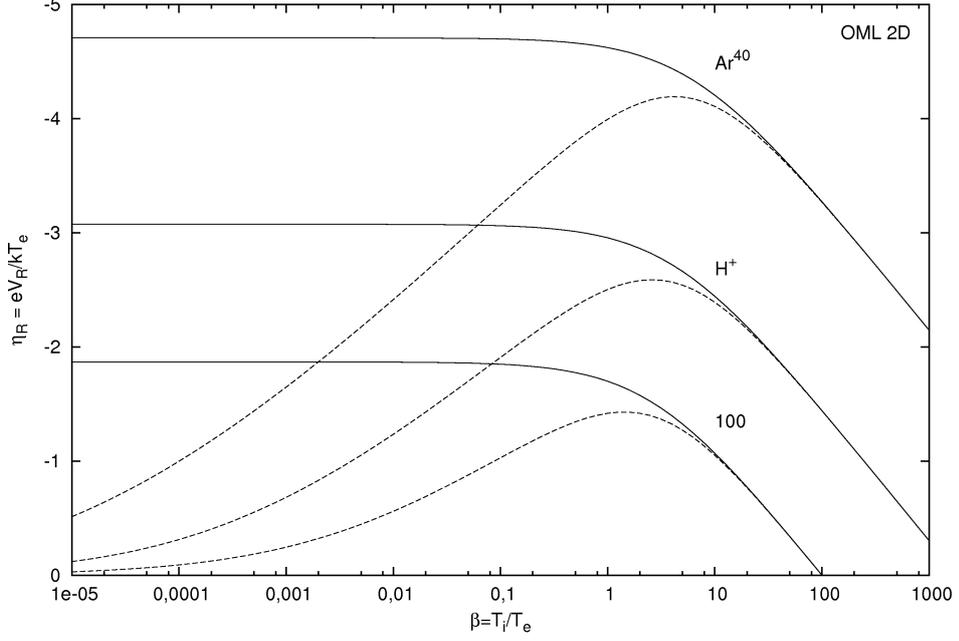


Abbildung 2.5.: Das normierte Oberflächenpotenzial  $\eta_R = eV_R/kT_e$  aus (2.28) in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses  $\beta$  für den zweidimensionalen Fall. Für das Massenverhältnis (Ionen- zu Elektronenmasse,  $m_i/m_e$ ) wurde 1836,2 (Wasserstoff  $H^+$ ), 73.609 (Argon  $Ar^{40}$ ) und 100 angenommen, welches oft in numerischen Simulationen verwendet wird. Zum Vergleich ist  $\eta_R$  (gestrichelte Linie) für den dreidimensionalen Fall aus Abbildung 2.4 gezeigt.

Analog zu (2.24) lautet der Elektronenstrom:

$$I_e = -en_0 \frac{2\pi R}{kT_e} \sqrt{\frac{2}{m_e}} \int_{-eV_R}^{\infty} dE \sqrt{E + eV_R} e^{-E/kT_e} \quad . \quad (2.26)$$

wobei die untere Integrationsgrenze der Energie hier wieder auf das Oberflächenpotenzial  $-eV_R$  gesetzt werden muss. Die Ausführung des Integrals (2.26) gibt (siehe Anhang E):

$$I_e = -en_0 \frac{2\pi R}{kT_e} \sqrt{\frac{2}{m_e}} (kT_e)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{eV_R/kT_e} \quad . \quad (2.27)$$

Das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht ergibt sich wieder aus  $I_i + I_e = 0$ . Mit (2.25) und (2.27) erhält man:

$$\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} e^{\eta_R} = 2\sqrt{\frac{-\eta_R}{\pi}} + \sqrt{\beta} e^{-\eta_R/\beta} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{-\eta_R}{\beta}} \right) \quad , \quad (2.28)$$

wobei  $\beta$  wieder das Verhältnis von Ionen- zu Elektronentemperatur ist,  $T_i/T_e$ , und  $\eta_R$  das normierte Oberflächenpotenzial,  $eV_R/kT_e$ . Der Ausdruck (2.28) hängt ebenfalls nicht vom Radius  $R$  des zylinderförmigen Staubteilchens ab, sondern nur vom Massenverhältnis  $m_i/m_e$  und dem Temperaturverhältnis  $\beta$ .

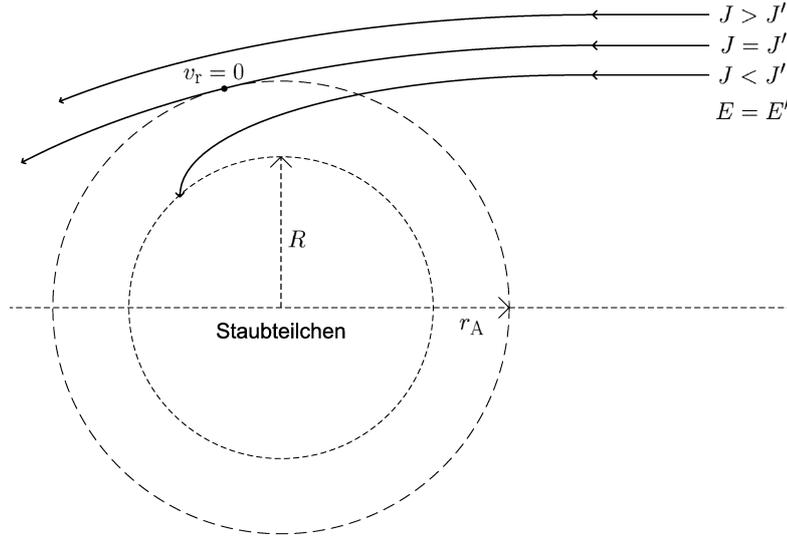


Abbildung 2.6.: Für eine bestimmte Energie  $E'$  und einen bestimmten Drehimpuls  $J'$  verschwindet die Radialgeschwindigkeit bei  $r_A > R$ ,  $v_r(E', J', r_A) = 0$ . Alle Ionen mit  $(E', J < J')$  treffen auf die Oberfläche des Staubteilchens und haben dort stets eine nicht verschwindende Radialgeschwindigkeit,  $v_r(E', J < J', R) \neq 0$ . Ionen mit  $(E', J > J')$  werden bei  $r > r_A$  reflektiert und damit nicht vom Staubteilchen absorbiert.

Abbildung 2.5 zeigt das normierte Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  aus (2.28) in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses  $\beta$ . Für das Massenverhältnis (Ionen- zu Elektronenmasse,  $m_i/m_e$ ) wurde wieder 1836,2 (Wasserstoff  $H^+$ ), 73.609 (Argon  $Ar^{40}$ ) und 100 verwendet. Zum Vergleich ist das Oberflächenpotenzial (gestrichelte Linie) aus dem dreidimensionalen Fall dargestellt. Für eine gleiche Elektronen- und Iontemperatur ( $\beta = 1, T_e = T_i = T$ ) ergibt sich das Oberflächenpotenzial hier zu  $V_R(H^+) = -2,96kT/e$ ,  $V_R(Ar^{40}) = -4,62kT/e$  und  $V_R(100) = -1,7kT/e$  und fällt damit betragsmäßig höher aus als im dreidimensionalen Fall. Während für große Temperaturverhältnisse die Oberflächenpotenziale des drei- und zweidimensionalen Falls übereinstimmen, geht das Oberflächenpotenzial für kleine Temperaturverhältnisse im zweidimensionalen Fall gegen jeweils einen konstanten Wert von  $V_R(H^+) = -3,08kT_e/e$ ,  $V_R(Ar^{40}) = -4,71kT_e/e$  und  $V_R(100) = -1,87kT_e/e$ . Für kleine Iontemperaturen verschwindet nämlich die Fehlerfunktion in (2.25), womit der Ionenstrom unabhängig von der Iontemperatur wird und  $\eta_R$  in (2.28) somit nur noch vom Massenverhältnis abhängt.

## 2.2. Gültigkeitsbereich der OML-Theorie

Die OML-Theorie unterliegt der expliziten Annahme, dass nur die Ionen vom Staubteilchen absorbiert werden, die einen Stoßparameter bzw. Drehimpuls kleiner oder gleich  $\sigma_{\text{krit}}$  (siehe (2.6)) bzw.  $J_{\text{krit}}$  (siehe (2.7)) besitzen. Ein Ion mit dem Drehimpuls  $J = J_{\text{krit}}$  streift dabei die Oberfläche des Staubteilchens tangential, d.h. die Radialgeschwindigkeit ist Null ( $v_r = 0$ , siehe (2.4)). Diese Annahme gilt insbesondere wie gezeigt für

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

ein Coulomb-Potenzial. Allerdings wird ein geladenes Objekt in einem Plasma abgeschirmt werden, weshalb das Coulomb-Potenzial keine gute Approximation des Potenzialprofils eines Staubteilchens darstellt. Im nächsten Abschnitt wird daher ein abgeschirmtes Coulomb-Potenzial (auch Debye-Hückel-Potenzial genannt) als Potenzialprofil eingeführt und diskutiert. Wie gezeigt werden wird, ist die Definition des kritischen Drehimpulses für ein abgeschirmtes Coulomb-Potenzial nicht mehr durch (2.7) gegeben, da Potenzialbarrieren auftreten können, an denen die Plasmateilchen reflektiert werden. Abbildung 2.6 zeigt schematisch eine Situation, in der für eine bestimmte Energie  $E'$  und einen bestimmten Drehimpuls  $J'$  die Radialgeschwindigkeit bei  $r_A > R$  gleich Null wird, also  $v_r(r_A) = 0$  gilt. Der Ausdruck für die Radialgeschwindigkeit (2.12) besitzt für  $(E', J > J', r_A)$  keine Lösung, wohingegen für  $v_r(E', J < J', r_A < R)$  positive Lösungen existieren. Unter der Annahme, dass das Potenzial  $V(r)$  sich nicht sprunghaft ändert, werden daher alle Ionen mit einem Drehimpuls größer als  $J'$  nicht vom Staubteilchen absorbiert. Ionen mit  $J < J'$  treffen auf die Oberfläche des Staubteilchens und weisen dort stets eine von Null verschiedene Radialgeschwindigkeit  $v_r(E', J < J', R) \neq 0$  auf.  $r_A(E)$  ist ein energieabhängiger Radius, der auch Absorptionsradius genannt wird. Existiert solch ein Absorptionsradius, ist die OML-Theorie nicht mehr anwendbar, da die Definition des kritischen Drehimpulses  $J_{\text{krit}}$  in (2.10) dann nicht mehr durch (2.7) gegeben sein kann. Damit die OML-Theorie Gültigkeit besitzt, muss die Radialgeschwindigkeit für alle  $r > R$  stets größer als Null sein,  $v_r(r > R) > 0$ . Diese Bedingung lässt sich durch den kritischen Drehimpuls folgendermaßen ausdrücken. Der kritische Drehimpuls  $J_{\text{krit}}$  an der Stelle  $r_A$  lautet:

$$J_{\text{krit}}(r_A) = r_A \sqrt{2m_i(E - eV(r_A))} \quad , \quad (2.29)$$

welcher analog zu (2.7) aus der Bedingung  $v_r = 0$  folgt. Ist dieser kritische Drehimpuls  $J_{\text{krit}}(r_A)$  stets größer als  $J_{\text{krit}}(R)$ , so behält die OML-Theorie ihre Gültigkeit:

$$r_A \sqrt{1 - \frac{eV(r_A)}{E}} > R \sqrt{1 - \frac{eV_R}{E}} \quad , \quad (2.30)$$

wobei diese Bedingung für alle Energien  $E$  gelten soll, für die die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit endlich ist. Im Falle der Maxwellverteilung (2.14) muss die Bedingung (2.30) damit auch für sehr kleine Energien gelten, womit sich die Bedingung für die Gültigkeit der OML-Theorie durch

$$\frac{V(r)}{V_R} > \frac{R^2}{r^2} \quad (2.31)$$

ausdrücken lässt. (2.31) ist nur erfüllt, wenn das Potenzial  $V(r)$  stets langsamer als  $1/r^2$  abfällt. Während dies für ein Coulomb-Potenzial der Fall ist, wird die Bedingung für ein abgeschirmtes Coulomb-Potenzial verletzt, wie im Anhang C gezeigt wird. Die OML-Theorie ist also für die Bestimmung des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht eines sphärischen, abgeschirmten Objekts in einem Plasma nicht anwendbar. Die Behandlung der vollständigen orbitalen Bahnen von Ionen in der OM-Theorie (welche im nächsten Abschnitt vorgestellt wird) zeigt allerdings, dass die OML-Theorie für Radien von

Staubteilchen kleiner als die Debyelängen des betrachteten Plasmas trotzdem eine gute Approximation darstellt. Denn in diesem Fall fällt ein abgeschirmtes Coulomb-Potenzial in der Nähe des Staubteilchens langsamer als  $1/r^2$  ab, siehe Abbildung C.1 im Anhang C. Die OM-Theorie bestimmt das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht zusätzlich in Abhängigkeit des Potenzialprofils und des Radius von Staubteilchen.

Ist die Iontemperatur gleich Null ( $T_i = 0$ ), betrachtet man also ein Plasma mit „kalten“ Ionen, ist die OML-Theorie ebenfalls nicht anwendbar, da der Ausdruck für den Ionenstrom (2.16) bzw. (2.25) für  $T_i = 0$  nicht definiert ist. Die Ionen führen in diesem Fall keine Orbitalbewegung aus, sondern werden radial auf das Staubteilchen beschleunigt. In Kennedy et al. [90] wird eine Theorie zur radialen Bewegung von Ionen vorgestellt, wobei das Oberflächenpotenzial aus dem numerischen Lösen der Poisson-Gleichung bestimmt wird. Dabei zeigt sich eine starke Abhängigkeit des Oberflächenpotenzials mit dem Radius des Staubteilchens.

In der OML-Theorie wird ferner ausschließlich ein stoßfreies Plasma betrachtet. Zwar ist die mittlere freie Weglänge der Plasmateilchen für die meisten Plasmen sehr groß im Vergleich zu den Debyelängen, dennoch kann die Ionendichte in der Nähe des Staubteilchens durch Ladungsaustauschstöße signifikant erhöht werden, selbst wenn die Stoßwahrscheinlichkeit gering ist, wie in Goree [91] und Lampe et al. [92] gezeigt wird. Denn das nach dem Austauschstoß mit einem Neutralgastteilchen zurückbleibende Ion kann im Potenzial des Staubteilchens gefangen und in einem Orbit gehalten (engl. trapped ions) oder vom Staubteilchen direkt absorbiert werden. Hierdurch kann der Ionenstrom in Abhängigkeit der Plasmadichte und der Stoßfrequenz signifikant zunehmen, wodurch der Betrag des negativen Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht um bis zu 50% im Vergleich zur OML-Theorie sinken kann [92]. In Khrapak et al. [93] wird gemäß in Laborexperimenten gemessenen Staubteilchenladungen der Ionenstrom wie folgt approximiert (vergleiche mit (2.16)):

$$I_{i,\text{coll}} = 4\pi R^2 e n_0 \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i} \frac{eV_R}{kT_i}} \left( 1 + 0,1 \frac{eV_R}{kT_i} \frac{\lambda_i}{l_{\text{mfp}}} \right), \quad (2.32)$$

wobei  $l_{\text{mfp}}$  die mittlere freie Weglänge der Ionen ist. Das Verhältnis  $\frac{\lambda_i}{l_{\text{mfp}}}$  liegt typischerweise im Zehntel- oder Hunderstelbereich. In Abhängigkeit der Größe des Oberflächenpotenzials  $eV_R$  kann der Ionenstrom im Vergleich zu (2.16) signifikant zunehmen.

Obwohl die im letzten Abschnitt vorgestellte OML-Theorie prinzipiell wie dargestellt nicht auf staubige oder komplexe Plasmen anwendbar ist, wird diese in der Literatur häufig verwendet und diskutiert, u.a. in Allen et al. [94, 95], Lampe et al. [96], Shukla et al. [97] oder Fortov et al. [98].

## 2.3. Die Orbital Motion (OM) Theorie

Im Folgenden sei allgemein die Bewegung eines Teilchens in einem Zentralfeld  $V(r)$  betrachtet. Die Gesamtenergie  $E$  und der Drehimpuls  $J$  sind dabei Erhaltungsgrößen:

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 + V_{\text{eff}}(r, J) \quad , \quad J = mv_\infty\sigma \quad , \quad (2.33)$$

wobei  $m$  die Masse,  $\sigma$  der Stoßparameter und  $v_r$  die radiale Geschwindigkeit des Teilchens ist.  $v_\infty$  sei wieder die anfängliche Geschwindigkeit (Energie) des Teilchens. Das effektive Potenzial  $V_{\text{eff}}(r, J)$  ist wieder durch

$$V_{\text{eff}}(r, J) = \frac{J^2}{2mr^2} + eV(r) \quad (2.34)$$

gegeben. Ist bei einem bestimmten Abstand  $r_0$  das effektive Potenzial gleich der Gesamtenergie,  $V_{\text{eff}}(r_0, J) = E$ , verschwindet die Radialgeschwindigkeit in (2.33). Das Teilchen hat somit den kleinsten erreichbaren Abstand zum Ursprung erreicht. Dieser Abstand  $r_0$  lässt sich aus (2.34) bestimmen:

$$r_0 = \frac{J}{\sqrt{2m(E - eV(r_0))}} \quad . \quad (2.35)$$

Betrachtet man einen Radius  $R$  um den Ursprung, so kann das Teilchen diesen Radius nur erreichen, wenn  $r_0 \leq R$  ist. Ist hingegen  $r_0 > R$ , so wird das Teilchen vom Zentralpotenzial bei  $r_0 > R$  reflektiert und kann somit den Radius  $R$  nicht erreichen.

### 2.3.1. Abstoßendes Potenzial

Ist  $V(r) > 0$ , stellt das Zentralpotenzial also ein abstoßendes Potenzial für ein Teilchen dar, ist das effektive Potenzial (2.34) eine positive, monoton fallende Funktion von  $r$ , falls das Zentralpotenzial  $V(r)$  ebenfalls monoton abfallend in  $r$  ist. Die Gleichung (2.35) des kleinsten erreichbaren Abstand  $r_0$  hat damit nur eine Lösung. Das Argument der Wurzel in (2.35) bleibt dabei stets positiv, da im Falle eines abstoßenden Potenzials die Energie  $E$  des Teilchens stets größer oder gleich  $V(r)$  ist. Der kritische Stoßparameter  $\sigma_{\text{krit}}^-$  für ein abstoßendes Potenzial, den ein Teilchen maximal besitzen darf, um den Radius  $R$  noch zu erreichen, lässt sich nun aus der Bedingung  $V_{\text{eff}}(R, \sigma_{\text{krit}}^-) = E$  bestimmen. Es gilt:

$$\sigma_{\text{krit}}^- = R\sqrt{1 - \frac{eV_R}{E}} \quad , \quad (2.36)$$

wobei  $V(R) = V_R$  gilt. (2.36) ist somit gleich dem Ausdruck (2.6) aus der OML-Theorie.

### 2.3.2. Anziehendes Potenzial

Ist  $V(r) < 0$ , wirkt das Zentralpotenzial also als ein anziehendes Potenzial für ein Teilchen, kann die Gleichung (2.35) mehrere Lösungen haben, abhängig vom speziellen Verhalten des Zentralpotenzials  $V(r)$ . Die Extremstellen des effektiven Potenzials werden durch  $dV_{\text{eff}}(r)/dr = 0$  bestimmt. Mit  $V_{\text{eff}}(r)$  aus (2.34) folgt:

$$r^3 e \frac{dV}{dr} = \frac{J^2}{m} \quad . \quad (2.37)$$

Aus dieser Bedingung ist ersichtlich, falls  $|V(r)|$  überall langsamer als  $1/r^2$  fällt, dass die linke Seite von (2.37) monoton wächst und  $V_{\text{eff}}(r)$  nur eine Extremstelle  $r_m$  hat, wobei diese immer ein Minimum darstellt, da für alle  $r_m$  stets  $V_{\text{eff}}''(r_m) > 0$  gilt. Dies gilt insbesondere für das Coulomb-Potenzial, welches in der OML-Theorie angenommen wird. Im Folgenden sei als Zentralpotenzial das *Debye-Hückel-Potenzial* der Form

$$V(r) = V_R \frac{R}{r} e^{(R-r)/\lambda_d} \quad (2.38)$$

angenommen [12], mit der sogenannten Abschirmlänge  $\lambda_d$  und dem Radius  $R$ . Die Herleitung dieses Potenzialprofils aus der linearisierten Poisson-Gleichung wird im Anhang C vorgenommen. Die Abschirmlänge  $\lambda_d$  entspricht dabei der charakteristischen Längenskala, auf der die Ladung eines Objekts in einem Plasma abgeschirmt wird und das Oberflächenpotenzial  $eV_R$  abfällt. Das Debye-Hückel-Potenzial (2.38) fällt für kleine  $r$  langsamer, für große  $r$  jedoch schneller ab als  $1/r^2$ . Somit kann Gleichung (2.37) zwei Lösungen haben. Das effektive Potenzial  $V_{\text{eff}}(r)$  kann hier sowohl ein Maximum als auch ein Minimum besitzen, wobei das Maximum stets bei größerem  $r$  auftritt als das Minimum ( $r_{\text{max}} > r_{\text{min}}$ ). Gilt nun  $V_{\text{eff}}(r_{\text{max}}) > E$ , besitzt die Gleichung des kleinsten erreichbaren Abstands (2.35) mehrere Lösungen. Physikalisch bedeutet dies, dass eine Potenzialbarriere auftritt und das Teilchen bei  $r > r_{\text{max}}$  reflektiert wird, das Maximum also nicht erreichen kann.

In Abbildung 2.7 ist das Verhalten des effektiven Potenzials  $V_{\text{eff}}(r)$  aus (2.34) mit dem Debye-Hückel-Potenzial (2.38) dargestellt.  $V_{\text{eff}}(r)$  ist dabei auf die Energie  $E$ , die Abstände  $r$  und  $\sigma$  auf den Radius  $R$  normiert. Die Energie sei wieder durch den dimensionslosen Streuparameter  $\alpha$  nach (2.9) bestimmt. Abbildung 2.7 zeigt  $V_{\text{eff}}(r, \sigma)$  für zwei Werte von  $\alpha$  mit  $R/\lambda_d = 1$  und fünf verschiedenen Stoßparametern  $\sigma/R$ . Für  $\alpha = 10$  können Potenzialbarrieren auftreten, wie z.B. bei  $\sigma/R = 4, 5$ . Bei  $\alpha = 5$  existieren keine Potenzialbarrieren, da alle Maxima von  $V_{\text{eff}}$  stets unterhalb von 1 liegen, also  $V_{\text{eff}}(r_{\text{max}}, \sigma) < E$  für alle  $r_{\text{max}}$  und  $\sigma$  gilt. In Abbildung 2.8 sind die entsprechenden Teilchenbahnen aus Abbildung 2.7 für die zwei Werte von  $\alpha$  dargestellt. Die Teilchenbahnen beginnen ungestört am rechten Rand (im Unendlichen) und enden auf der Oberfläche des Staubteilchens, falls das Teilchen durch das Debye-Hückel-Potenzial eingefangen wird. Wie auch schon aus Abbildung 2.7 ersichtlich, können Teilchen mit dem Stoßparameter  $\sigma/R = 4, 5$  und  $5, 5$  für  $\alpha = 10$  und  $\sigma/R = 3, 9$  für  $\alpha = 5$  die Oberfläche der Kugel  $R$  nicht erreichen. Es existieren also abhängig von der Energie und dem Stoßparameter Teilchenbahnen mit

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

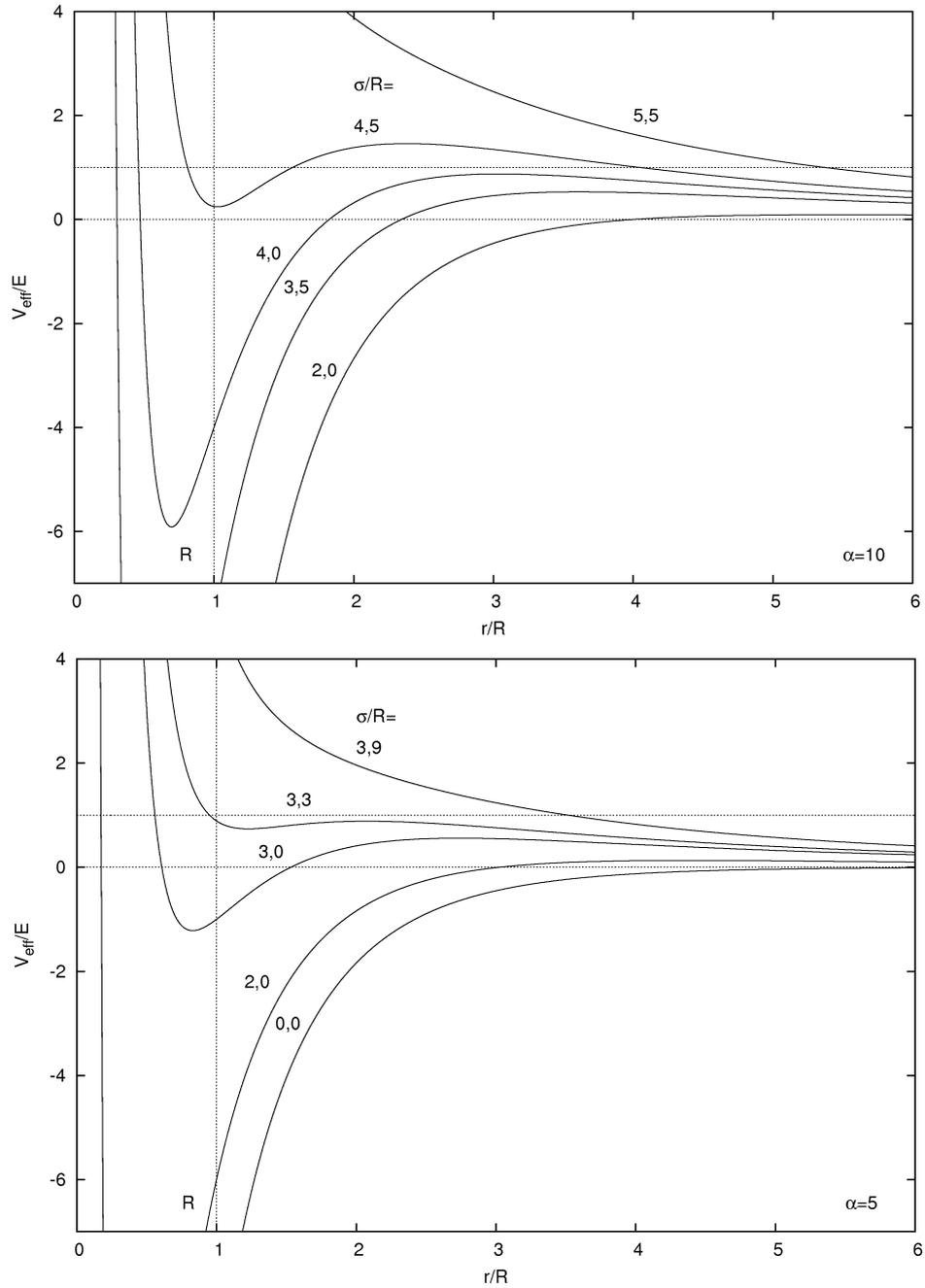


Abbildung 2.7.: Das normierte effektive Potenzial mit dem Debye-Hückel-Potenzial (2.38) mit  $R/\lambda_d = 1$  für zwei Streuparameter  $\alpha = |eV_R|/2E$  und jeweils fünf verschiedenen Stoßparametern. Alle Abstände sind auf den Radius  $R$  des Staubteilchens normiert. Bei der Energie  $\alpha = 10$  können Potenzialbarrieren auftreten, wie bei  $\sigma/R = 4, 5$ . Für  $\alpha = 5$  treten dagegen keine Potenzialbarrieren auf, da hier alle Maxima von  $V_{\text{eff}}$  stets unterhalb von 1 liegen. Es gilt:  $V_{\text{eff}}(r_{\text{max}}, \sigma) < E$  für alle  $r_{\text{max}}$  und  $\sigma$ .

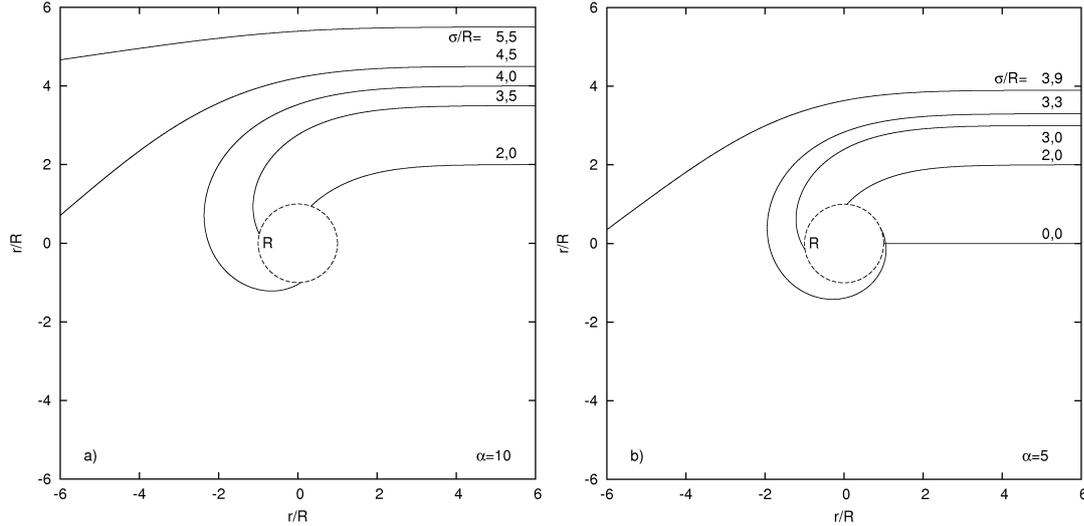


Abbildung 2.8.: Die zu Abbildung 2.7 gehörigen Teilchenbahnen für  $\alpha = 10$  und  $\alpha = 5$ . Die Teilchenbahnen beginnen ungestört am rechten Rand (im Unendlichen) und enden auf der Oberfläche des Staubteilchens mit dem Radius  $R$ , falls das Teilchen absorbiert wird. Alle Abstände sind auf den Radius  $R$  normiert. Für  $\alpha = 10$  werden die Teilchen mit dem Stoßparameter  $\sigma/R = 4,5$  und  $5,5$  reflektiert, für  $\alpha = 5$  nur das Teilchen mit  $\sigma/R = 3,9$ .

und ohne Potenzialbarrieren, welche durch die Einführung eines kritischen Stoßparameters  $\sigma_b$  unterschieden werden können:

$$\sigma_b = r_{\max} \sqrt{1 - \frac{eV(r_{\max})}{E}}, \quad (2.39)$$

wobei  $r_{\max}$  die Maximalstelle des effektiven Potentials ist.  $\sigma_b$  bestimmt also den Übergang von Teilchenbahnen mit und ohne Potenzialbarrieren. Ist  $\sigma < \sigma_b$  tritt keine Barriere auf, wohingegen bei  $\sigma > \sigma_b$  ein Teilchen durch eine auftretende Potenzialbarriere bei  $r \geq r_{\max}$  reflektiert wird. Zu beachten ist, dass  $r_{\max}$  vom Stoßparameter  $\sigma$  abhängt. Somit stellt Gleichung (2.39) eine implizite Beziehung dar, denn der kritische Stoßparameter des Übergangs  $\sigma_b$  hängt nicht nur von der Energie, sondern auch vom Stoßparameter selbst ab. Nun kann analog zu (2.36) der kritische Stoßparameter  $\sigma_{\text{krit}}^+$ , den ein Teilchen maximal besitzen darf, um die Oberfläche eines Radius  $R$  zu erreichen, formuliert werden:

$$\sigma_{\text{krit}}^+ = \begin{cases} \sigma_{\text{krit}} & \text{für } \sigma_{\text{krit}} < \sigma_b \\ \sigma_b(E, \sigma) & \text{für } \sigma_{\text{krit}} \geq \sigma_b \end{cases}, \quad (2.40)$$

wobei  $\sigma_{\text{krit}}$  wieder durch (2.6) gegeben ist. Diese Definition des kritischen Stoßparameters  $\sigma_{\text{krit}}^+$  gilt insbesondere für das vorgestellte Debye-Hückel-Potenzial (2.38), jedoch wie erwähnt nicht für Zentralpotenziale, die überall langsamer als  $1/r^2$  abfallen. In diesem Fall ist die Definition eines kritischen Stoßparameters  $\sigma_b$  für den Übergang überflüssig

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

und  $\sigma_{\text{krit}}^+$  wäre ebenfalls durch (2.36) bzw. (2.6) gegeben. Der Ionenstrom entspricht dann dem OML-Fall aus (2.16).

### 2.3.3. Dreidimensionaler Fall

Mit der Definition des kritischen Stoßparameters  $\sigma_{\text{krit}}^+$  (2.40) für die volle orbitale Bewegung in einem Debye-Hückel-Potenzial lässt sich nun der Ionenstrom auf ein negativ geladenes Staubteilchen mit dem Radius  $R$  bestimmen. Der Ionenstrom ist durch (2.15) gegeben, wobei die obere Integrationsgrenze des Drehimpulses  $J_{\text{krit}}$  nun durch (2.40) ersetzt werden muss (bzw. der Drehimpuls kann über  $J = \sqrt{2Em}\sigma$  durch den Stoßparameter ausgedrückt werden). Da (2.40) vom Stoßparameter  $\sigma$  selbst abhängt, wird  $\sigma_{\text{krit}}^+(E, \sigma)$  durch eine Heaviside-Funktion  $\Theta$  in das Integral eingebunden:

$$I_i = en_0 \sqrt{\pi} \left( \frac{2}{m_i k T_i} \right)^{3/2} 2m_i \int_0^\infty \int_0^\infty d\sigma dE \sigma E e^{-E/kT_i} \Theta(\min(\sigma_{\text{krit}}, \sigma_{\text{krit}}^+) - \sigma) \quad . \quad (2.41)$$

Die beiden Fallunterscheidungen in (2.40) wurden hier durch eine Minimumfunktion ausgedrückt. Ist der Stoßparameter  $\sigma$  kleiner als das Minimum von  $(\sigma_{\text{krit}}(E), \sigma_{\text{krit}}^+(E, \sigma))$ , wird das Argument der Heaviside-Funktion größer als Null. Die Heaviside-Funktion ist hier also folgendermaßen definiert:

$$\Theta(\min(\sigma_{\text{krit}}, \sigma_{\text{krit}}^+) - \sigma) = \begin{cases} 0 & : \sigma > \min(\sigma_{\text{krit}}, \sigma_{\text{krit}}^+) \\ 1 & : \sigma \leq \min(\sigma_{\text{krit}}, \sigma_{\text{krit}}^+) \end{cases} \quad . \quad (2.42)$$

Um das Oberflächenpotenzial  $eV_R$  zu bestimmen, muss der Ausdruck für den Ionenstrom (2.41) gleich dem Elektronenstrom gesetzt werden. Dieser entspricht dem Ausdruck (2.18) aus der OML-Theorie, wie im Abschnitt über ein abstoßendes Potenzial gezeigt wurde.  $eV_R$  ergibt sich wieder aus  $I_i + I_e = 0$ , wobei das Oberflächenpotenzial hier nicht mehr nur vom Temperatur- und Massenverhältnis abhängt, sondern auch vom Radius  $R$  des Staubteilchens. Die Abhängigkeit von  $R$  geht dabei insbesondere über das Debye-Hückel-Potenzial (2.38) mit einer entsprechenden Abschirmlänge  $\lambda_d$  ein. Mit dieser expliziten Annahme eines Debye-Hückel-Potenzials ergibt sich allerdings keine selbstkonsistente Lösung des Oberflächenpotenzials. Um eine selbstkonsistente Lösung zu erhalten, muss die Poisson-Gleichung direkt gelöst werden. In Kennedy et al. [99] wird eine numerische Lösung der Poisson-Gleichung vorgestellt, wobei ein Ausdruck für die Ionendichte unter Berücksichtigung der OM-Theorie in der Poisson-Gleichung verwendet wird. Iterativ wird dabei ein Potenzialprofil bestimmt, aus dem dann über den Ionen- und Elektronenstrom wieder ein Oberflächenpotenzial folgt. Abbildung 2.9 zeigt die Ergebnisse für das Oberflächenpotenzial  $\eta_R = eV_R/T_e$  aus Kennedy et al. [99] in Abhängigkeit des normierten Radius  $R/\lambda_e$ . Gezeigt sind drei Temperaturverhältnisse  $\beta = T_i/T_e$ , das Massenverhältnis entspricht 1836,2 (Wasserstoff  $H^+$ ). Erreicht der Radius die Debyelänge der Elektronen bzw. Ionen, beginnt das Oberflächenpotenzial für jedes Temperaturverhältnis anzusteigen. Nach der OM-Theorie ist somit der Ionenstrom

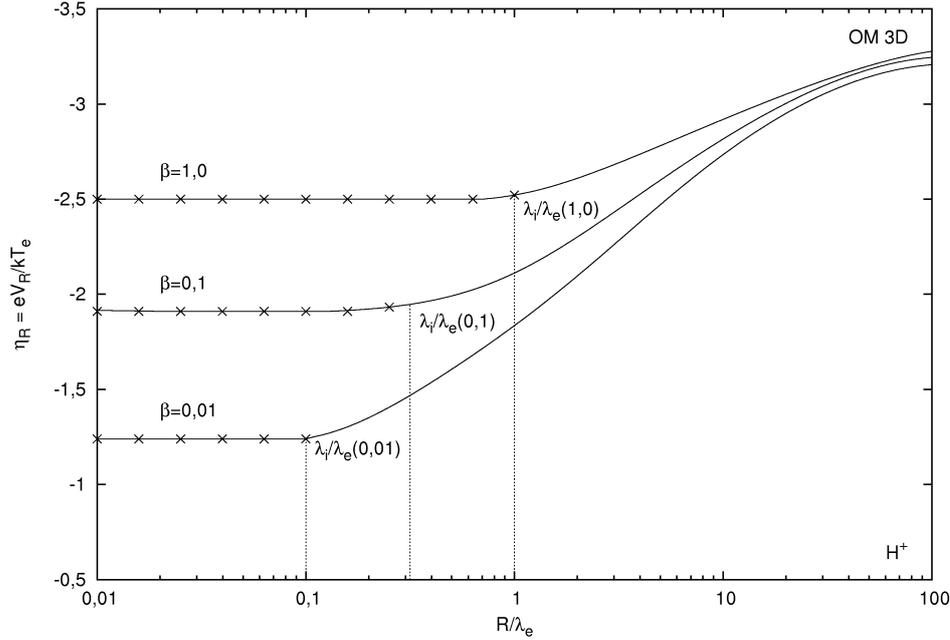


Abbildung 2.9.: Die Ergebnisse aus Kennedy et al. [99] für das Oberflächenpotenzial  $\eta_R = eV_R/kT_e$  in Abhängigkeit des normierten Radius  $R/\lambda_e$ . Dargestellt sind drei Temperaturverhältnisse  $\beta = T_i/T_e$ , das Massenverhältnis ist auf 1836,2 (Wasserstoff  $H^+$ ) gesetzt. Für jedes Temperaturverhältnis steigt das Oberflächenpotenzial an, wenn der Radius die Größenordnung der Debyelänge der Elektronen bzw. Ionen erreicht. Für kleine Radien im Vergleich zu den Debyelängen wird das Oberflächenpotenzial konstant und entspricht dem Ergebnis aus der OML-Theorie, siehe Abbildung 2.4. Die markierten Oberflächenpotenziale (Kreuze) können mit Hilfe eines Debye-Hückel-Potenzials (2.38) im Ionenstrom (2.41) reproduziert werden. Hierzu sind bei der numerischen Lösung des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht aus  $I_i(V_R, R, \lambda_d) = I_e(V_R, R)$  die in Abbildung 2.10 gezeigten Abschirmmlängen  $\lambda_d/\lambda_e$  im Debye-Hückel-Potenzial ermittelt worden.

(2.41) für große Radien im Vergleich zu den Debyelängen stets kleiner als in der OML-Theorie (2.16). Für sehr große Radien streben alle drei Kurven einem konstanten Wert von  $V_R(H^+) = -3,3kT_e/e$  entgegen, welcher dem Potenzial einer ebenen Plasmawand entspricht und über

$$\eta_R = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{m_i}{2\pi m_e} \right) \quad (2.43)$$

bestimmt werden kann [100]. Für kleine Radien wird das Oberflächenpotenzial ebenfalls konstant und entspricht dem Ergebnis aus der OML-Theorie, siehe Abbildung 2.4. Die OM-Theorie enthält also die OML-Theorie als Grenzfall für kleine Radien von Staubteilchen im Vergleich zu den Debyelängen im betrachteten Plasma. Mit einem Debye-Hückel-Potenzial (2.38) und einer entsprechenden Abschirmmlänge  $\lambda_d$  lassen sich die Ergebnisse aus Abbildung 2.9 allerdings teilweise reproduzieren. Da das Integral über den Ionenstrom (2.41), welches vom Oberflächenpotenzial, dem Radius und der Abschirmmlänge

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

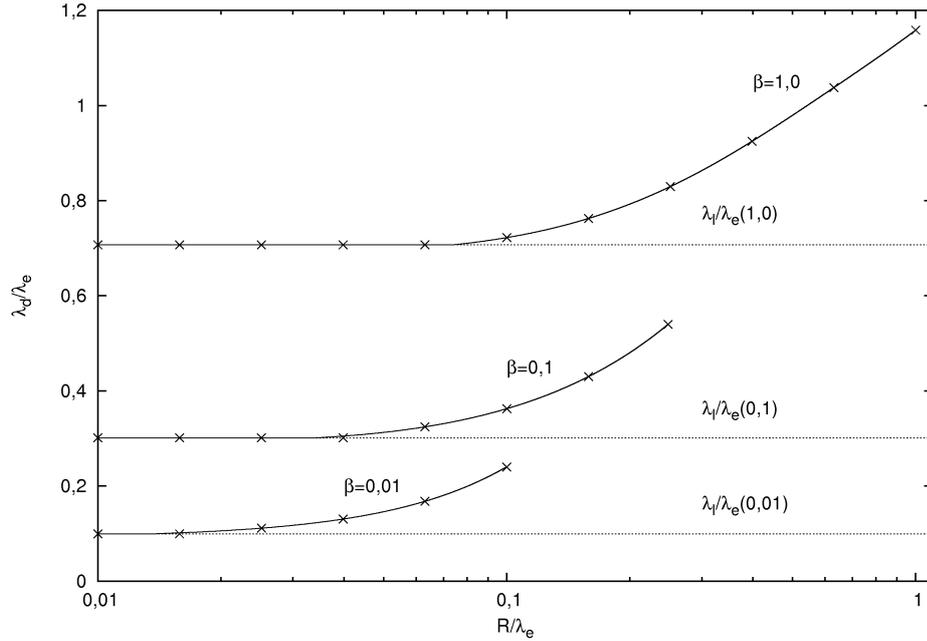


Abbildung 2.10.: Die Abschirmlänge  $\lambda_d$  in Abhängigkeit des Radius  $R$ , jeweils normiert auf die Debyelänge  $\lambda_e$  für drei Verhältnisse von Ionen- zu Elektronentemperatur  $\beta = T_i/T_e$ . Die dargestellten Abschirmlängen wurden im Debye-Hückel-Potenzial (2.38) zur numerischen Lösung des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht aus  $I_i(V_R, R, \lambda_d) = I_e(V_R, R)$  gemäß Abbildung 2.9 ermittelt. Jeweils ausgehend von der linearisierten Debyelänge (2.44) bei kleinen Verhältnissen von  $R/\lambda_e$  steigt die Abschirmlänge mit größer werdendem Radius jeweils an.

abhängt, nicht mehr analytisch lösbar ist, muss es numerisch gelöst werden. Hierzu werden die Oberflächenpotenziale aus Abbildung 2.9 verwendet. Für die Abschirmlänge  $\lambda_d$  im Debye-Hückel-Potenzial wird üblicherweise die linearisierte Debyelänge verwendet, welche durch

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{1}{\lambda_e^2} \quad (2.44)$$

gegeben ist und aus der linearisierten Poissongleichung folgt (siehe Anhang C). Der numerisch berechnete Ionenstrom  $I_i(V_R, R, \lambda_d)$  wird dann gleich dem Elektronenstrom  $I_e(V_R, R)$  nach (2.18) gesetzt, aus welchem wiederum  $eV_R$  bestimmt werden kann. Iterativ wird dann unter Variation der Abschirmlänge das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht bestimmt, bis dieses mit dem aus Abbildung 2.9 übereinstimmt. Hierbei zeigt sich, dass die Abschirmlänge mit steigendem Radius nicht mehr gemäß der linearisierten Debyelänge nach (2.44) gegeben ist, sondern ebenfalls ansteigt.

Abbildung 2.10 zeigt die normierte Abschirmlänge  $\lambda_d/\lambda_e$  gegen den normierten Radius  $R/\lambda_e$  für drei Verhältnisse von Ionen- zu Elektronentemperatur  $\beta$ , wie es aus der numerischen Berechnung des Ionenstroms (2.41) im Debye-Hückel-Potenzial ermittelt wurde. Für kleine Verhältnisse von  $R/\lambda_e$  entspricht die Abschirmlänge der jeweiligen

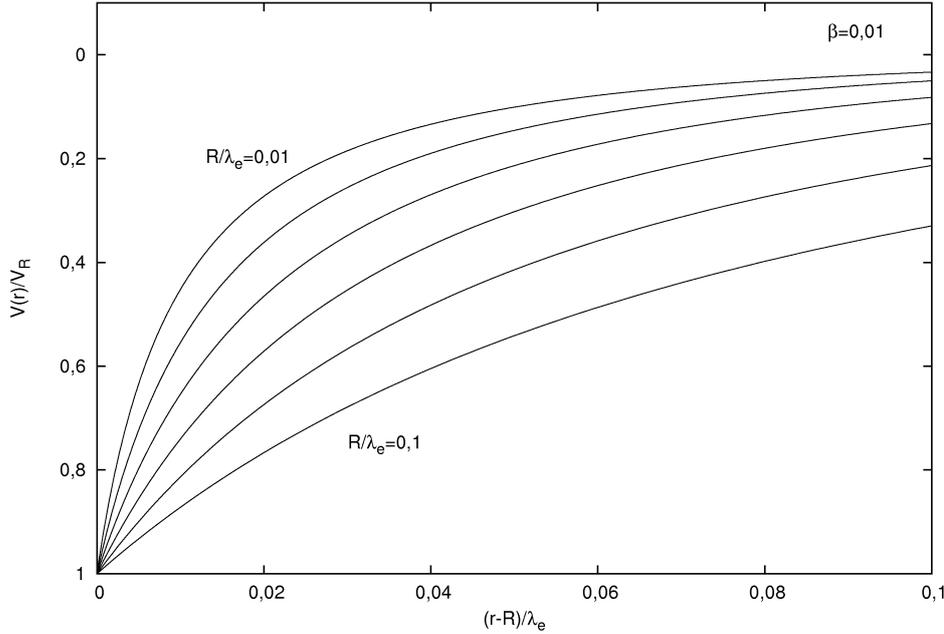


Abbildung 2.11.: Das Debye-Hückel-Potenzial gemäß (2.38) mit den in Abbildung 2.10 dargestellten Radien  $R/\lambda_e$  und Abschirmlängen  $\lambda_d/\lambda_e$  für das Temperaturverhältnis  $\beta = 0,01$ . Das Potenzial ist dabei auf das Oberflächenpotenzial  $V_R$  und der Abstand  $r - R$  von der Oberfläche des Staubteilchens auf die Debyelänge der Elektronen normiert. Die obere Kurve zeigt den Potenzialverlauf für  $R/\lambda_e = 0,01$ , die untere für  $R/\lambda_e = 0,1$ . Das Oberflächenpotenzial fällt also mit ansteigendem Radius und ansteigender Abschirmlänge immer langsamer ab.

linearisierten Debyelänge  $\lambda_l/\lambda_e$  nach (2.44), welche nur vom Temperaturverhältnis abhängt. Die gepunkteten Linien in Abbildung 2.10 zeigen die entsprechenden linearisierten Debyelängen. Mit ansteigendem Radius  $R/\lambda_e$  steigt auch die Abschirmlänge an, um wie beschrieben ein Gleichgewichtspotenzial aus  $I_1(V_R, R, \lambda_d) = I_e(V_R, R)$  gemäß Abbildung 2.9 zu erhalten. Dabei können nur die markierten Oberflächenpotenziale (Kreuze) in Abbildung 2.9 gewonnen werden, welche den Ergebnissen aus der OML-Theorie entsprechen. Der Anstieg des Oberflächenpotenzials  $\eta_R$  mit dem Radius  $R/\lambda_e$  kann also mit dem Debye-Hückel-Potenzial (2.38) im Ionenstrom (2.41) selbst mit einer immer weiter ansteigenden Abschirmlänge wie in Abbildung 2.10 nicht reproduziert werden. Denn durch die auftretenden Potenzialbarrieren bei größeren Radien und den damit verbundenen Ionenbahnen (siehe Abbildung 2.8) wird die Dichteverteilung der Ionen in der Umgebung des Staubteilchens und damit die Abschirmung des Oberflächenpotenzials zunehmend nichtlinear, wodurch sich das Potenzialprofil nicht mehr durch ein Debye-Hückel-Potenzial darstellen lässt, welches aus der linearisierten Poisson-Gleichung mit einer entsprechenden Abschirmlänge folgt (siehe Anhang C).

Abbildung 2.11 zeigt als Beispiel für ein Temperaturverhältnis von  $\beta = 0,01$  das Debye-Hückel-Potenzial nach (2.38) für die in Abbildung 2.10 angegebenen Radien  $R/\lambda_e$  und Abschirmlängen  $\lambda_d/\lambda_e$ . Das Potenzial  $V(r)$  ist dabei auf das Oberflächenpotenzial  $V_R$

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

und der Abstand  $r - R$  von der Oberfläche des Staubteilchens auf die Debyelänge der Elektronen  $\lambda_e$  normiert. Wie zu erwarten, fällt das Oberflächenpotenzial mit ansteigender Abschirmlänge immer langsamer ab. Die Abschirmlänge beschreibt eine charakteristische Längenskala um das sphärische Staubteilchen herum, in dem die Ionendichte signifikant erhöht ist und das Oberflächenpotenzial auf das Plasmapotenzial abfällt. Die erhöhte Dichte wird dabei durch Ionen verursacht, welche nicht vom Staubteilchen absorbiert, sondern reflektiert werden. Je größer dabei das Staubteilchen im Vergleich zu der Debyelänge der Ionen ist, desto „dünner“ fällt der Mantel aus Ionen um das Staubteilchen herum aus, wie im Abschnitt (4.2) über die OPAR-Simulationen (siehe Abbildung 4.7) diskutiert werden wird. Infolgedessen fällt das Potenzial für größere Radien entsprechend langsamer ab. In Lampe et al. [96] sowie Daugherty et al. [101] wird durch numerisches Lösen der Poissongleichung und Anfitzen eines Debye-Hückel-Potenzials ebenfalls die Abschirmlänge für verschiedene Radien bestimmt. Analog zeigt sich hier, dass die Abschirmlänge mit dem Radius bis in die Größenordnung der Debyelänge der Elektronen ansteigt.

Wie in der OML-Theorie ist auch in der oben vorgestellten OM-Theorie stets ein stoßfreies Plasma betrachtet worden. Wie in Goree [91] und Lampe et al. [102, 92] diskutiert wird, kann durch Ladungsaustauschstöße die Ionendichte in der Nähe des Staubteilchens signifikant erhöht werden, selbst wenn die Stoßwahrscheinlichkeit sehr gering ist (siehe auch Abschnitt (2.2)). Hierdurch kann die Abschirmung des Oberflächenpotenzials sowie der Ionenstrom auf das Staubteilchen signifikant erhöht werden. Die im diesem Abschnitt vorgestellte stoßfreie OM-Theorie wird u.a. auch in Allen [94], Kennedy et al. [99] und in Fortov et al. [98] diskutiert.

### 2.3.4. Zweidimensionaler Fall

Im Folgenden sei wieder nur die Bewegung von Plasmateilchen in der Ebene betrachtet. Das Geschwindigkeitsdifferential  $d^2v$  aus (2.21) lässt sich auch in Abhängigkeit des Differentials  $dJ$  ausdrücken:

$$d^2v = 2\pi \frac{dEdJ}{m_i^2 r v_r} \quad . \quad (2.45)$$

Mit diesem Differential stellt sich der Ionenstrom nach (2.20) wie folgt dar:

$$I_i = en_0 \frac{2\pi}{m_i k T_i} \int_0^\infty \int_0^{J_{\text{krit}}} dJ dE e^{-E/kT_i} \quad . \quad (2.46)$$

Ersetzt man nun wieder die obere Integrationsgrenze durch (2.40), lautet analog zu (2.41) der Ionenstrom für den zweidimensionalen Fall:

$$I_i = en_0 \frac{2^{3/2}\pi}{\sqrt{m_i k T_i}} \int_0^\infty \int_0^\infty d\sigma dE \sqrt{E} e^{-E/kT_i} \Theta(\min(\sigma_{\text{krit}}, \sigma_{\text{krit}}^+) - \sigma) \quad , \quad (2.47)$$

wobei der Drehimpuls  $J$  durch den Stoßparameter  $\sigma$  ausgedrückt wurde und die Heaviside-Funktion durch (2.42) gegeben ist. Das Oberflächenpotenzial  $eV_R$  ergibt sich wieder aus

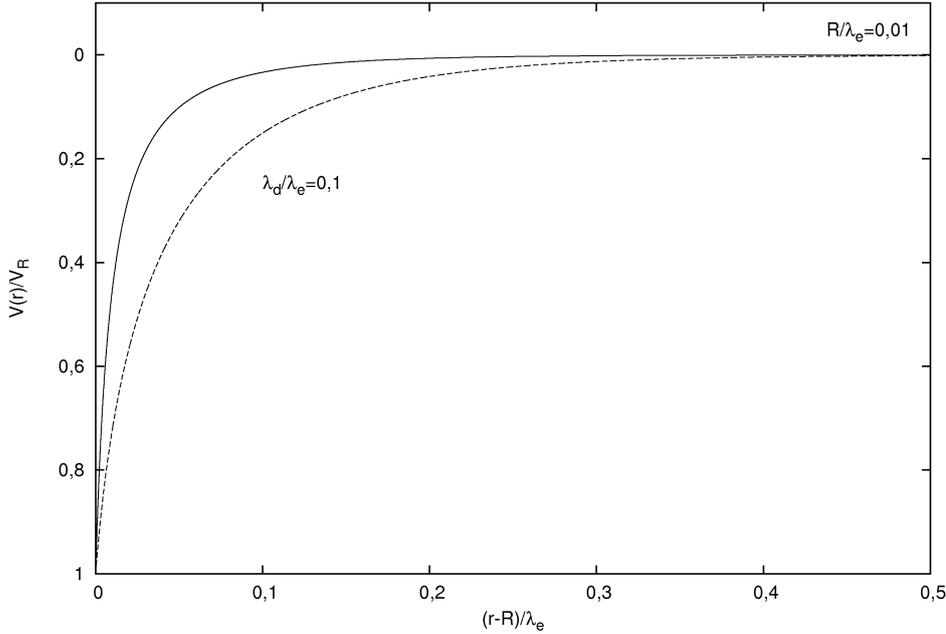


Abbildung 2.12.: Das Potenzialprofil aus (2.48) für den zylindersymmetrischen Fall (gestrichelte Linie) und das Debye-Hückel-Potenzial (durchgezogene Linie) aus Abbildung 2.11 für den Radius  $R/\lambda_e = 0,01$ . Die Abschirmlänge wurde jeweils zu  $\lambda_d/\lambda_e = 0,1$  gewählt. Das Potenzial ist dabei auf das Oberflächenpotenzial  $V_R$  und der Abstand  $r - R$  von der Oberfläche des Staubteilchens auf die Debyelänge der Elektronen normiert. Das Potenzial für den zylindersymmetrischen Fall fällt natürlich deutlich langsamer ab als das Debye-Hückel-Potenzial.

$I_i + I_e = 0$  mit (2.47) und (2.27), wobei das Oberflächenpotenzial wie im dreidimensionalen Fall nicht mehr nur vom Temperatur- und Massenverhältnis abhängt, sondern auch vom Radius  $R$  des Staubteilchens. Das Potenzialprofil wird für den zweidimensionalen Fall nun nicht mehr durch das Debye-Hückel-Potenzial gegeben sein. Die Lösung der zylindersymmetrischen Poissongleichung lautet [59]:

$$V(r) = V_R \frac{K_0(r/\lambda_d)}{K_0(R/\lambda_d)} \quad , \quad (2.48)$$

wobei wie im Fall des Debye-Hückel-Potenzials die Plasmadichten in der Poissongleichung linearisiert wurden (siehe Anhang C).  $K_0$  stellt die modifizierte Besselfunktion dar. Abbildung 2.12 zeigt das Potenzial nach (2.48) (gestrichelte Linie) im Vergleich zum Debye-Hückel-Potenzial (durchgezogene Linie) aus Abbildung 2.11 für den Radius  $R/\lambda_e = 0,01$ . Die Abschirmlänge wurde jeweils zu  $\lambda_d/\lambda_e = 0,1$  gewählt. Der Potenzialverlauf ist auf  $V_R$  und der Abstand  $r - R$  auf  $\lambda_e$  normiert. Das Potenzial für den zylindersymmetrischen Fall fällt natürlich deutlich langsamer ab als das Debye-Hückel-Potenzial. Dennoch zeigt es den gleichen charakteristischen Verlauf, es fällt wie das Debye-Hückel-Potenzial für kleine  $r$  langsamer, für große  $r$  jedoch schneller als  $1/r^2$  ab. Der Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  im Gleichgewicht in Abhängigkeit des Radius  $R/\lambda_e$  wird

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

im Abschnitt 4.4 über die zweidimensionalen OPAR-Simulationen diskutiert. Es zeigt sich, dass das Potenzial nach (2.48) für kleine Radien und Temperaturverhältnisse im Vergleich zu den Debyelängen keine gute Approximation des Potenzialverlaufs darstellt. Eine selbstkonsistente Lösung des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht erfordert wieder eine direkte Lösung der zylindersymmetrischen Poissongleichung.

## 2.4. Staubteilchen in einem Magnetoplasma

### 2.4.1. Gyrationradius in einem Plasma

Bewegt sich ein geladenes Teilchen senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld, wird es durch die magnetische Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gezwungen. Dabei ändert sich nur die Richtung der Geschwindigkeit, nicht aber der Betrag und damit die kinetische Energie des Teilchens. Der Radius der Kreisbahn wird Gyrationradius  $r_g$  genannt und lässt sich über das Gleichsetzen von Zentripetalkraft  $mv_{\perp}^2/r_g$  und der magnetischen Lorentzkraft  $qv_{\perp}B_z$  bestimmen:

$$r_g = \frac{mv_{\perp}}{qB_z} \quad , \quad (2.49)$$

dabei ist  $q$  die Ladung und  $v_{\perp}$  die Geschwindigkeit des Teilchens senkrecht zum magnetischen Feld.  $B_z$  sei der Betrag der magnetischen Flussdichte, wobei ein homogenes Magnetfeld in  $z$ -Richtung angenommen sei, also  $\vec{B} = B_z\vec{e}_z$ . Die Kreisfrequenz oder Zyklotronfrequenz hängt nicht direkt vom Gyrationradius ab:

$$\omega_g = \frac{v_{\perp}}{r_g} = \frac{qB_z}{m} \quad . \quad (2.50)$$

Da Ionen eine vielfach größere Masse als Elektronen besitzen, fällt der Gyrationradius für Elektronen kleiner aus als für Ionen. Entspricht die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen einer Maxwellverteilung, sei der wahrscheinlichste Gyrationradius über die wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v_{\text{mp}} = \sqrt{2kT/m}$  (siehe (3.47)) folgendermaßen definiert:

$$r_g^{\text{mp}} = \frac{mv_{\text{mp}}}{2qB_z} = \sqrt{\frac{mkT}{2}} \frac{1}{qB_z} \quad . \quad (2.51)$$

Durch den Faktor 2 sei eine gleichmäßige Aufteilung des Geschwindigkeitsbetrages von  $v_{\text{mp}}$  auf die senkrechte und die parallele Geschwindigkeitskomponente bezüglich des Magnetfeldes angenommen, also

$$kT = \frac{1}{2}mv_{\text{mp}}^2 = \frac{1}{2}m(v_{\parallel} + v_{\perp})^2 \equiv 2mv_{\perp}^2 \quad \text{woraus folgt} \quad v_{\perp} = v_{\text{mp}}/2 \quad . \quad (2.52)$$

Im Folgenden seien stets Ionen betrachtet, die betragsmäßig die gleiche Ladung wie die Elektronen aufweisen. Das Verhältnis der Gyrationradien von Ionen und Elektronen

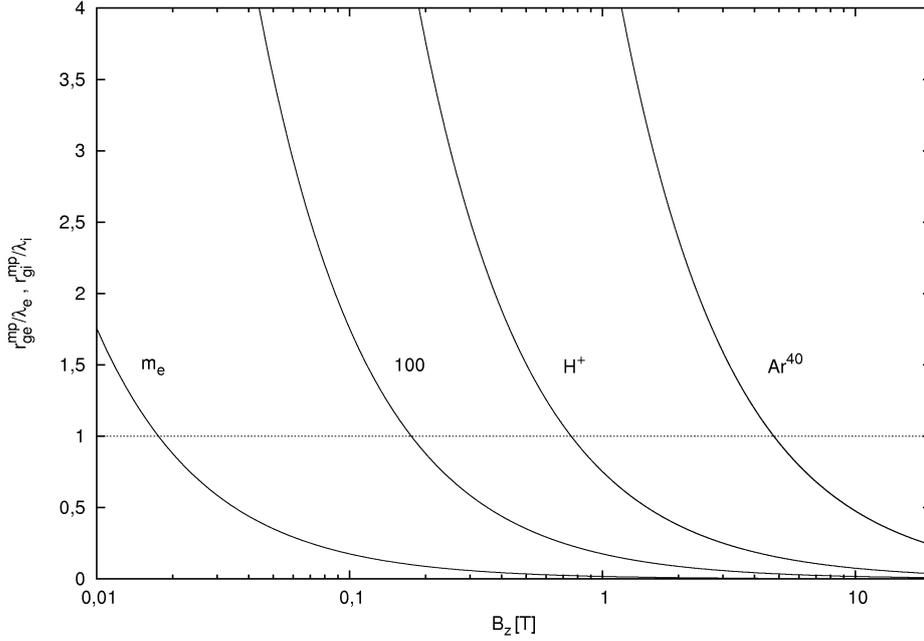


Abbildung 2.13.: Der auf die Debyelänge normierte wahrscheinlichste Gyrationradius nach (2.54) in Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte  $B_z$ . Die Plasmadichte ist zu  $n_0 = n_e = n_i = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^3$  gewählt worden. Der magnetische Fluss  $B_z$  ist in Tesla angegeben. Die vier Kurven zeigen den Gyrationradius für die Elektronenmasse  $m_e$  sowie für die Ionenmassen  $m_i = 100m_e$ ,  $m_i = 1836,2m_e$  (Wasserstoff  $H^+$ ) und  $m_i = 73.609m_e$  (Argon  $Ar^{40}$ ).

hängt somit für die wahrscheinlichste Geschwindigkeit nur vom Massen- und Temperaturverhältnis ab:

$$\frac{r_{gi}^{mp}}{r_{ge}^{mp}} = \sqrt{\beta \frac{m_i}{m_e}} \quad , \quad (2.53)$$

$\beta = T_i/T_e$  ist wieder das Temperaturverhältnis. In Abbildung 2.13 ist der wahrscheinlichste Gyrationradius nach (2.51) in Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte  $B$  dargestellt, wobei  $r_g^{mp}$  auf die Debyelänge nach (C.6) normiert wurde. Das Verhältnis  $r_{ge}^{mp}/\lambda_e$  bzw.  $r_{gi}^{mp}/\lambda_i$  hängt dabei nicht mehr von der Temperatur ab, sondern nur noch von der Masse und der Plasmadichte  $n_0$ :

$$\frac{r_{ge}^{mp}}{\lambda_e} = \frac{1}{B_z} \sqrt{\frac{m_e n_0}{2\varepsilon_0}} \quad , \quad \frac{r_{gi}^{mp}}{\lambda_i} = \frac{1}{B_z} \sqrt{\frac{m_i n_0}{2\varepsilon_0}} \quad . \quad (2.54)$$

Für die Plasmadichte ist in Abbildung 2.13 jeweils  $n_0 = n_e = n_i = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^3$  eingesetzt worden. Die vier Kurven zeigen den Gyrationradius für die Elektronenmasse  $m_e$  und drei verschiedene Ionenmassen. Der magnetische Fluss  $B_z$  ist direkt in Tesla angegeben. Ab ca.  $B_z = 0,02 \text{ T}$  unterschreitet der wahrscheinlichste Gyrationradius der Elektronen die Debyelänge  $\lambda_e$ , wohingegen größere magnetische Flussdichten notwendig

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

sind, um die Ionen zu magnetisieren. Da ein geladenes Teilchen neben einer senkrechten Geschwindigkeitskomponente  $v_{\perp}$  auch eine parallele Komponente  $v_{\parallel} = v_z$  in Bezug auf die Magnetfeldlinien besitzen kann, führen die Teilchen eine Spiralbewegung um eine Magnetfeldlinie aus, wie es in Abbildung 2.14 (links) gezeigt ist. Der Mittelpunkt dieser Spiralbewegung wird Führungszentrum genannt. Die Geschwindigkeit  $\vec{v}_c$ , mit welcher sich das Führungszentrum entlang einer Magnetfeldlinie bewegt, lässt sich durch

$$\vec{v}_c = \vec{v}_{\parallel} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_z^2} \quad \text{mit} \quad |\vec{v}_{\parallel}| = v_{\parallel} = v_z \quad . \quad (2.55)$$

ausdrücken. Die Herleitung ist im Anhang B zu finden. Der erste Term beschreibt die Bewegung parallel zum Magnetfeld, der zweite Term die  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift des Teilchens.

### 2.4.2. OML-Theorie unter Berücksichtigung eines Magnetfeldes

Im Folgenden sei wieder ein homogenes Magnetfeld in  $z$ -Richtung angenommen. Die Spiralbewegung eines Teilchens wird durch das Koordinatenpaar

$$\begin{aligned} x &= x_c + r_g \cos\left(\frac{\omega}{v_z}z + \psi\right) \\ y &= y_c + r_g \sin\left(\frac{\omega}{v_z}z + \psi\right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

bestimmt, wobei  $\psi$  der Phasenwinkel des Teilchens und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit ist. Die Koordinaten  $x_c$  und  $y_c$  geben die Position der Magnetfeldlinie und damit des Führungszentrums an, um welche das Teilchen die Spiralbewegung ausführt. Wie in Abbildung 2.14 (rechts) dargestellt, befinde sich ein sphärisches, ungeladenes Staubteilchen mit dem Radius  $R$  im Koordinatenursprung. Hiermit ist der Abstand eines Führungszentrums zum Mittelpunkt des Staubteilchens durch  $r_c^2 = x_c^2 + y_c^2$  gegeben. Ein Teilchen wird absorbiert, wenn es die Oberfläche des sphärischen Staubteilchens erreicht. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, dass der Abstand des Führungszentrums kleiner als die Summe des Radius  $R$  und des Gyrationradius  $r_g$  ist, aber größer als der Betrag der Differenz:

$$|R - r_g| \leq r_c \leq R + r_g \quad . \quad (2.57)$$

Zudem findet eine Absorption statt, wenn als notwendige Bedingung  $R \geq r_g$  und als hinreichende Bedingung  $r_c \leq R - r_g$  erfüllt wird. Die hinreichende Bedingung zu (2.57) hängt vom Phasenwinkel  $\psi$  des Teilchens ab. Mit der Kugelgleichung  $R^2 = x_R^2 + y_R^2 + z_R^2$  lässt sich ein kritischer Phasenwinkel  $\psi_{\text{krit}}$  berechnen, ab welchem eine Absorption stattfindet.  $x_R$ ,  $y_R$  und  $z_R$  bezeichnen dabei die Koordinaten, an denen das Teilchen die Oberfläche des Staubteilchens berührt. Das Einsetzen von (2.56) in die Kugelgleichung ergibt

$$R^2 - z_R^2 = r_c^2 + r_g^2 + 2r_g \left( x_c \cos\left(\frac{\omega}{v_z}z_R + \psi_{\text{krit}}\right) + y_c \sin\left(\frac{\omega}{v_z}z_R + \psi_{\text{krit}}\right) \right) \quad . \quad (2.58)$$

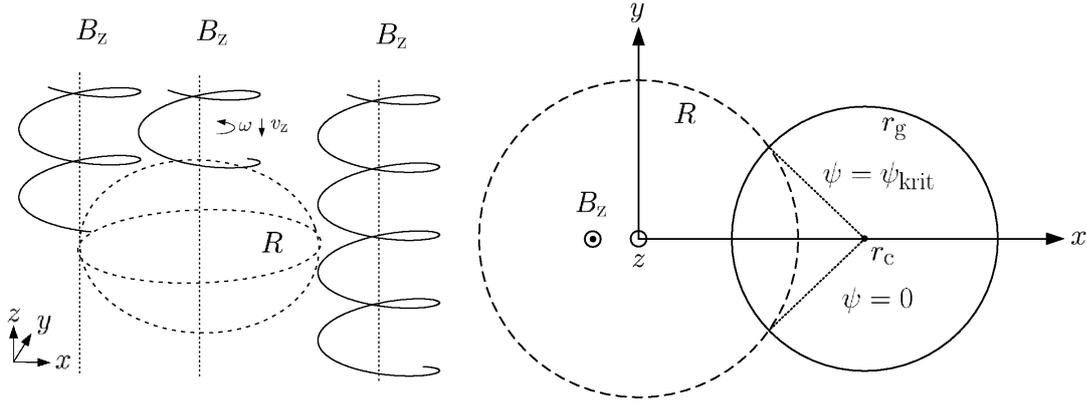


Abbildung 2.14.: Links: Geladene Teilchen führen eine Spiralbewegung (durchgezogene Linien) um Magnetfeldlinien (gepunktete Linien) aus. Das Magnetfeld  $B_z$  ist hier homogen und in  $z$ -Richtung. Ob ein Teilchen von einem sphärischen Staubteilchen mit dem Radius  $R$  (gestrichelte Linie) absorbiert wird, hängt vom Gyrationradius  $r_g$ , vom Abstand  $r_c$  der Magnetfeldlinie bzw. des Führungszentrums, vom Phasenwinkel  $\psi$ , von der Geschwindigkeitskomponente  $v_z$  und von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ab. Rechts: Aufsicht auf die  $x$ - $y$ -Ebene mit einem Staubteilchen (gestrichelte Linie) im Koordinatensprung. Eine hinreichende Absorptionsbedingung definieren die Schnittpunkte der Kreise mit den Radien  $R$  und  $r_g$  durch einen kritischen Phasenwinkel  $\psi_{\text{krit}}$  nach (2.60).

Legt man das Koordinatensystem so wie in Abbildung 2.14 (rechts) dargestellt, folgt  $y_c = 0$  und  $x_c = r_c$ , womit sich (2.58) zu

$$R^2 - z_R^2 = r_c^2 + r_g^2 + 2r_g r_c \cos\left(\frac{\omega}{v_z} z_R + \psi_{\text{krit}}\right) \quad (2.59)$$

reduziert. Durch Auflösen von (2.59) nach  $\psi_{\text{krit}}$  ergibt sich

$$\psi_{\text{krit}} = \arccos\left(\frac{R^2 - z_R^2 - r_c^2 - r_g^2}{2r_g r_c}\right) - \frac{\omega}{v_z} z_R \quad . \quad (2.60)$$

Zu bestimmen ist noch die Koordinate  $z_R$ . Hierzu wird die Ableitung nach  $z_R$  der linken und rechten Seite von (2.59) bestimmt und jeweils quadriert:

$$z_R^2 = r_g^2 r_c^2 \left(\frac{\omega}{v_z}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{v_z} z_R + \psi_{\text{krit}}\right) \quad . \quad (2.61)$$

Aufgelöst nach  $\sin^2$  ergibt sich

$$\sin^2\left(\frac{\omega}{v_z} z_R + \psi_{\text{krit}}\right) = \left(\frac{z_R}{r_g r_c} \frac{v_z}{\omega}\right)^2 \quad . \quad (2.62)$$

Gleichung (2.59) lässt sich auch durch

$$R^2 - z_R^2 = r_c^2 + r_g^2 + 2r_g r_c \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\omega}{v_z} z_R + \psi_{\text{krit}}\right)} \quad (2.63)$$

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

ausdrücken, oder aufgelöst nach  $\sin^2$ :

$$\sin^2\left(\frac{\omega}{v_z}z_R + \psi_{\text{krit}}\right) = 1 - \left(\frac{R^2 - z_R^2 - r_c^2 - r_g^2}{2r_g r_c}\right)^2 \quad . \quad (2.64)$$

Durch Gleichsetzen von (2.62) und (2.64) folgt der Ausdruck

$$0 = z_R^4 + 2z_R^2\left(r_g^2 + r_c^2 - R^2 + 2\left(\frac{v_z}{\omega}\right)^2\right) + (r_g^2 + r_c^2 - R^2)^2 - 4r_g^2 r_c^2 \quad . \quad (2.65)$$

Aus (2.65) folgt nun mittels der quadratischen Ergänzung ein Ausdruck für  $z_R^2$ :

$$z_R^2 = R^2 - r_c^2 - r_g^2 - 2\left(\frac{v_z}{\omega}\right)^2 + 2\sqrt{\left(\frac{v_z}{\omega}\right)^2\left(\left(\frac{v_z}{\omega}\right)^2 + r_g^2 + r_c^2 - R^2\right) + r_g^2 r_c^2} \quad . \quad (2.66)$$

Gleichung (2.60) mit (2.66) gibt also einen kritischen Phasenwinkel  $\psi_g$  in Abhängigkeit des Staubteilchenradius  $R$ , des Gyrationradius  $r_g$ , des Abstand  $r_c$  des Führungszentrums sowie der parallelen Geschwindigkeitskomponente  $v_z$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  an. Ein Teilchen kann dabei die Oberfläche des Staubteilchens erreichen, wenn der Phasenwinkel größer oder gleich  $\psi_{\text{krit}}$  ist (siehe Abbildung 2.14). Zudem wird ein Teilchen unabhängig von dessen Phasenwinkel absorbiert, wenn der kritische Phasenwinkel kleiner als Null ist. Zusammengefasst lautet die Bedingung für die Absorption an einem ungeladenen Staubteilchen

$$\begin{aligned} \text{Notwendige Bedingung} & : |R - r_g| \leq r_c \leq R + r_g \\ \text{Hinreichende Bedingung} & : \psi \geq \psi_{\text{krit}} \quad \text{oder} \quad \psi_{\text{krit}} < 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

oder

$$\begin{aligned} \text{Notwendige Bedingung} & : R \geq r_g \\ \text{Hinreichende Bedingung} & : r_c \leq R - r_g \quad . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Im Fall von  $\psi = \psi_{\text{krit}} = 0$  streift das Teilchen die Oberfläche des Staubteilchens und wird daher per Definition absorbiert. Mit dem kritischen Phasenwinkel  $\psi_{\text{krit}}$  nach (2.60) mit (2.66) lässt sich nun der Strom auf ein (ungeladenes) Staubteilchen mit dem Radius  $R$  bestimmen. Ähnlich wie im Abschnitt über die OML-Theorie vorgestellt, ergibt sich der Strom über eine Integration der Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit (siehe (2.10)). Die Integration muss hierzu über den Gyrationradius  $r_g$ , den Abstand  $r_c$  des Führungszentrums, den Phasenwinkel  $\psi$  und über die Geschwindigkeitskomponente  $v_z$  ausgeführt werden. Zudem müssen die Absorptionsbedingungen nach (2.67) und (2.68) berücksichtigt werden.

Abbildung 2.15 aus Whipple [78, 42] zeigt den numerisch integrierten Strom  $I/I_0$  in Abhängigkeit des Verhältnisses  $\gamma = R/r_g^{\text{mp}}$ .  $I_0$  ist dabei der Strom, welcher sich ohne ein Magnetfeld ergibt und nach (2.16) bzw. (2.18) mit  $V_R = 0$  durch

$$I_0 = 4\pi R^2 e n_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \quad (2.69)$$

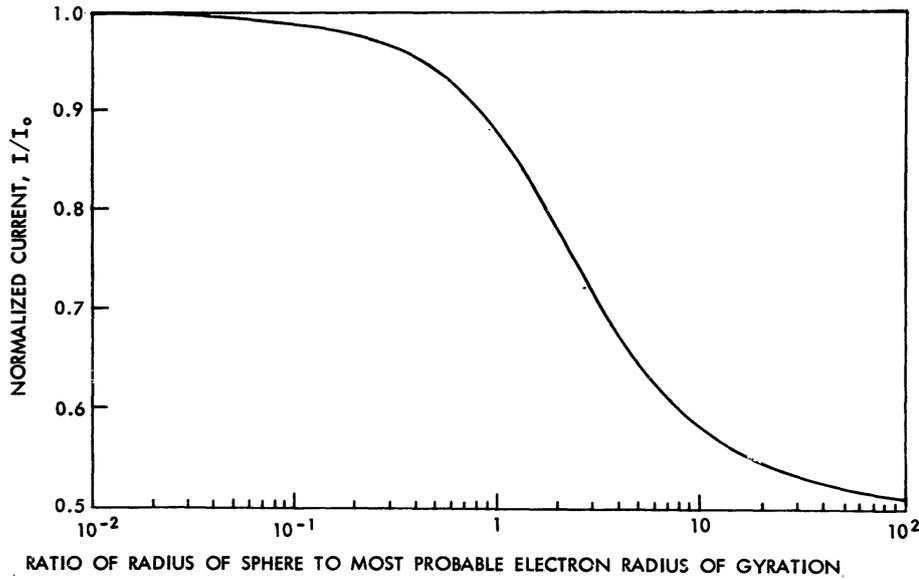


Abbildung 2.15.: Der numerisch integrierte Strom auf ein ungeladenes Staubteilchen mit dem Radius  $R$  in einem homogenen Magnetfeld in Abhängigkeit des Verhältnisses des Radius  $R$  zum wahrscheinlichsten Gyrationradius  $r_g^{\text{mp}}$  der Elektronen in einer Maxwellverteilung.  $I_0$  ist der Strom, welcher sich ohne ein Magnetfeld nach (2.69) ergibt. Aus Whipple [78, 42].

gegeben ist. Ist der wahrscheinlichste Gyrationradius  $r_g^{\text{mp}}$  mehr als einhundertmal größer als der Staubteilchenradius  $R$ , bleibt der Strom auf das ungeladene Staubteilchen nahezu unbeeinflusst. Dagegen reduziert sich der Strom mit sinkendem Gyrationradius (also mit steigendem magnetischen Fluss) im Vergleich zum Radius. Ist der Radius ca. einhundertmal größer als der wahrscheinlichste Gyrationradius, sinkt der Strom bis auf ca. die Hälfte des Stromes  $I_0$  ohne ein Magnetfeld. In Patacchini et al. [89] wird folgender Polynom-Fit für den Funktionsverlauf in Abbildung 2.15 angegeben (Fehler 0,3%):

$$I(\xi)/I_0 = 1,0 - 0,0946 \xi - 0,305 \xi^2 + 0,95 \xi^3 - 2,2 \xi^4 + 1,15 \xi^5 \quad , \quad (2.70)$$

mit

$$\xi = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \quad , \quad \gamma = R/r_g^{\text{mp}} \quad . \quad (2.71)$$

In der obigen Betrachtung wurde lediglich der Strom auf ein ungeladenes Staubteilchen ( $V_R = 0$ ) bestimmt. Die Berechnung eines Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht wie in der OML- oder OM-Theorie in zusätzlicher Abhängigkeit eines konstanten und homogenen Magnetfeldes ist analytisch nicht mehr möglich. Neben der Bewegung der Elektronen und Ionen in einem Zentralpotenzial würde zusätzlich die Spiralbewegung um die Magnetfeldlinien sowie die  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift in der Nähe des geladenen Staubteilchens berücksichtigt werden müssen. Zudem sind die Ströme auf ein sphärisches Staubteilchen

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

in einem Magnetfeld nicht mehr rotationssymmetrisch, da die Plasmateilchen durch das Magnetfeld eine bevorzugte Bewegungsrichtung erhalten. Daher seien im Folgenden zunächst qualitative Aussagen über das Gleichgewichtspotenzial eines Staubteilchens in einem Magnetfeld diskutiert. Für ein gegebenes, konstantes Magnetfeld wird nach (2.53) der Gyrationradius der Ionen aufgrund der viel größeren Masse gegenüber den Elektronen stets größer ausfallen als der Gyrationradius der Elektronen. Die Elektronen werden also stärker an das Magnetfeld gebunden als die Ionen, weshalb auch der Strom von Elektronen auf ein Staubteilchen stets stärker durch ein Magnetfeld beeinflusst wird als der Strom von Ionen. Es sei ein magnetischer Fluss betrachtet, bei welchem der wahrscheinlichste Gyrationradius der Elektronen kleiner als der Staubteilchenradius ist. Mit  $r_{\text{ge}}^{\text{mp}} < R$  folgt damit nach (2.51) für das Magnetfeld

$$B_e > \sqrt{\frac{m_e k T_e}{2}} \frac{1}{eR} \quad \text{für} \quad 1 < \gamma_e = R/r_{\text{ge}}^{\text{mp}} \quad . \quad (2.72)$$

In Tsytovich et al. [103] wird (2.72) als kritisches Magnetfeld bezeichnet, bei welchem eine signifikante Änderung der Staubteilchenladung beginnt. Der wahrscheinlichste Gyrationradius der Ionen soll für das Magnetfeld  $B_e$  dabei stets größer als der Staubteilchenradius bleiben:

$$r_{\text{gi}}^{\text{mp}} = r_{\text{ge}}^{\text{mp}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e} \beta} > R \quad , \quad \gamma_i < 1 < \gamma_e \quad . \quad (2.73)$$

Elektronen mit einer ausreichenden kinetischen Energie, um die negativ geladene Oberfläche des Staubteilchens zu erreichen, bewegen sich somit nahezu entlang der Magnetfeldlinien. Der Gyrationradius der Elektronen, welche zum Ladungsstrom auf das Staubteilchen beitragen, ist also sehr klein gegenüber dem Staubteilchenradius. Die Elektronen mit einer nicht ausreichenden kinetischen Energie werden vom Oberflächenpotenzial entlang der magnetischen Feldlinien zurück reflektiert. Durch die starke Bindung an das Magnetfeld verändert sich die Einfallsrichtung der Elektronen auf das sphärische Staubteilchen. Statt der Kugeloberfläche  $4\pi R^2$  muss daher im Integral über die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit (siehe (2.11)) nur die Projektionsfläche  $2\pi R^2$  des Staubteilchens angesetzt werden. Der Faktor zwei berücksichtigt dabei die Einfallsrichtung von zwei Seiten. Hieraus folgt, dass sich der Elektronenstrom im Magnetfeld  $B_e$  gegenüber dem aus der OML-Theorie ohne Magnetfeld nach (2.18) um die Hälfte verringert. Der Ionenstrom bleibt dagegen aufgrund des großen Gyrationradius nahezu unbeeinflusst. Das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht ergibt sich für den vorgestellten Fall daher aus  $I_i^{\text{OML}} + I_e^{\text{OML}}/2 = 0$ . Mit (2.16) und (2.18) folgt:

$$\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 2 \left( 1 - \frac{\eta_R}{\beta} \right) e^{-\eta_R} \quad \text{für} \quad \gamma_i < 1 < \gamma_e \quad . \quad (2.74)$$

Abbildung 2.16 zeigt das normierte Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  (gestrichelte Linie) aus (2.74) in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses  $\beta$  für drei Massenverhältnisse. Zum Vergleich ist das Oberflächenpotenzial ohne Magnetfeld nach der OML-Theorie aus Abbildung 2.4 gezeigt (durchgezogene Linie). Durch den um die Hälfte reduzierten Elektronenstrom hat sich erwartungsgemäß auch der Betrag des Oberflächenpotenzials im

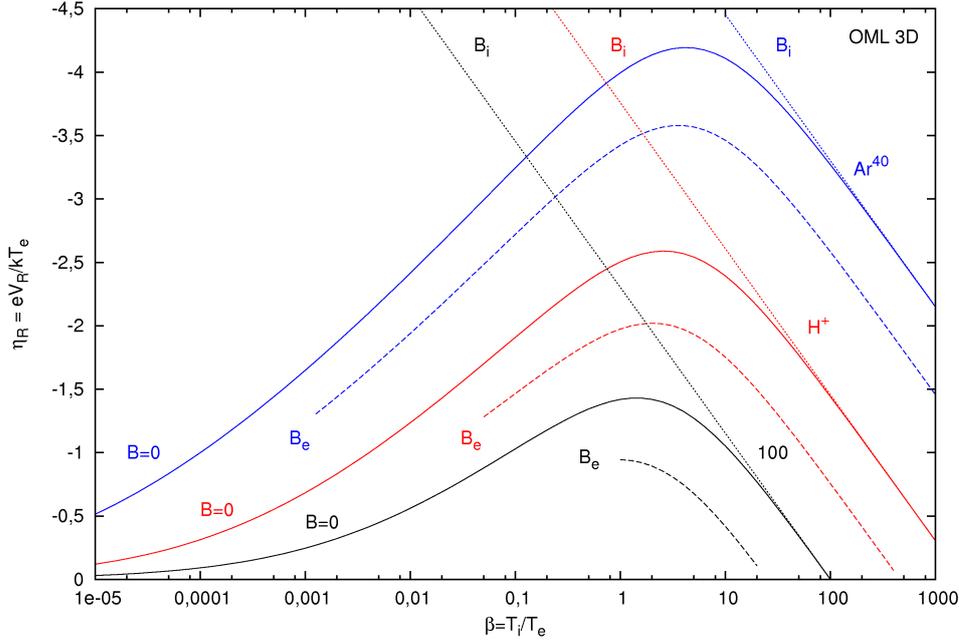


Abbildung 2.16.: Das normierte Oberflächenpotenzial  $\eta_R = eV_R/kT_e$  nach (2.74) für ein Magnetfeld  $B_e$  (2.72) (gestrichelte Linie) sowie nach (2.77) für ein Magnetfeld  $B_i$  (2.75) (gepunktete Linie) in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses  $\beta$ . Zum Vergleich ist das Oberflächenpotenzial ohne Magnetfeld aus Abbildung 2.4 gezeigt (durchgezogene Linie). Für das Massenverhältnis (Ionen- zu Elektronenmasse,  $m_i/m_e$ ) wurde 1836,2 (Wasserstoff  $H^+$ ) (Rot), 73.609 (Argon  $Ar^{40}$ ) (Blau) und 100 (Schwarz) angenommen.

Gleichgewicht verringert. Zu beachten ist, dass nach der Voraussetzung (2.73) der wahrscheinlichste Gyrationradius der Ionen für ein gegebenes Massen- und Temperaturverhältnis größer als  $R$  sein muss, damit der Ionenstrom in (2.74) nahezu unbeeinflusst vom Magnetfeld bleibt. In Abbildung 2.16 ist daher das Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  in Abhängigkeit des Massenverhältnisses nur bis zu dem Temperaturverhältnis gezeigt, für das  $r_{gi}^{mp}/r_{ge}^{mp} \geq 10$  (siehe (2.53)) gilt. Hierdurch beschränkt sich der Gültigkeitsbereich insbesondere für das kleine Massenverhältnis von 100 auf relativ große Temperaturverhältnisse.

Betrachtet man ein derart starken magnetischen Fluss, sodass der wahrscheinlichste Gyrationradius der Ionen deutlich kleiner als der Staubteilchenradius ausfällt, ergibt sich mit  $r_{gi}^{mp} < R$  nach (2.51) für das Magnetfeld

$$B_i > \sqrt{\frac{m_i k T_i}{2}} \frac{1}{eR} \quad \text{für} \quad 1 < \gamma_i = R/r_{gi}^{mp} \quad . \quad (2.75)$$

Zusätzlich gelte  $B_i \gg B_e$ . Für diesen Fall ist sowohl die Bewegung der Elektronen als auch der Ionen stark an das Magnetfeld gekoppelt. Die Gyrationradien der Elektronen und Ionen seien also allesamt kleiner als der Staubteilchenradius, womit sich nun alle Teilchen nahezu entlang der Magnetfeldlinien bewegen. Somit ist der Ladungsstrom der

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

positiv geladenen Ionen auf ein negativ geladenes Staubteilchen unabhängig von der Größe des Oberflächenpotenzials, denn alle Ionen, welche sich entlang einer Magnetfeldlinie bewegen, die das Staubteilchen berührt, werden auch absorbiert. Analog zum oben diskutierten Elektronenstrom muss nun auch im Integral über die Verteilungsfunktion der Ionengeschwindigkeit (siehe (2.11)) die Projektionsfläche  $2\pi R^2$  berücksichtigt werden. Der Ionenstrom lässt sich also für ein Magnetfeld  $B_i$  nach (2.75) zu

$$I_i^{B_i} \approx 2\pi R^2 e n_0 \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i}} \quad \text{für } 1 < \gamma_i \quad . \quad (2.76)$$

abschätzen. Das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht ergibt sich für den vorgestellten Fall wieder aus  $I_i^{B_i} + I_e^{\text{OML}}/2 = 0$ . Mit (2.76) und (2.18) folgt:

$$\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = e^{-\eta_R} \quad \text{für } 1 < \gamma_i, \gamma_e \quad . \quad (2.77)$$

Abbildung 2.16 zeigt das normierte Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  (gepunktete Linie) aus (2.77) in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses  $\beta$  für drei Massenverhältnisse. Der Betrag des Oberflächenpotenzials steigt jeweils mit sinkendem Temperaturverhältnis deutlich im Vergleich zum Fall ohne Magnetfeld an, da der Ionenstrom nach (2.76) mit fallender Iontemperatur kleiner wird.

Die Verläufe in Abbildung 2.16 für die Magnetfelder  $B_e$  und  $B_i$  stellen wie beschrieben nur eine qualitative Aussage über das Verhalten des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht in dem jeweiligen Magnetfeld sowie ausschließlich für den OML-Fall ( $R < \lambda_e, \lambda_i$ ) da und werden in Bezug auf die Gleichgewichtsladung von Staubteilchen auch in Tsytoich et al. [103, 3], Schwabe [104] sowie in Salimullah et al. [105] behandelt. Für Magnetfeldstärken von  $B \leq B_e$  oder  $B \leq B_i$  lassen sich nur über numerische Simulationen Aussagen über das Oberflächenpotenzial treffen. In Patacchini et al. [89] ist durch direkte numerische Integration von genügend Teilchenbahnen der Elektronenstrom auf eine negativ geladene Kugel in einem Zentralpotenzial über einen weiten Bereich von Magnetfeldstärken und Oberflächenpotenzialen bestimmt worden. Dabei wurde ein unabgeschirmtes Coulomb-Potenzial (siehe (2.8)) als Potenzialprofil angesetzt. Die Ergebnisse lassen sich in einer empirischen bestimmten Formel ausdrücken [89]:

$$I_e^B = -4\pi R^2 e n_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \left( A(w) + (1 - A(w)) \frac{I(\xi_e)}{I_0} \right) e^{\eta_R} \quad . \quad (2.78)$$

$A(w)$  ist die sogenannte Entmagnetisierungsfunktion, welche die Abhängigkeit vom magnetischen Fluss  $B$  trägt:

$$A(w) = 0,678 w + 1,543 w^2 - 1,212 w^3 \quad , \quad (2.79)$$

mit

$$w = \frac{\zeta_e}{1 + \zeta_e} \quad \text{sowie} \quad \zeta_e = -\frac{\eta_R}{\gamma_e} \quad . \quad (2.80)$$

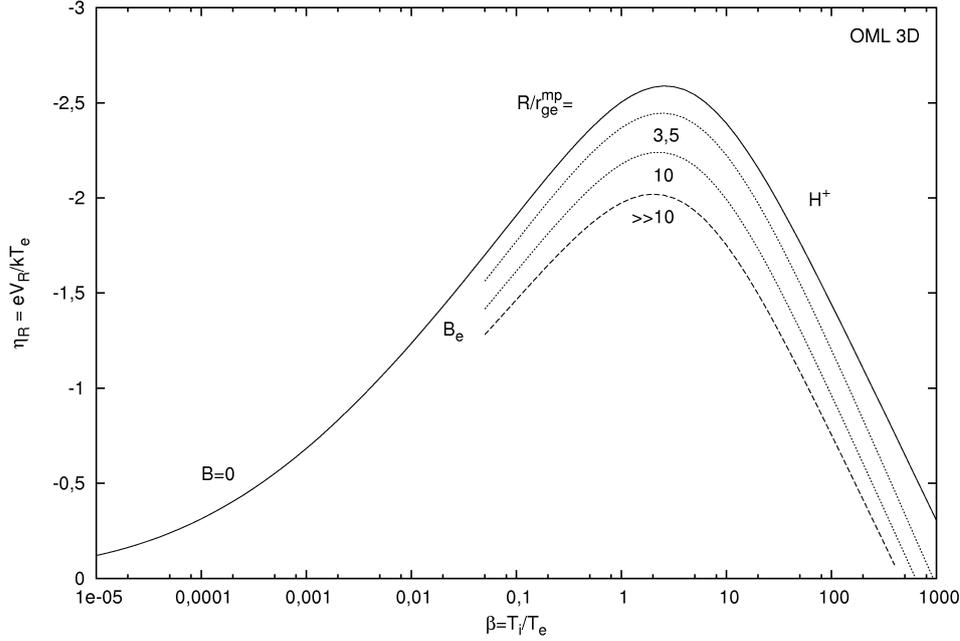


Abbildung 2.17.: Das normierte Oberflächenpotenzial  $\eta_R = eV_R/kT_e$  nach (2.81) für Magnetfelder  $B_e > B > 0$  (gepunktete Linien) in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses  $\beta$  für  $\gamma_e = R/r_{ge}^{mp} = 3,5$  und  $10$ . Aus Gründen der Übersicht ist nur das Massenverhältnis  $1836,2$  (Wasserstoff  $H^+$ ) gezeigt. Die durchgezogene Linie entspricht dem Fall ohne Magnetfeld nach der OML-Theorie, die gestrichelte Linie dem Fall (2.74) aus Abbildung 2.16 für ein Magnetfeld  $B_e$  nach (2.72). Für sehr große  $\gamma_e$  geht die Lösung von (2.81) in die von (2.74) über.

Die Abhängigkeit von  $B$  geht dabei über den wahrscheinlichsten Gyrationradius der Elektronen,  $r_{ge}^{mp}$  nach (2.51), ein. Der Ausdruck  $I(\xi_e)/I_0$  entspricht dem Strom auf ein ungeladenes Staubteilchen in einem Magnetfeld und ist durch (2.70) gegeben. Für ein verschwindendes Magnetfeld, d.h. für  $r_{ge}^{mp} = 0$ , verschwindet auch die Entmagnetisierungsfunktion und der Ausdruck in der Klammer von (2.78) ist gleich eins, womit  $I_e^{B=0}$  dem Ausdruck aus der OML-Theorie (siehe (2.18)) entspricht. Setzt man nun  $I_e^B$  nach (2.78) und den Ionenstrom nach der OML-Theorie (2.16) in  $I_1^{OML} + I_e^B = 0$  ein, ergibt sich:

$$\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left( A(w) + (1 - A(w)) \frac{I(\xi_e)}{I_0} \right) = \left( 1 - \frac{\eta_R}{\beta} \right) e^{-\eta_R} \quad \text{für } B_e > B > 0 \quad . \quad (2.81)$$

Abbildung 2.17 zeigt wieder das normierte Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  (gepunktete Linien) aus (2.81) in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses  $\beta$  für zwei Werte von  $\gamma_e$ . Aus Gründen der Übersicht ist nur das Massenverhältnis für Wasserstoff  $H^+$  gezeigt. Die durchgezogene Linie entspricht dem Fall ohne Magnetfeld nach der OML-Theorie, die gestrichelte Linie dem Fall (2.74) aus Abbildung 2.16 für ein Magnetfeld  $B_e$  nach (2.72). Für sehr große  $\gamma_e$ , d.h. für einen magnetischen Fluss, welcher die Bewegung der Elektronen sehr stark an die magnetischen Feldlinien koppelt, geht die Lösung von (2.81) in die

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

von (2.74) über. Die beiden gezeigten Kurven für  $\gamma_e = 3, 5$  und  $10$  liegen zwischen dem Fall ohne Magnetfeld und dem Fall  $B_e$  nach (2.72), weshalb (2.81) das Oberflächenpotenzial für Magnetfelder  $B_e > B > 0$  angibt. Somit stellt die untere Kurve nach (2.74) mit dem Elektronenstrom  $I_e^{\text{OML}}/2$  eine untere Grenze für den Betrag des Oberflächenpotenzial bzw. den Elektronenstrom für den Fall von magnetisierten Elektronen aber nicht magnetisierten Ionen dar.

Im Rahmen der Plasmasondentheorie sind in Laframboise und Rubinstein [73, 74, 75, 76] obere sowie untere Grenzen des Elektronenstroms auf eine Plasmasonde in einem Magnetoplasma in Abhängigkeit des Sondenpotenzials bestimmt worden. Dabei wird der Strom über die Integration von Teilchenbahnen berechnet, wobei diejenigen Teilchenbahnen identifiziert werden müssen, welche auch tatsächlich zum Strom auf die Sonde beitragen. Denn in einem Zentralpotenzial mit einem überlagerten Magnetfeld existieren Bahnen, welche in sich geschlossen sind und damit nicht im Unendlichen beginnen. Demzufolge sind diese Bahnen nicht besetzt und tragen nicht zum Strom auf die Sonde bei. Um den entsprechenden Elektronenstrom zu bestimmen wird zudem angenommen, dass die Änderung des elektrostatischen Potenzial der Sonde innerhalb eines Gyrationradius sehr klein ist, womit alle Teilchenbahnen als reine Spiralbahnen approximiert und eine Maxwellverteilung angesetzt werden kann. Dies hat zur Folge, dass keine Potenzialbarrieren berücksichtigt werden können, die Lösung also nur für  $R \ll \lambda_e, \lambda_i$  zutrifft. Zudem kann nur ein Bereich mit einer oberen und unteren Grenze angegeben werden, in welchem der Elektronenstrom in Abhängigkeit des Sondenpotenzials liegen wird. In einer späteren Arbeit von Sonmor und Laframboise [106] wird eine numerische Lösung vorgestellt, wobei über eine Million Teilchenbahnen numerisch integriert wurde. In Sanmartin [72] werden auch Potenzialbarrieren berücksichtigt, wobei die Einschränkung  $R < r_{\text{ge}}^{\text{mp}}$  gemacht werden muss, womit die Lösung nur für relativ starke Magnetfelder Gültigkeit besitzt. Ein Review der theoretischen Behandlungen von Plasmasonden in einem Magnetfeld ist in Laframboise et al. [107] zu finden.

Mit dem bereits im letzten Kapitel erwähnten SCEPTIC-Code ist in Patacchini et al. [89] das Oberflächenpotenzial einer sphärischen Sonde in Abhängigkeit eines magnetischen Flusses bestimmt worden. Der SCEPTIC-Code basiert dabei nur teilweise auf dem PIC-Verfahren. Lediglich die Ionen werden als stoßfreie, kinetische Komponenten simuliert, der Elektronenstrom auf die Sonde wird stets nach Gleichung (2.78) angesetzt. Das Potenzialprofil wird ebenfalls vorgegeben und ist durch ein Debye-Hückel-Potenzial berücksichtigt worden, wobei zusätzlich eine Winkelabhängigkeit bezüglich der magnetischen Feldlinien angesetzt wurde, wodurch ein nicht mehr rotationsymmetrisches Potenzialprofil entsteht. Für das Verhältnis zwischen Abschirmlänge und Radius der Sonde wurde  $\lambda_d/R = 2, 3$  angesetzt.

Abbildung 2.18 aus Patacchini et al. [89] zeigt das mit SCEPTIC bestimmte Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  im Gleichgewicht in Abhängigkeit von  $\gamma_i = R/r_{\text{gi}}^{\text{mp}}$  für jeweils zwei Iontemperaturen  $kT_i = 1 \text{ eV}$  und  $kT_i = 0,1 \text{ eV}$ . Die linke Abbildung zeigt die Ergebnisse für ein Massenverhältnis von  $1836,2$  (Wasserstoff  $\text{H}^+$ ), die rechte Abbildung für  $73.609$  (Argon  $\text{Ar}^{40}$ ). Zum Vergleich (durchgezogene Linie) ist das Oberflächenpotenzial nach Gleichung (2.81) aus Abbildung 2.17 gezeigt, jedoch hier in Abhängigkeit von  $\gamma_i = \gamma_e \sqrt{T_e m_e / T_i m_i}$  (siehe auch (2.53)) und dem gegebenen Temperaturverhältnis.

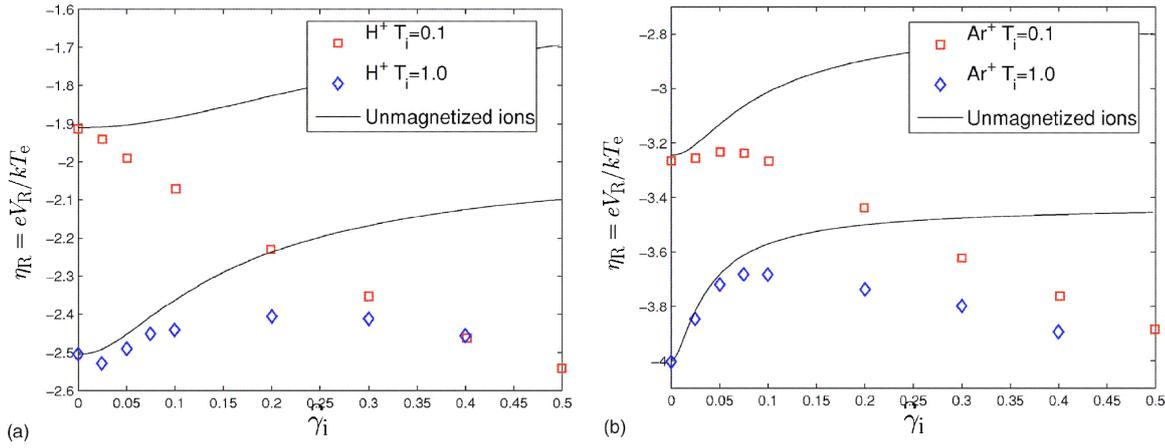


Abbildung 2.18.: Das mit SCEPTIC bestimmte Oberflächenpotenzial  $\eta_R$  im Gleichgewicht in Abhängigkeit von  $\gamma_i = R/r_{gi}^{mp}$  für  $kT_i = 1\text{ eV}$  (blau) und  $kT_i = 0,1\text{ eV}$  (rot). Die linke Abbildung (a) zeigt die Ergebnisse für ein Massenverhältnis von 1836,2 (Wasserstoff  $H^+$ ), die rechte Abbildung für 73.609 (Argon  $Ar^{40}$ ). Zum Vergleich (jeweils durchgezogene Linie) ist das Oberflächenpotenzial nach Gleichung (2.81) aus Abbildung 2.17 gezeigt, welche den Fall von magnetisierten Elektronen, aber unmagnetisierten Ionen beschreibt. Aus Patacchini et al. [89].

Die durchgezogene Linie in Abbildung 2.18 beschreibt also den Fall von magnetisierten Elektronen, aber unmagnetisierten Ionen. Für ein verschwindendes Magnetfeld ( $\gamma_i = 0$ ) stimmen die Oberflächenpotenziale jeweils mit den Ergebnissen aus der OML-Theorie überein. Mit zunehmendem Magnetfeld bzw. kleiner werdendem Gyrationradius weichen die mit SCEPTIC bestimmten Oberflächenpotenziale zunehmend von der Kurve nach (2.81) ab, obwohl die Magnetisierung der Ionen jeweils relativ gering ist, da stets  $\gamma_i < 0,5$  gilt. Lediglich für das größte Verhältnis von  $\gamma_e/\gamma_i$  für Argon bei  $kT_i = 1\text{ eV}$  lässt sich eine gute Übereinstimmung des numerisch bestimmten Oberflächenpotenzials mit der Kurve für relativ schwache Magnetfelder  $\gamma_i < 0,05$  feststellen. Für das kleinste Verhältnis von  $\gamma_e/\gamma_i$  für Wasserstoff mit  $kT_i = 0,1\text{ eV}$  fällt das numerisch bestimmte Oberflächenpotenzial monoton ab, was bedeutet, dass der Ionenstrom sogar schneller als der Elektronenstrom mit steigendem Magnetfeld abnimmt. Die Schlussfolgerung in Patacchini et al. [89] ist daher, dass die in (2.74) bzw. (2.81) angenommene Bedingung von magnetisierten Elektronen aber unmagnetisierten Ionen in einem stationären Plasma mit einer Maxwellverteilung niemals zutrifft bzw. existiert.

Die Bahnen eines geladenen Teilchens in einem Zentralpotenzial unter dem Einfluss eines Magnetfeldes können entsprechend kompliziert verlaufen, wie in Abbildung 2.19 gezeigt ist. Hier sind Teilchenbahnen in einem Debye-Hückel-Potenzial (mit  $R/\lambda_d = 1$ ) analog zu Abbildung 2.8 aus dem Abschnitt über die OM-Theorie für fünf verschiedene Stoßparameter  $\sigma/R$  bei zwei Streuparametern  $\alpha$  nach (2.9) dargestellt, wobei zusätzlich ein Magnetfeld  $B_x$  in  $x$ -Richtung berücksichtigt wurde. Der magnetische Fluss  $B_x$  ist dabei so gewählt worden, dass der Gyrationradius in Bezug auf die anfängliche Geschwindig-

## 2. Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen

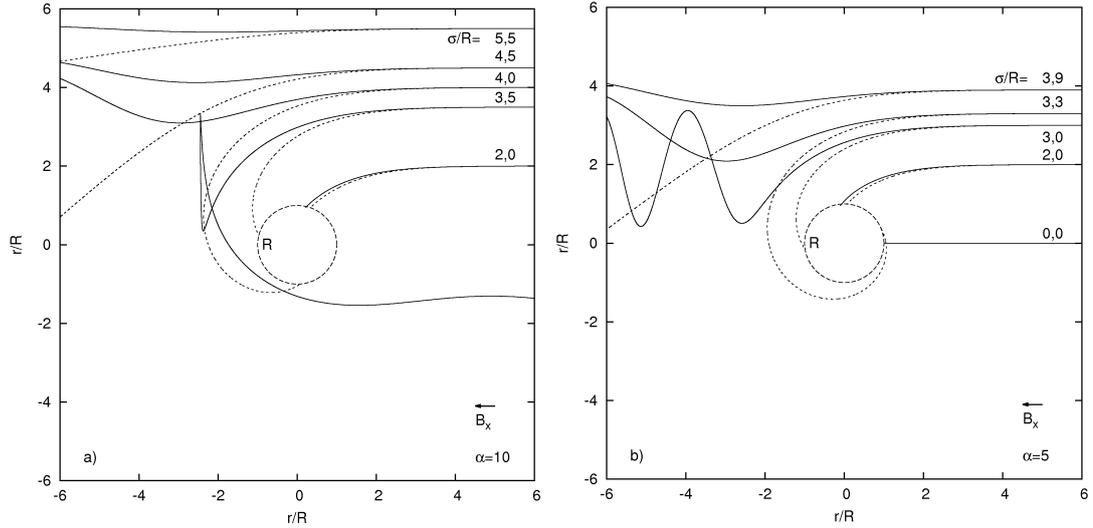


Abbildung 2.19.: Teilchenbahnen wie nach Abbildung 2.8 für  $\alpha = 10$  und  $\alpha = 5$ , wobei zusätzlich ein Magnetfeld  $B_x$  in  $x$ -Richtung nach (2.82) angesetzt wurde. Die Teilchenbahnen beginnen ungestört am rechten Rand (im Unendlichen) und enden auf der Oberfläche des Staubteilchens mit dem Radius  $R$ , falls das Teilchen absorbiert wird. Alle Abstände sind auf den Radius  $R$  normiert. Zum Vergleich sind die Bahnkurven (gestrichelte Linien) aus Abbildung 2.8 ohne Magnetfeld dargestellt.

keit  $v_x$  des Teilchens das eineinhalbfache des Staubteilchenradius beträgt, also

$$B_x = \frac{2mv_x}{3R} = \frac{2}{3R} \sqrt{\frac{meV_R}{\alpha}} \quad , \quad (2.82)$$

wobei  $V_R$  das Oberflächenpotenzial ist. Zum Vergleich sind die Teilchenbahnen aus Abbildung 2.8 ohne ein Magnetfeld gezeigt (gestrichelte Linien). Die Teilchenbahnen beginnen ungestört am rechten Rand und enden im Falle einer Absorption auf der Oberfläche des Staubteilchens. Die Teilchen besitzen zu Beginn nur eine Geschwindigkeitskomponente parallel zum Magnetfeld, weshalb diese zunächst nicht vom Magnetfeld beeinflusst werden. Erst durch die Energieänderung im Zentralpotenzial erhalten die Teilchen eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld und werden entsprechend abgelenkt. Im Gegensatz zum Fall ohne Magnetfeld sind die Bahnkurven nun nicht mehr rotationssymmetrisch in Bezug auf das sphärische Staubteilchen; aus Gründen der Übersicht sind in Abbildung 2.19 jedoch nur die Bewegungen in der  $x$ - $y$ -Ebene gezeigt. Im Gegensatz zu den Bahnkurven ohne Magnetfeld werden hier nur noch die Teilchen mit dem Stoßparameter  $\sigma/R = 2,0$  bzw.  $\sigma/R = 0,0$  absorbiert. Während das Teilchen mit  $\sigma/R = 3,5$  sogar zurückreflektiert wird, werden die anderen nicht absorbierten Teilchen nach dem Vorbeiflug am Staubteilchen in eine Spiralbewegung gezwungen. Wie in Sonmor et al. [108] diskutiert wird, können Teilchenbahnen in einem anziehenden Zentralpotenzial mit einem überlagerten, konstanten Magnetfeld chaotisch verlaufen.

# 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

Um ein Plasma mit darin enthaltenen geladenen Staubteilchen zu simulieren, wird das sogenannte „Particle-In-Cell“ Verfahren (PIC) verwendet. Hierzu wurde ein existierender PIC-Code, der OPAR-Code, weiterentwickelt [109]. OPAR (OPen ARchitecture PARticle) wurde ursprünglich von T. Daube and H. Schmitz in den 1990er Jahren entwickelt und ist in der objektorientierten Programmiersprache C++ geschrieben. Dabei wurde großer Wert auf eine offene Gestaltung des Codes gelegt, wodurch die Implementierung von neuen Simulationsmodulen sehr komfortabel ist. OPAR kann ein-, zwei- und dreidimensionale Plasmasysteme simulieren. Die Implementierung von ortsfesten Staubteilchen geschieht durch die Berücksichtigung von inneren, sphärischen Randbedingungen, welche in jedem Zeitschritt gleich dem Oberflächenpotenzial des Staubteilchens gesetzt werden. Das Oberflächenpotenzial berechnet sich dabei aus der Anzahl der absorbierten geladenen Plasmateilchen, womit das (schwebende) Oberflächenpotenzial in der Plasmasimulation zeitlich variabel ist. Zudem können in OPAR in einer zwei- oder dreidimensionalen Simulation beliebig viele innere Randbedingungen berücksichtigt werden, womit auch die Simulation eines Clusters aus Staubteilchen möglich ist. Im Folgenden werden OPAR und dessen Funktionalität vorgestellt.

## 3.1. Das „Particle-In-Cell“ Verfahren

Die Bewegung einzelner, geladener Teilchen in einem Plasma wird durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen beschrieben, welche numerisch direkt integriert werden können:

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= q \left( \vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right) \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \quad , \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  der Ort und die Geschwindigkeit,  $m$  und  $q$  die Masse und die Ladung des Teilchens sind.  $\vec{E}(\vec{r})$  und  $\vec{B}(\vec{r})$  sind die elektrischen und magnetischen Felder am Ort des Teilchens. Das elektrische Feld am Ort des  $\nu$ -ten Teilchens hängt dabei von den Orten aller anderen Teilchen ab, weshalb für jedes Teilchen die folgende Summe bestimmt werden muss:

$$\vec{E}(\vec{r}_\nu) = \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\nu q_\mu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|^3} (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \quad . \tag{3.2}$$

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

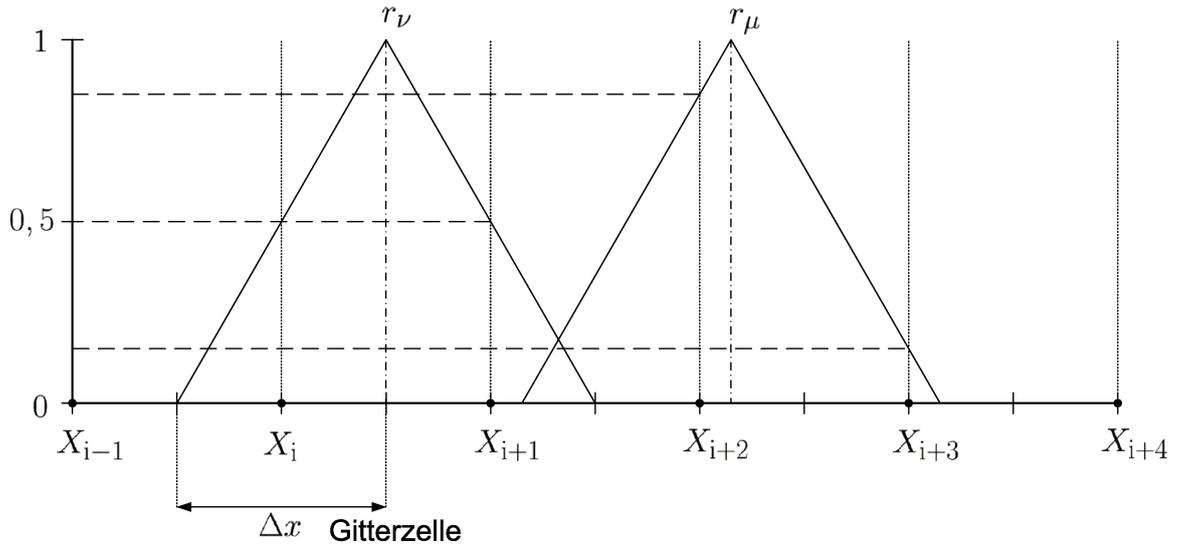


Abbildung 3.1.: Die Abbildung von Ladungen auf ein diskretes, eindimensionales Gitter nach dem PIC Verfahren. Die Zuweisung der Ladung hängt von den Anteilen der Superteilchen in jeder Gitterzelle ab, wodurch die Superteilchen eine ausgedehnte Form erhalten. Die Ladung am Ort  $r_\nu$  liegt hier exakt zwischen den Gitterpunkten  $X_i$  und  $X_{i+1}$ , sodass die Ladung jeweils zur Hälfte auf die beiden Gitterpunkte abgebildet wird. Die Ladung am Ort  $r_\mu$  wird dagegen aufgrund der näheren Lage zu dem Gitterpunkt  $X_{i+2}$  stärker auf diesen abgebildet als auf  $X_{i+3}$ .

Analog ergibt sich eine Summe für das magnetische Feld. Die realistische Simulation eines Plasmas erfordert Teilchenzahlen in der Größenordnung von  $10^{10}$ . Der numerische Aufwand zur Bestimmung der Summe (3.2) für jedes Teilchen (auch Particle-Particle Verfahren genannt) ist daher enorm groß und wächst zudem quadratisch mit der Teilchenanzahl. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, wird das sogenannte Particle-Mesh Verfahren verwendet. Hierbei werden mehrere Ladungsträger zu sogenannten Superteilchen zusammengefasst, wodurch sich die Anzahl der Simulationsteilchen in Abhängigkeit des Rauschverhaltens auf  $10^3$  bis  $10^6$  reduzieren lässt. Zudem wird das elektrische Feld auf einem diskreten Gitter berechnet und von diesem Gitter dann auf die Orte der Superteilchen interpoliert. Ein Simulationsschritt einer stoßfreien, elektrostatischen Simulation nach dem Particle-Mesh Verfahren gliedert sich demnach in fünf Schritte:

1. Abbildung der Superteilchenladung auf ein diskretes Gitter.
2. Lösung der Poissongleichung.
3. Berechnung des elektrischen Feldes und Interpolation an einen Superteilchenort.
4. Integration der Bewegungsgleichungen.
5. Berücksichtigung von Randbedingungen.

Im Folgenden werden die einzelnen Simulationsschritte ausführlich beschrieben.

## 3.2. Abbildung der Superteilchen auf ein diskretes Gitter

Für die Lösung der Poissongleichung auf einem diskreten Gitter muss die Ladungsdichte auf diesem Gitter bestimmt werden. Hierzu müssen die Ladungen der Superteilchen auf das Gitter abgebildet werden. Die einfachste Abbildung wird „Nearest Grid Point“ (NGP) genannt und weist die Teilchenladung dem nächstgelegenen Gitterpunkt zu. Diese Methode hat jedoch den Nachteil, dass sie besonders rauscherzeugend ist. Deshalb wird zumeist das „Particle In Cell“ (PIC) Verfahren verwendet, welches u.a. in Birdsall et al. [110] beschrieben wird. Bei diesem Verfahren hängt die Zuweisung der Teilchenladung auf das Gitter von den Anteilen der Superteilchen in jeder Gitterzelle ab. Die Superteilchen erhalten also eine räumliche Ausdehnung. In einer eindimensionalen Simulation mit einem eindimensionalen numerischen Gitter wird die Ladung durch lineare Interpolation auf zwei benachbarte Gitterpunkte verteilt. Abbildung 3.1 zeigt schematisch die Zuweisung auf ein solches Gitter. Die Ladung  $q$  am Ort  $r$  mit  $X_i \leq r \leq X_{i+1}$  wird durch folgende Vorschrift auf die zwei nächstgelegenen Gitterpunkte  $X_i$  und  $X_{i+1}$  abgebildet:

$$Q_i = q \frac{\Delta x - (r - X_i)}{\Delta x} = q \frac{|r - X_{i+1}|}{\Delta x} \quad , \quad Q_{i+1} = q \frac{|r - X_i|}{\Delta x} \quad (3.3)$$

wobei  $Q_i$  und  $Q_{i+1}$  die zugewiesene Ladung auf den Gitterpunkten ist und  $\Delta x$  der Abstand der Gitterpunkte. In einem zwei- und dreidimensionalen Gitter geschieht die Zuweisung einer Ladung auf vier bzw. acht benachbarte Gitterpunkte. Die zu (3.3) analogen Formeln für eine zugewiesene Ladung in einem zwei- und dreidimensionalen Gitter sind im Anhang D zu finden. Für die an einen Gitterpunkt  $\vec{X}$  zugewiesene Ladungsdichte lautet die Abbildungsvorschrift allgemein:

$$\rho = \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{\mu} q_{\mu} S(\vec{r}_{\mu} - \vec{X}) \quad , \quad (3.4)$$

wobei  $S$  die Abbildungsfunktion ist, die für das PIC Verfahren ein Dreieck (siehe Abbildung 3.1) und für das NGP Verfahren ein Rechteck ist.  $n$  ist die Dimension des betrachteten Gitters. Die Summe in (3.4) muss dabei nur über die Superteilchen ausgeführt werden, welche einen Abstand kleiner als  $\Delta x$  zum betrachteten Gitterpunkt besitzen. Die Bestimmung des elektrischen Feldes am Ort eines Teilchens geschieht später analog zu (3.4) durch lineare Interpolation. Wie im nächsten Abschnitt beschrieben, wird die Ladungsdichte am ersten und letzten Gitterpunkt nicht benötigt, da hier das Potenzial als Randbedingung vorgegeben wird.

## 3.3. Lösung der Poissongleichung

Die Poissongleichung stellt den Zusammenhang zwischen der Ladungsdichte  $\rho$  und dem elektrischen Potenzial  $\phi$  her:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad . \quad (3.5)$$

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

Diese Gleichung soll auf einem diskreten Gitter gelöst werden, wobei alle Gitterpunkte den Abstand  $\Delta x$  haben. Im Folgenden wird die Lösung der ein-, zwei- und dreidimensionalen Poissongleichung unter Berücksichtigung von inneren Randbedingungen, welche die Staubteilchen darstellen, vorgestellt.

#### 3.3.1. Eindimensionale Poissongleichung

Die eindimensionale Poissongleichung lautet:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad . \quad (3.6)$$

Der erste Diskretisierungsschritt des Laplaceoperators liefert:

$$\frac{1}{r_i^2 \Delta x} \left( r_{i+\frac{1}{2}}^2 \frac{\partial \phi_{i+\frac{1}{2}}}{\partial r} - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \frac{\partial \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\partial r} \right) = -\frac{\rho_i}{\varepsilon_0} \quad . \quad (3.7)$$

Mit der Diskretisierung der Ableitung von  $\phi$  an den Stellen  $i + \frac{1}{2}$  und  $i - \frac{1}{2}$ ,

$$\frac{\partial \phi_{i+\frac{1}{2}}}{\partial r} = \frac{1}{\Delta x} (\phi_{i+1} - \phi_i) \quad , \quad \frac{\partial \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\partial r} = \frac{1}{\Delta x} (\phi_i - \phi_{i-1}) \quad (3.8)$$

lautet die vollständig diskretisierte Poissongleichung:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left( \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2}{r_i^2} \phi_{i+1} - \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2 + r_{i-\frac{1}{2}}^2}{r_i^2} \phi_i + \frac{r_{i-\frac{1}{2}}^2}{r_i^2} \phi_{i-1} \right) = \frac{1}{\Delta x^2} (c_i \phi_{i+1} + b_i \phi_i + a_i \phi_{i-1}) = -\frac{\rho_i}{\varepsilon_0} \quad . \quad (3.9)$$

Die Koeffizienten  $a_i$ ,  $b_i$  und  $c_i$  sind demnach gegeben durch:

$$a_i = \frac{r_{i-\frac{1}{2}}^2}{r_i^2} \quad , \quad b_i = -\frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2 + r_{i-\frac{1}{2}}^2}{r_i^2} \quad , \quad c_i = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2}{r_i^2} \quad . \quad (3.10)$$

Der Ausdruck (3.9) stellt ein lineares Gleichungssystem mit  $n_p$  Gleichungen dar, wobei  $n_p$  die Anzahl der Gitterpunkte ist. Zur Lösung des Gleichungssystems müssen noch die rechte und linke Randbedingung dieses eindimensionalen Systems spezifiziert werden. Der linke Rand soll die Oberfläche eines Staubteilchens darstellen und wird in jedem Zeitschritt gleich dem Oberflächenpotenzial gesetzt, also  $\phi_0 = V_R(t)$ . Damit lautet die Gleichung (3.9) für  $i = 1$ :

$$c_1 \phi_2 + b_1 \phi_1 + a_1 V_R(t) = -\frac{\Delta x^2 \rho_1}{\varepsilon_0} \quad . \quad (3.11)$$

Am rechten Rand soll das Potenzial verschwinden,  $\phi_{n_p-1} = 0$ , womit die Gleichung (3.9) für  $i = n_p - 2$  lautet:

$$b_{n_p-2} \phi_{n_p-2} + a_{n_p-2} \phi_{n_p-3} = -\frac{\Delta x^2 \rho_{n_p-2}}{\varepsilon_0} \quad . \quad (3.12)$$

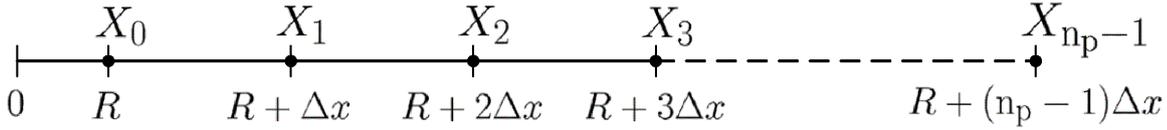


Abbildung 3.2.: Das eindimensionale Simulationsgebiet mit  $n_p$  Gitterpunkten. Der erste Gitterpunkt  $X_0$  stimmt dabei nicht mit dem Koordinatenursprung überein, sondern mit der Oberfläche des Staubteilchens mit dem Radius  $R$ . Der Gitterpunktabstand ist  $\Delta x$ .

Zu beachten ist, dass der erste Gitterpunkt nicht mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt, sondern mit der Oberfläche des Staubteilchens mit dem Radius  $R$ . Abbildung 3.2 verdeutlicht das eindimensionale Simulationsgebiet. Da das Potenzial am ersten und letzten Gitterpunkt ( $\phi_0$  und  $\phi_{n_p-1}$ ) gesetzt wird, müssen die Ladungsdichten  $\rho_0$  und  $\rho_{n_p-1}$  nicht bestimmt werden. Die Ladungsdichte auf einem Gitterpunkt  $i$  wird zudem auf die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $(R + i) \Delta x$  normiert, um eine sphärische Symmetrie zu erhalten:

$$\hat{\rho}_i = \frac{\rho_i}{4\pi (R + i) \Delta x} \quad . \quad (3.13)$$

Das zu lösende lineare Gleichungssystem lässt sich nun in Matrixform schreiben als:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \cdot & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & a_{n_p-2} & b_{n_p-2} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_{n_p-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta x^2}{\epsilon_0} \hat{\rho}_1 - a_1 V_R(t) \\ -\frac{\Delta x^2}{\epsilon_0} \hat{\rho}_2 \\ -\frac{\Delta x^2}{\epsilon_0} \hat{\rho}_3 \\ \vdots \\ -\frac{\Delta x^2}{\epsilon_0} \hat{\rho}_{n_p-2} \end{pmatrix} \quad . \quad (3.14)$$

Dieses tridiagonale Gleichungssystem kann durch das *Gaußsche Eliminationsverfahren* gelöst werden, wobei das System bereits nach  $n_p$ -Schritten gelöst werden kann. Ein numerischer Tridiagonalmatrix-Algorithmus ist u.a. in Press et al. [111] beschrieben.

### 3.3.2. Zweidimensionale Poissongleichung

Die zweidimensionale Poissongleichung in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad . \quad (3.15)$$

Abbildung 3.3 zeigt das Potenzial  $\phi_{i,j}$  auf dem Gitterpunkt  $X_{i,j}$  mit seinen vier benachbarten Gitterpunkten  $\phi_{i+1,j}$ ,  $\phi_{i-1,j}$ ,  $\phi_{i,j+1}$  und  $\phi_{i,j-1}$  und den entsprechenden Gitterpunktabständen  $\Delta x_+$ ,  $\Delta x_-$ ,  $\Delta y_+$  und  $\Delta y_-$ . Durch eine Taylor-Entwicklung der vier

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

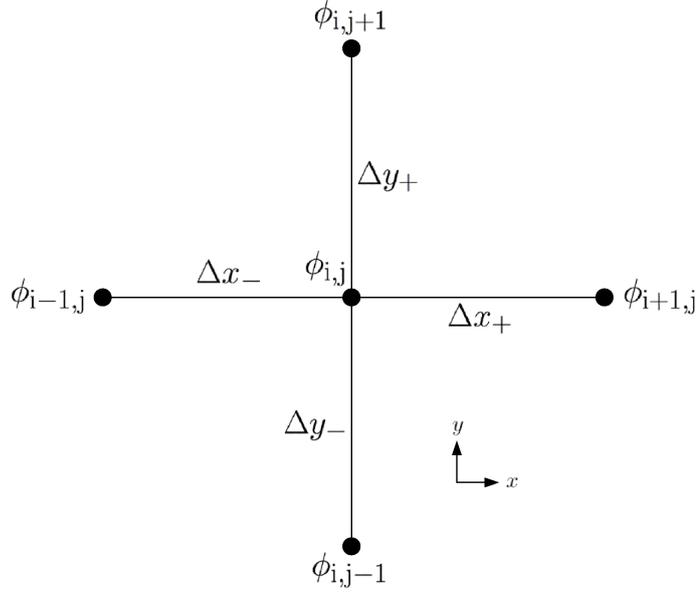


Abbildung 3.3.: Das Potenzial  $\phi_{i,j}$  auf dem Gitterpunkt  $X_{i,j}$  in einem zweidimensionalen numerischen Gitter mit seinen vier benachbarten Gitterpunkten  $\phi_{i+1,j}$ ,  $\phi_{i-1,j}$ ,  $\phi_{i,j+1}$  und  $\phi_{i,j-1}$ . Die entsprechenden Gitterpunktabstände seien durch  $\Delta x_+$ ,  $\Delta x_-$ ,  $\Delta y_+$  und  $\Delta y_-$  gegeben.

äußeren Punkte erhält man:

$$\begin{aligned}
 \phi_{i+1,j} &= \phi_{i,j} + \Delta x_+ \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\Delta x_+^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(3) \\
 \phi_{i-1,j} &= \phi_{i,j} - \Delta x_- \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\Delta x_-^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(3) \\
 \phi_{i,j+1} &= \phi_{i,j} + \Delta y_+ \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\Delta y_+^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \mathcal{O}(3) \\
 \phi_{i,j-1} &= \phi_{i,j} - \Delta y_- \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\Delta y_-^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \mathcal{O}(3) \quad .
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Im Folgenden sei die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung betrachtet. Durch die Bildung der folgenden Ausdrücke verschwindet jeweils die erste Ableitung:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_- \phi_{i+1,j} + \Delta x_+ \phi_{i-1,j} &= (\Delta x_+ + \Delta x_-) \phi_{i,j} + \frac{\Delta x_+ \Delta x_-}{2} (\Delta x_+ + \Delta x_-) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
 \Delta y_- \phi_{i,j+1} + \Delta y_+ \phi_{i,j-1} &= (\Delta y_+ + \Delta y_-) \phi_{i,j} + \frac{\Delta y_+ \Delta y_-}{2} (\Delta y_+ + \Delta y_-) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Die Auflösung nach der jeweils zweiten Ableitung in (3.17) gibt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{2\phi_{i+1,j}}{\Delta x_+ (\Delta x_+ + \Delta x_-)} + \frac{2\phi_{i-1,j}}{\Delta x_- (\Delta x_+ + \Delta x_-)} - \frac{2\phi_{i,j}}{\Delta x_+ \Delta x_-} \\
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{2\phi_{i,j+1}}{\Delta y_+ (\Delta y_+ + \Delta y_-)} + \frac{2\phi_{i,j-1}}{\Delta y_- (\Delta y_+ + \Delta y_-)} - \frac{2\phi_{i,j}}{\Delta y_+ \Delta y_-} \quad .
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Damit lässt sich nun die vollständig diskretisierte Poissongleichung nach (3.15) schreiben als:

$$a_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + a_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + a_{i,j} \phi_{i,j} + a_{i,j+1} \phi_{i,j+1} + a_{i,j-1} \phi_{i,j-1} = -\frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon_0} \quad (3.19)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_{i+1,j} &= \frac{2}{\Delta x_+ (\Delta x_+ + \Delta x_-)} \quad , \quad a_{i-1,j} = \frac{2}{\Delta x_- (\Delta x_+ + \Delta x_-)} \\ a_{i,j+1} &= \frac{2}{\Delta y_+ (\Delta y_+ + \Delta y_-)} \quad , \quad a_{i,j-1} = \frac{2}{\Delta y_- (\Delta y_+ + \Delta y_-)} \\ a_{i,j} &= -\frac{2}{\Delta x_+ \Delta x_-} - \frac{2}{\Delta y_+ \Delta y_-} \quad . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Wählt man alle vier Gitterpunktabstände gleich,  $\Delta x = \Delta x_+ = \Delta x_- = \Delta y_+ = \Delta y_-$ , reduziert sich (3.19) zu:

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}) = -\frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon_0} \quad (3.21)$$

Die Unterscheidung der Gitterpunktabstände in (3.19) wird nötig, wenn in dem zweidimensionalen Gitter innere, sphärische Randbedingungen (welche die Staubteilchen darstellen) berücksichtigt werden sollen. Abbildung 3.4 zeigt ein zweidimensionales Gitter mit dem Gitterpunktabstand  $\Delta x$ . In der Mitte des Gitters ist ein Kreis als zweidimensionales Staubteilchen mit dem Radius  $R = 2\Delta x$  eingefügt. Die Gitterpunkte auf dem Kreis (blaue Punkte) werden bei der Lösung der Poissongleichung gleich dem zeitabhängigen Oberflächenpotenzial  $V_R(t)$  des Staubteilchens gesetzt. In den OPAR-Simulationen wird der Radius eines Staubteilchens immer als ganzzahliges Vielfaches des Gitterpunktabstands gewählt, womit vier Gitterpunkte des Gitters immer direkt mit der Oberfläche des Staubteilchens übereinstimmen. Wie in Abbildung 3.4 zu sehen, werden Gitterpunkte auf der Oberfläche des Staubteilchens gesetzt, welche nicht direkt auf dem vorgegebenen Gitter liegen. Für die Gitterpunkte, welche einen benachbarten Gitterpunkt auf der Oberfläche der inneren, sphärischen Randbedingung haben, muss bei der Lösung der Poissongleichung der jeweilige verkürzte Gitterpunktabstand (kleiner als  $\Delta x$ ) beachtet werden (blaue Linien). Bei einem Radius von  $R = 2\Delta x$  wie in Abbildung 3.4 wird ein Staubteilchen dabei durch 12 Gitterpunkte (blaue Punkte) repräsentiert. Die Gitterpunkte innerhalb des Kreises sind für die Simulation nicht relevant und werden bei der Lösung nicht berücksichtigt. Die verkürzten Gitterpunktabstände zu den Gitterpunkten auf der Oberfläche des Staubteilchens werden über

$$\begin{aligned} \Delta x_\nu &= X_i - \sqrt{R^2 - X_j} \\ \Delta y_\nu &= X_j - \sqrt{R^2 - X_i} \end{aligned} \quad (3.22)$$

bestimmt, wobei  $X_i$  und  $X_j$  jeweils die Koordinaten des Gitterpunktes  $X_{i,j} = (X_i, X_j)$  mit einem benachbarten Gitterpunkt sind, welcher auf der Oberfläche des Staubteilchens liegt, wie in Abbildung 3.5 für  $\Delta x_\nu$  dargestellt. Der Koordinatenursprung sei dabei der Mittelpunkt des Staubteilchens.

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

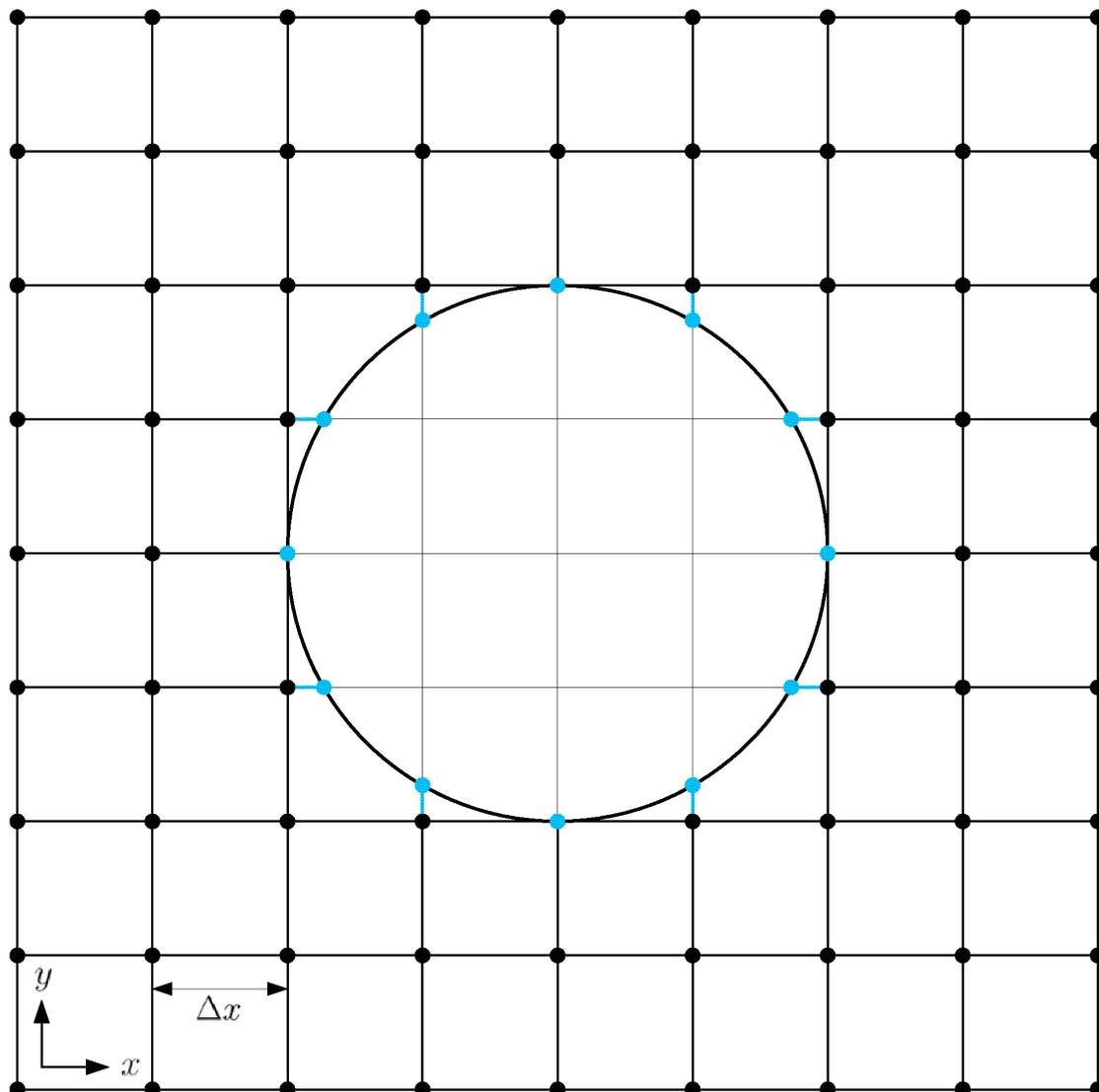


Abbildung 3.4.: Ein zweidimensionales numerisches Gitter mit dem Gitterpunktabstand  $\Delta x$ . In der Mitte ist ein Kreis mit dem Radius  $R = 2\Delta x$  eingefügt, welcher ein zweidimensionales Staubteilchen darstellt. Die 12 Gitterpunkte auf dem Kreis (blaue Punkte) werden bei der Lösung der Poissongleichung gleich dem zeitabhängigen Oberflächenpotenzial  $V_R(t)$  des Staubteilchens gesetzt. Hierbei müssen die verkürzten Gitterpunktabstände (kleiner als  $\Delta x$ ) beachtet werden (blaue Linien). Abbildung 3.5 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt in der Umgebung des Staubteilchens und die Berechnung des verkürzten Gitterpunktabstandes. Die Gitterpunkte innerhalb des Kreises sind für die Simulation nicht relevant und werden bei der Lösung nicht berücksichtigt.

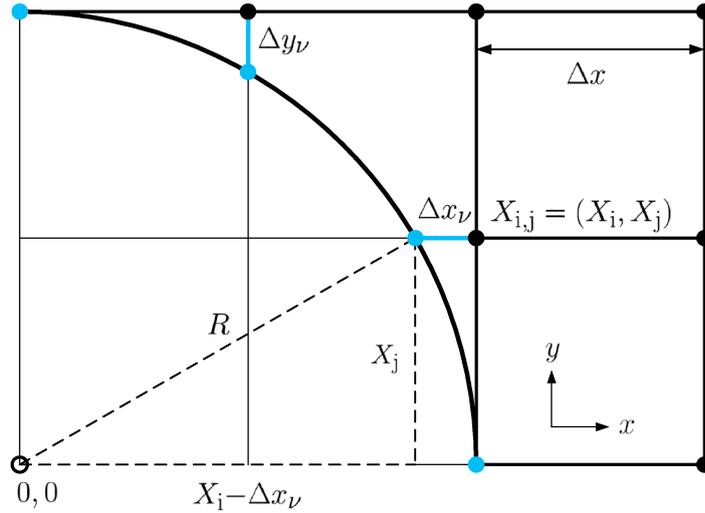


Abbildung 3.5.: Ein verkürzter Gitterpunktabstand  $\Delta x_\nu$  (blaue Linie) vom Gitterpunkt  $X_{i,j} = (X_i, X_j)$  zum Gitterpunkt (blauer Punkt) auf der Oberfläche des Staubteilchens. Der Koordinatenursprung sei der Mittelpunkt des Staubteilchens. Gemäß  $\Delta x_\nu = X_i - \sqrt{R^2 - X_j^2}$ , siehe (3.22), lässt sich der verkürzte Gitterpunktabstand bestimmen.

### Gauß-Seidel-Verfahren

Die Poissongleichung nach (3.19) mit den Koeffizienten (3.20) stellt ein lineares Gleichungssystem mit  $n_p$  Gleichungen dar, wobei  $n_p$  die Anzahl der Gitterpunkte ist. Die Auflösung von (3.19) nach  $\phi_{i,j}$  ergibt:

$$\phi_{i,j} = -\frac{1}{a_{i,j}} \left( \frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon_0} + a_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + a_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + a_{i,j+1} \phi_{i,j+1} + a_{i,j-1} \phi_{i,j-1} \right) \quad (3.23)$$

Das Gleichungssystem wird nun iterativ gelöst, wobei in der  $(m+1)$ -ten Iteration die Ergebnisse aus der  $m$ -ten Iteration verwendet werden:

$$\phi_{i,j}^{m+1} = -\frac{1}{a_{i,j}} \left( \frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon_0} + a_{i+1,j} \phi_{i+1,j}^{m+1} + a_{i-1,j} \phi_{i-1,j}^m + a_{i,j+1} \phi_{i,j+1}^{m+1} + a_{i,j-1} \phi_{i,j-1}^m \right) \quad (3.24)$$

Dieses Verfahren wird *Gauß-Seidel-Verfahren* genannt und ist u.a. in Press et al. [111] ausführlich diskutiert. Die Anzahl der nötigen Iterationen hängt von einer beliebig definierbaren Fehlergrenze ab, welche unterschritten werden soll. In OPAR ist die Fehlergrenze auf  $10^{-6}$  gesetzt worden, weshalb für die letzte  $(m+1)$  und vorletzte Iteration ( $m$ ) gelten soll:

$$10^{-6} > |\phi_{i,j}^{m+1} - \phi_{i,j}^m| \quad , \quad \text{für alle } \phi_{i,j} \quad (3.25)$$

Im Gauß-Seidel-Verfahren nach (3.24) werden die Potentiale  $\phi_{i,j}$  auf den entsprechenden Gitterpunkten der Reihe nach berechnet. Bei einer numerischen Implementierung ist es

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

zweckmäßig, die Reihenfolge der Abarbeitung entsprechend zu ändern, um möglichst viele Berechnungen parallel ausführen zu können. Eine Methode das Gauß-Seidel-Verfahren zu parallelisieren besteht in einer Umordnung des Gleichungssystems (3.23). Das numerische Gitter wird hierzu in zwei „Farben“ aufgeteilt, siehe Abbildung 3.6, weshalb diese Methode auch *Schwarz-Rot-* oder *Schachbrett-Nummerierung* genannt wird. Eine Iteration wird also in eine „rote“ und eine „schwarze“ Halbiteration aufgeteilt:

$$\phi_{i,j} \text{ (siehe 3.24)} \quad \begin{cases} \text{Schwarze Gitterpunkte} & \text{für } (i+j) \text{ gerade} \\ \text{Rote Gitterpunkte} & \text{für } (i+j) \text{ ungerade} \end{cases} \quad (3.26)$$

Die Berechnung der „schwarzen“ Gitterpunkte hängt dabei nur von den „roten“ Gitterpunkten ab und umgekehrt. Damit sind die Berechnungen innerhalb einer Halbiteration voneinander unabhängig und können parallel ausgeführt werden. Festgelegt werden müssen noch die Randbedingungen, welche in Abbildung 3.6 als „blaue“ Gitterpunkte dargestellt sind. Während an den äußeren Rändern des Simulationsgebietes das Potenzial verschwinden soll, werden die inneren Randbedingungen in jedem Simulationsschritt gleich dem Oberflächenpotenzial  $V_R(t)$  des Staubteilchens gesetzt. Eine Berechnung der Ladungsdichte auf den Gitterpunkten der äußeren und inneren Randbedingungen ist damit nicht notwendig.

#### Mehrgitterverfahren

Die Anzahl der nötigen Iterationen ist im beschriebenen Gauß-Seidel-Verfahren verhältnismäßig hoch, d.h. die Konvergenzgeschwindigkeit ist relativ langsam. Eine numerisch sehr effiziente Methode, die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen, bietet das sogenannte *Mehrgitterverfahren*. In diesem Verfahren wird die Auflösung des Gitters in einer Hierarchie von Gitterebenen immer weiter vergrößert, d.h. es werden immer weniger Gitterpunkte betrachtet. Auf einem groben Gitter wird dann eine Korrektur des Fehlers auf dem feinen Gitter bestimmt und anschließend aufaddiert. Zunächst werden im feinen Ausgangsgitter drei Iterationsschritte ausgeführt und der Fehler auf jedem Gitterpunkt bestimmt. Durch eine Restriktionsvorschrift werden diese Werte dann auf ein gröberes Gitter übertragen. Die Restriktionsvorschrift bildet also ein feines Gitter auf ein gröberes Gitter ab, die Abbildungsvorschrift ist in Abbildung 3.7 veranschaulicht.

Auf dem gröberen Gitter wird das Iterationsverfahren wiederum dreimal ausgeführt, wobei der Informationsaustausch nun über den doppelten Gitterpunktabstand stattfindet und dadurch effektiver wird. Zudem ist die Anzahl der Gitterpunkte halbiert worden, was den numerischen Aufwand ebenfalls reduziert. Die bestimmten Werte auf dem gröberen Gitter werden nun durch eine Prolongationsvorschrift zurück auf das feine Gitter übertragen, wie in Abbildung 3.7 dargestellt. Es können auch mehrere Vergrößerungsschritte hintereinander ausgeführt werden. Zuletzt werden wieder drei Iterationsschritte auf dem feinen Ausgangsgitter ausgeführt, um den Fehler weiter zu glätten. Durch diese Reduzierung des Problems auf ein immer gröberes Gitter kann eine enorme Konvergenzbeschleunigung erzielt werden. Das Mehrgitterverfahren ist ausführlich in Press et al. [111] diskutiert.

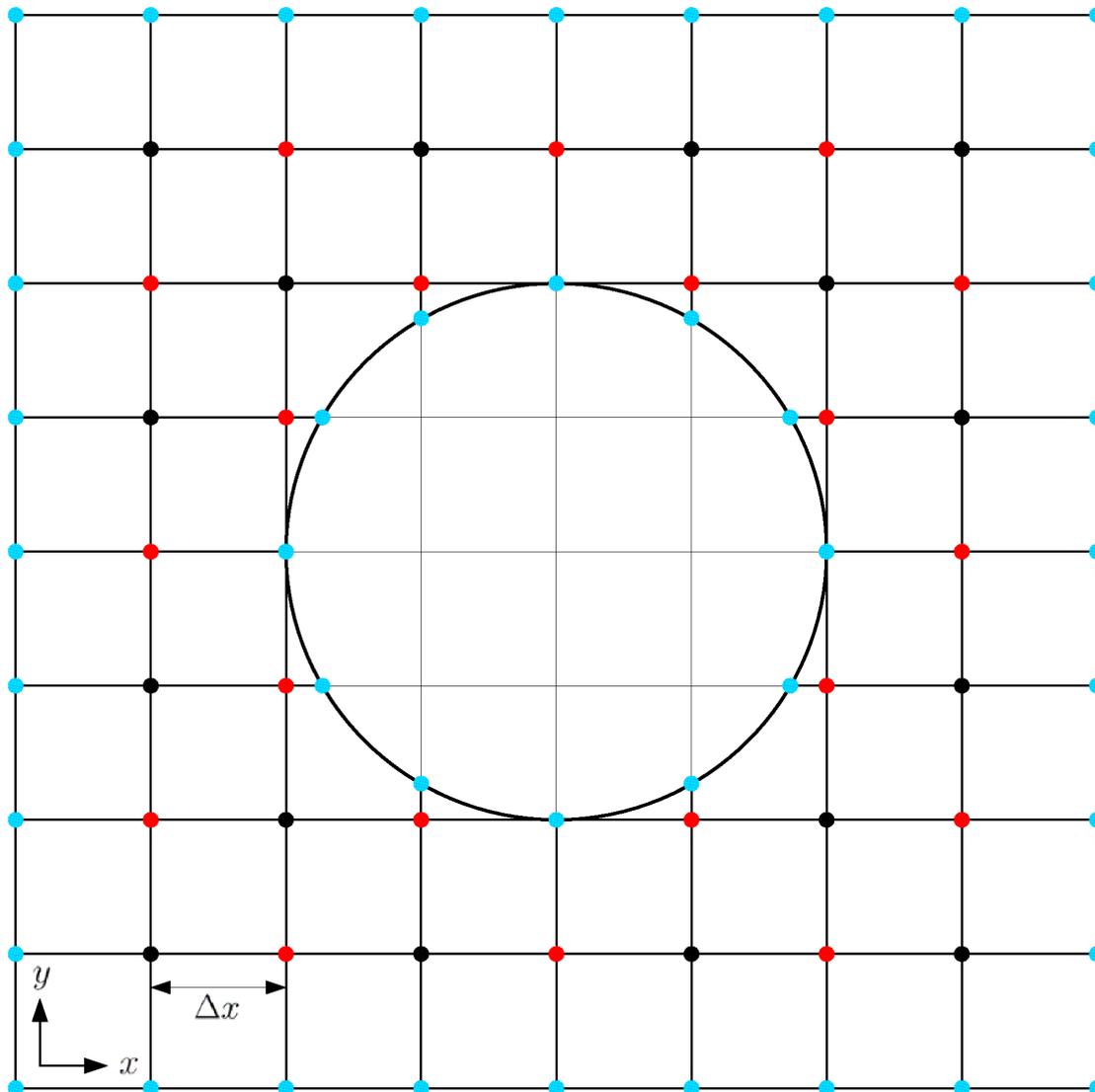


Abbildung 3.6.: Ein zweidimensionales numerisches Gitter, aufgeteilt in zwei „Farben“, auch Schwarz-Rot- oder Schachbrett-Nummerierung genannt. Eine Iteration im Gauß-Seidel-Verfahren (3.24) kann somit in eine „rote“ und in eine „schwarze“ Halbiteration aufgeteilt werden. Da jeder „schwarze“ Gitterpunkt nur „rote“ benachbarte Gitterpunkte hat und umgekehrt, sind die Berechnungen innerhalb einer Halbiteration voneinander unabhängig und können parallel ausgeführt werden. Die „blauen“ Gitterpunkte entsprechen Randbedingungen und müssen daher nicht berechnet werden. Die inneren Randbedingungen stellen ein Staubteilchen mit dem Radius  $R = 2\Delta x$  dar.

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

Schematisch dargestellt sieht die in OPAR implementierte Funktion des Mehrgitterverfahrens wie folgt aus, wobei  $Au = f$  das zu lösende Gleichungssystem nach (3.24) in Matrixform ist:

MG( $u^h, f^h$ ) - Mehrgitterverfahren in OPAR

$A^h u^h = f^h$  - 3 Iterationen

if ( $h < h_1$ ) then

$d^h = f^h - A^h u^h$  - Fehlerbestimmung

$f^{2h} = R_h^{2h} d^h$  - Restriktion

$u^{2h} = \text{MG}(0, f^{2h})$  - Rekursiver Aufruf

$u^h = u^h + P_{2h}^h u^{2h}$  - Prolongation

end

$A^h u^h = f^h$  - 3 Iterationen

Die Matrix  $A$  enthält die in (3.20) angegebenen Koeffizienten.  $h$  steht für den Gitterpunktabstand des betrachteten Gitters. Je größer  $h$  wird, desto größer und weniger Gitterpunkte weist das entsprechende Gitter auf. Mit  $h_1$  kann eine obere Grenze für den Gitterpunktabstand festgelegt werden. In OPAR wird  $h_1$  durch die äußersten Gitterpunkte des größten Gitters bestimmt, welche immer noch mit einem äußeren Gitterpunkt aus dem feinen Ausgangsgitter übereinstimmen sollen, wie in Abbildung 3.8 gezeigt, um die äußeren Randbedingungen berücksichtigen zu können. Bei den inneren Randbedingungen, welche ein Staubteilchen darstellen, werden in den Gittervergrößerungsschritten die verkürzten Gitterpunktabstände nicht berücksichtigt, sondern der Fehler  $d^{dx}$  auf den Gitterpunkten auf der Oberfläche bzw. innerhalb des Staubteilchens auf Null gesetzt, da hier die Lösung bekannt ist. Nur bei den drei Iterationen auf dem feinen Ausgangsgitter jeweils am Anfang und Ende des Mehrgitterverfahrens werden die verkürzten Gitterpunktabstände berücksichtigt. Abbildung 3.8 zeigt ein numerisches Gitter zusammen mit einem größeren Gitter (rote Punkte) und einem Staubteilchen als innere Randbedingung in der Mitte.

#### 3.3.3. Dreidimensionale Poissongleichung

Die Behandlung und Lösung der dreidimensionalen Poissongleichung geschieht analog zur zweidimensionalen Gleichung, welche im letzten Abschnitt diskutiert wurde. Im Folgenden werden daher nur die wesentlichen Gleichungen zur Lösung des dreidimensionalen Systems vorgestellt. Die dreidimensionale Poissongleichung in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad . \quad (3.27)$$

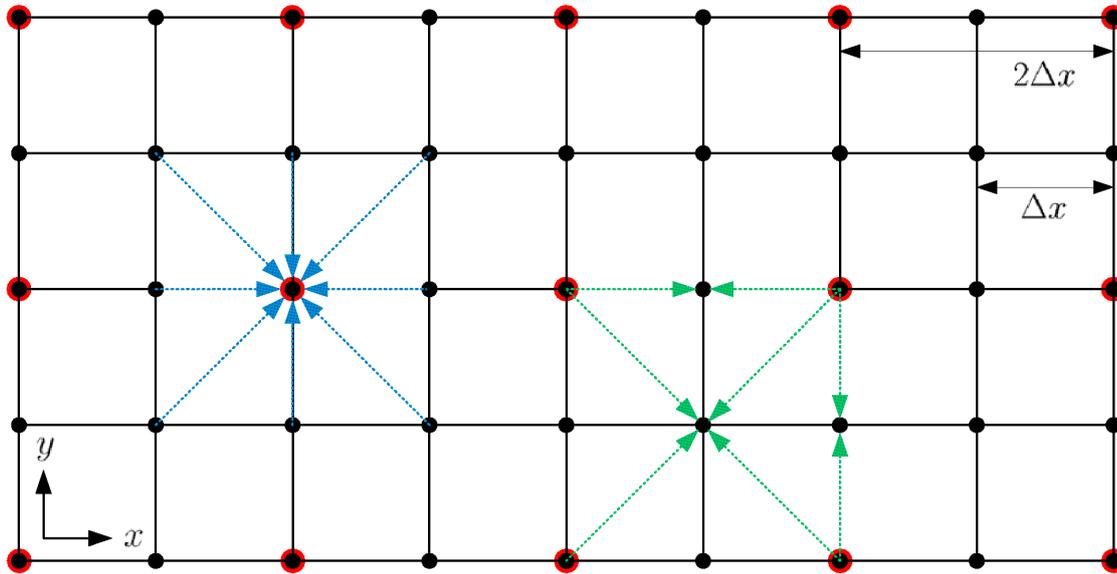


Abbildung 3.7.: Die Abbildungsvorschrift der Restriktion (links) und der Prolongation (rechts) des in OPAR implementierten Mehrgitterverfahrens. Die schwarzen Gitterpunkte zeigen das feine Ausgangsgitter mit dem Gitterpunktabstand  $\Delta x$ , die größeren roten Punkte stellen das gröbere Gitter mit dem Gitterpunktabstand  $2\Delta x$  dar. Die Restriktionsvorschrift  $R_{2\Delta x}^{\Delta x}$  (blau) bildet das feine Gitter auf ein gröberes Gitter ab. Dabei wird der Wert des Gitterpunktes auf dem feinen Gitter, welcher mit einem Gitterpunkt des gröberen Gitters übereinstimmt, zu 75% auf diesen übertragen, die Summe der Werte der umgebenen acht Gitterpunkte zu 25%. Die Prolongationsvorschrift  $P_{2\Delta x}^{\Delta x}$  (grün) bildet die Werte des gröberen Gitters zurück auf das feine Gitter ab. Dabei wird der Wert eines Gitterpunktes des groben Gitters, welcher mit einem Gitterpunkt auf dem feinen Gitter übereinstimmt, zu 100% auf diesen übertragen. Liegt ein Gitterpunkt des feinen Gitters genau zwischen zwei Gitterpunkten des groben Gitters, werden die beiden Werte zu je 50% auf den entsprechenden Gitterpunkt des feinen Gitters übertragen. Auf die Gitterpunkte des feinen Gitters, welche zwischen vier Gitterpunkten des groben Gitters liegen, werden die vier Werte zu je 25% übertragen.

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

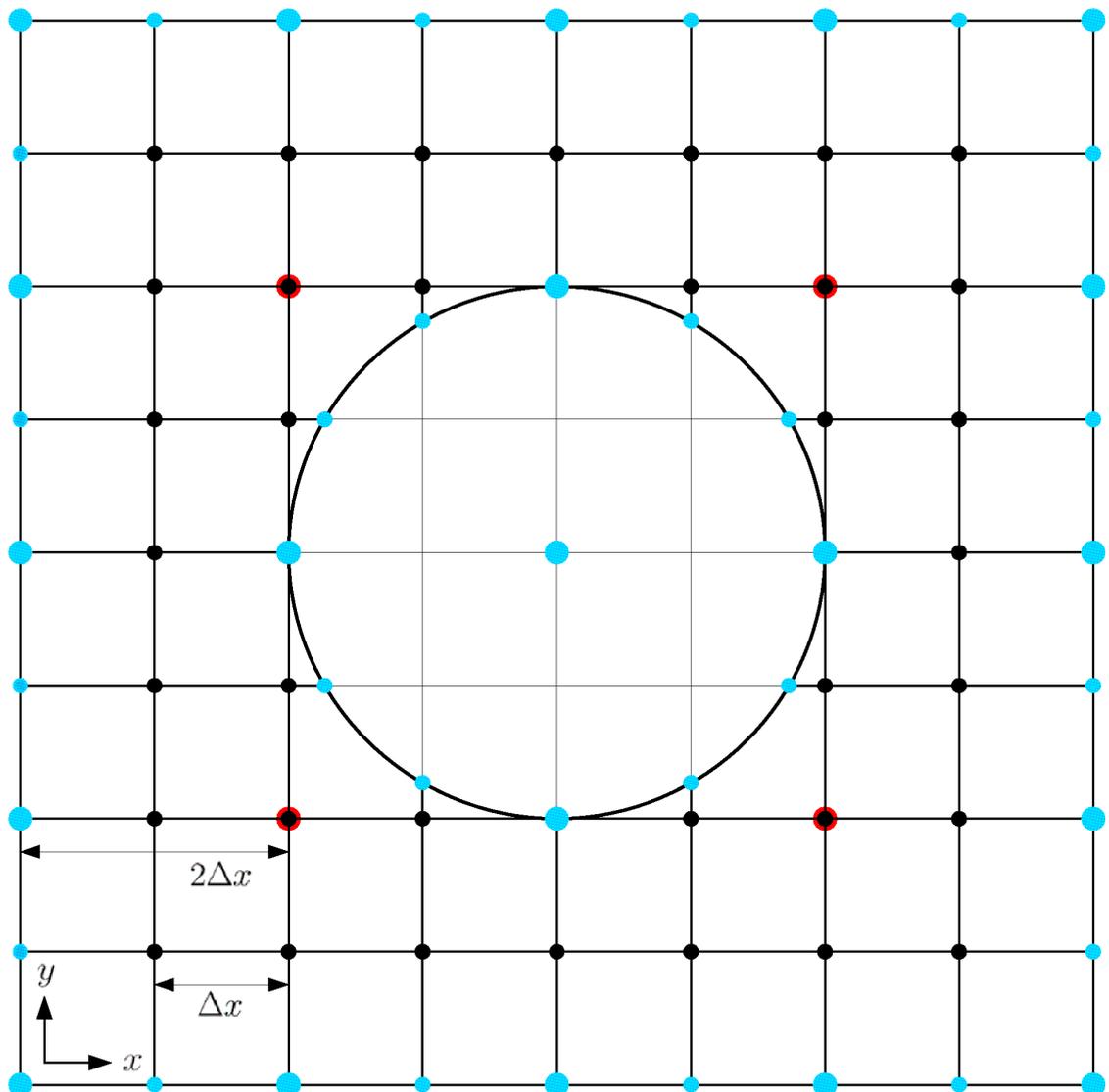


Abbildung 3.8.: Zwei Ebenen eines numerischen Gitters. Die schwarzen Punkte stellen das feine Ausgangsgitter dar, die großen roten Punkte das nächst gröbere Gitter. Jeweils in blau sind die äußeren und inneren Randbedingungen dargestellt. Bei den inneren Randbedingungen, welche ein Staubteilchen darstellen, werden in den Gittervergrößerungsschritten die verkürzten Gitterpunktstände nicht berücksichtigt, sondern der Fehler  $d^{dx}$  auf der Oberfläche bzw. innerhalb des Staubteilchens auf Null gesetzt (große blaue Punkte), da hier die Lösung bekannt ist und keine Korrekturwerte bestimmt werden müssen. Nur bei den drei Iterationen auf dem feinen Ausgangsgitter jeweils am Anfang und Ende des Mehrgitterverfahrens werden die verkürzten Gitterpunktstände berücksichtigt. Auch an den Rändern des Gitters (blaue Punkte) ist die Lösung bekannt, weshalb der Fehler  $d^{dx}$  hier auf Null gesetzt wird.

Abbildung 3.9 zeigt das Potenzial  $\phi_{i,j,k}$  auf dem Gitterpunkt  $X_{i,j,k}$  mit seinen sechs benachbarten Gitterpunkten  $\phi_{i+1,j,k}$ ,  $\phi_{i-1,j,k}$ ,  $\phi_{i,j+1,k}$ ,  $\phi_{i,j-1,k}$ ,  $\phi_{i,j,k+1}$  und  $\phi_{i,j,k-1}$  und den entsprechenden Gitterpunktabständen  $\Delta x_+$ ,  $\Delta x_-$ ,  $\Delta y_+$ ,  $\Delta y_-$ ,  $\Delta z_+$  und  $\Delta z_-$ . Durch eine Kombination der Taylor-Entwicklungen der sechs äußeren Punkte und Auflösung nach der jeweils zweiten Ableitung erhält man analog zu (3.18):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{2\phi_{i+1,j,k}}{\Delta x_+(\Delta x_+ + \Delta x_-)} + \frac{2\phi_{i-1,j,k}}{\Delta x_-(\Delta x_+ + \Delta x_-)} - \frac{2\phi_{i,j,k}}{\Delta x_+ \Delta x_-} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{2\phi_{i,j+1,k}}{\Delta y_+(\Delta y_+ + \Delta y_-)} + \frac{2\phi_{i,j-1,k}}{\Delta y_-(\Delta y_+ + \Delta y_-)} - \frac{2\phi_{i,j,k}}{\Delta y_+ \Delta y_-} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= \frac{2\phi_{i,j,k+1}}{\Delta z_+(\Delta z_+ + \Delta z_-)} + \frac{2\phi_{i,j,k-1}}{\Delta z_-(\Delta z_+ + \Delta z_-)} - \frac{2\phi_{i,j,k}}{\Delta z_+ \Delta z_-} \quad ,\end{aligned}\quad (3.28)$$

Damit lässt sich nun die vollständig diskretisierte Poissongleichung nach (3.27) schreiben als:

$$\begin{aligned}a_{i+1,j,k} \phi_{i+1,j,k} + a_{i-1,j,k} \phi_{i-1,j,k} + a_{i,j,k} \phi_{i,j,k} + a_{i,j+1,k} \phi_{i,j+1,k} + \\ a_{i,j-1,k} \phi_{i,j-1,k} + a_{i,j,k+1} \phi_{i,j,k+1} + a_{i,j,k-1} \phi_{i,j,k-1} = -\frac{\rho_{i,j,k}}{\varepsilon_0}\end{aligned}\quad (3.29)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}a_{i+1,j,k} &= \frac{2}{\Delta x_+(\Delta x_+ + \Delta x_-)} \quad , \quad a_{i-1,j,k} = \frac{2}{\Delta x_-(\Delta x_+ + \Delta x_-)} \\ a_{i,j+1,k} &= \frac{2}{\Delta y_+(\Delta y_+ + \Delta y_-)} \quad , \quad a_{i,j-1,k} = \frac{2}{\Delta y_-(\Delta y_+ + \Delta y_-)} \\ a_{i,j,k+1} &= \frac{2}{\Delta z_+(\Delta z_+ + \Delta z_-)} \quad , \quad a_{i,j,k-1} = \frac{2}{\Delta z_-(\Delta z_+ + \Delta z_-)} \\ a_{i,j,k} &= -\frac{2}{\Delta x_+ \Delta x_-} - \frac{2}{\Delta y_+ \Delta y_-} - \frac{2}{\Delta z_+ \Delta z_-} \quad .\end{aligned}\quad (3.30)$$

Wie für den zweidimensionalen Fall im vorherigen Abschnitt beschrieben, wird die Unterscheidung der Gitterpunktabstände in (3.29) nötig, wenn in dem dreidimensionalen Gitter innere, sphärische Randbedingungen (welche die Staubteilchen darstellen) berücksichtigt werden sollen. Der Radius des Staubteilchens ist dabei immer ein ganzzahliges Vielfaches des Gitterpunktabstands. Die Gitterpunkte innerhalb des Staubteilchens sind für die Simulation nicht relevant und werden bei der Lösung nicht berücksichtigt. Die verkürzten Gitterpunktabstände zu den Gitterpunkten auf der Oberfläche des Staubteilchens werden über

$$\begin{aligned}\Delta x_\nu &= X_i - \sqrt{R^2 - X_j - X_k} \\ \Delta y_\nu &= X_j - \sqrt{R^2 - X_i - X_k} \\ \Delta z_\nu &= X_k - \sqrt{R^2 - X_i - X_j}\end{aligned}\quad (3.31)$$

bestimmt, wobei  $X_i$ ,  $X_j$  und  $X_k$  jeweils die Koordinaten des Gitterpunktes  $X_{i,j,k} = (X_i, X_j, X_k)$  mit einem benachbarten Gitterpunkt sind, welcher auf der Oberfläche des Staubteilchens liegt.

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

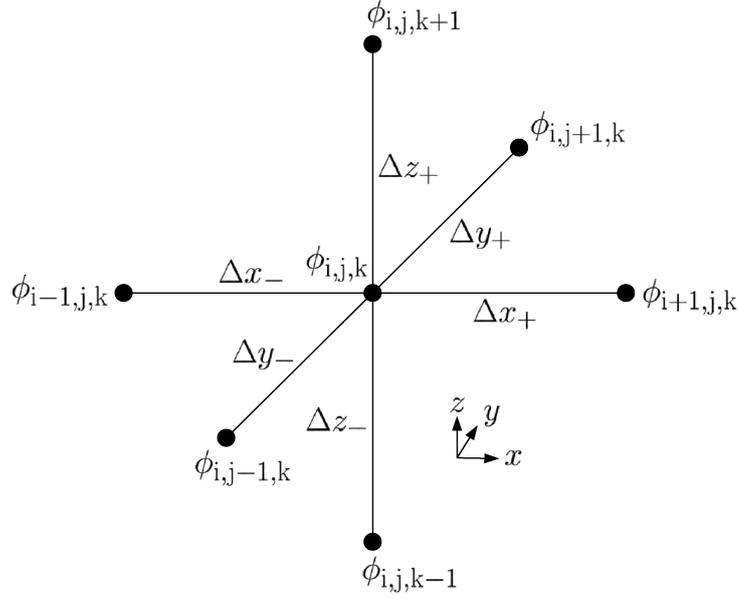


Abbildung 3.9.: Das Potenzial  $\phi_{i,j,k}$  auf dem Gitterpunkt  $X_{i,j,k}$  in einem zweidimensionalen numerischen Gitter mit seinen sechs benachbarten Gitterpunkten  $\phi_{i+1,j,k}$ ,  $\phi_{i-1,j,k}$ ,  $\phi_{i,j+1,k}$ ,  $\phi_{i,j-1,k}$ ,  $\phi_{i,j,k+1}$  und  $\phi_{i,j,k-1}$ . Die entsprechenden Gitterpunktabstände seien durch  $\Delta x_+$ ,  $\Delta x_-$ ,  $\Delta y_+$ ,  $\Delta y_-$ ,  $\Delta z_+$  und  $\Delta z_-$  gegeben.

#### Gauß-Seidel-Verfahren

Wie im zweidimensionalen Fall stellt die Poissongleichung nach (3.29) mit den Koeffizienten (3.30) ein lineares Gleichungssystem mit  $n_p$  Gleichungen dar, wobei  $n_p$  die Anzahl der Gitterpunkte ist. Die Auflösung von (3.29) nach  $\phi_{i,j,k}$  ergibt:

$$\phi_{i,j,k} = -\frac{1}{a_{i,j,k}} \left( \frac{\rho_{i,j,k}}{\varepsilon_0} + a_{i+1,j,k} \phi_{i+1,j,k} + a_{i-1,j,k} \phi_{i-1,j,k} + a_{i,j+1,k} \phi_{i,j+1,k} + a_{i,j-1,k} \phi_{i,j-1,k} + a_{i,j,k+1} \phi_{i,j,k+1} + a_{i,j,k-1} \phi_{i,j,k-1} \right) . \quad (3.32)$$

Das Gleichungssystem wird nun nach dem Gauß-Seidel-Verfahren gelöst, wobei in der  $(m+1)$ -ten Iteration die Ergebnisse aus der  $m$ -ten Iteration verwendet werden:

$$\phi_{i,j,k}^{m+1} = -\frac{1}{a_{i,j,k}} \left( \frac{\rho_{i,j,k}}{\varepsilon_0} + a_{i+1,j,k} \phi_{i+1,j,k}^{m+1} + a_{i-1,j,k} \phi_{i-1,j,k}^m + a_{i,j+1,k} \phi_{i,j+1,k}^{m+1} + a_{i,j-1,k} \phi_{i,j-1,k}^m + a_{i,j,k+1} \phi_{i,j,k+1}^{m+1} + a_{i,j,k-1} \phi_{i,j,k-1}^m \right) . \quad (3.33)$$

Wie in (3.25) angegeben, ist die Fehlergrenze in OPAR auf  $10^{-6}$  gesetzt, weshalb für die letzte  $(m+1)$  und vorletzte Iteration  $(m)$  gelten soll:

$$10^{-6} > |\phi_{i,j,k}^{m+1} - \phi_{i,j,k}^m| \quad , \quad \text{für alle } \phi_{i,j,k} . \quad (3.34)$$

Die Aufteilung in eine „rote“ und eine „schwarze“ Halbiteration sieht im dreidimensionalen Fall wie folgt aus:

$$\phi_{i,j,k} \text{ (siehe 3.33)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Schwarze Gitterpunkte} & \text{für } (i + j + k) \text{ ungerade} \\ \text{Rote Gitterpunkte} & \text{für } (i + j + k) \text{ gerade} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Die Berechnung der „schwarzen“ Gitterpunkte hängt dabei nur von den „roten“ Gitterpunkten ab und umgekehrt. Damit sind die Berechnungen innerhalb einer Halbiteration voneinander unabhängig und können parallel ausgeführt werden.

### Mehrgitterverfahren

Auch im dreidimensionalen Fall kann das Mehrgitterverfahren verwendet werden, um die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen. Die Implementierung des Mehrgitterverfahrens in OPAR wurde im letzten Abschnitt schematisch dargestellt. Die Abbildungsvorschriften der Restriktion und der Prolongation für den dreidimensionalen Fall sind in Abbildung 3.10 veranschaulicht.

## 3.4. Berechnung des E-Feldes und Interpolation an einen Superteilchenort

Das elektrische Feld  $\vec{E}$  ist mit dem elektrischen Potenzial  $\phi$  über

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) \quad (3.36)$$

verknüpft. Für den ein-, zwei-, und dreidimensionalen Fall wird das elektrische Feld auf einem Gitterpunkt durch die zentrierte Differenz

$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} && \text{1D} \\ \vec{E}_{i,j} &= -\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \vec{e}_x - \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \vec{e}_y && \text{2D} \\ \vec{E}_{i,j,k} &= -\frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \vec{e}_x - \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \vec{e}_y - \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \vec{e}_z && \text{3D} \end{aligned} \quad (3.37)$$

bestimmt, wobei  $i$ ,  $j$  und  $k$  die jeweiligen Koordinaten des betrachteten Gitterpunktes darstellen. Im zwei- und dreidimensionalen Fall müssen in (3.37) wieder die verkürzten Gitterpunktstände nach (3.22) bzw. (3.31) beachtet werden, wenn ein Gitterpunkt auf der Oberfläche eines Staubteilchens liegt. Das elektrische Feld auf den Gitterpunkten innerhalb des Staubteilchens muss nicht berechnet werden, da das Potenzial auf der Oberfläche des Staubteilchens überall gleich angesetzt wird und das elektrische Feld innerhalb des Staubteilchens somit stets verschwindet. Berücksichtigt werden müssen noch die Ränder des Simulationsgebietes. In der eindimensionalen Simulation entspricht der linke Rand der Oberfläche des Staubteilchens ( $\phi_0 = V_R(t)$ ), während am rechten

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

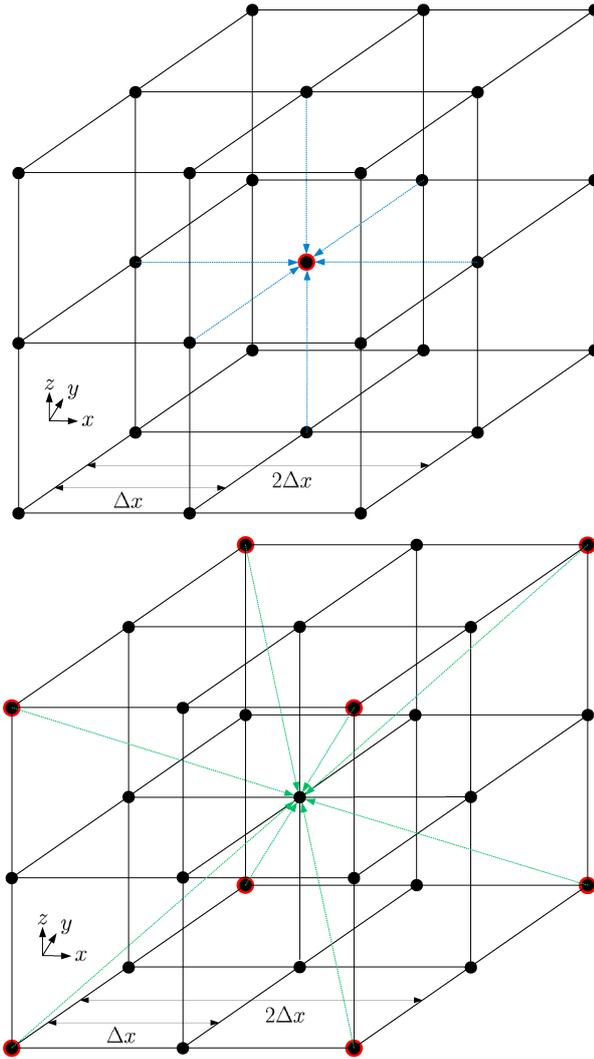


Abbildung 3.10.: Die Abbildungsvorschrift der Restriktion (oben) und der Prolongation (unten) des in OPAR implementierten Mehrgitterverfahrens für den dreidimensionalen Fall. Die schwarzen Gitterpunkte zeigen das feine Ausgangsgitter mit dem Gitterpunktabstand  $\Delta x$ , die größeren roten Punkte stellen das gröbere Gitter mit dem Gitterpunktabstand  $2\Delta x$  dar. Die Restriktionsvorschrift  $R_{dx}^{2dx}$  (blau) bildet das feine Gitter auf ein gröberes Gitter ab. Dabei wird der Wert des Gitterpunktes auf dem feinen Gitter, welcher mit einem Gitterpunkt des gröberen Gitters übereinstimmt, zu 75% auf diesen übertragen, die Summe der Werte der umgebenen sechs Gitterpunkte zu 25%. Die Prolongationsvorschrift  $P_{2dx}^{dx}$  (grün) bildet die Werte des gröberen Gitters zurück auf das feine Gitter ab. Dabei wird der Wert eines Gitterpunktes des groben Gitters, welcher mit einem Gitterpunkt auf dem feinen Gitter übereinstimmt, zu 100% auf diesen übertragen. Liegt wie dargestellt ein Gitterpunkt des feinen Gitters genau zwischen vier Gitterpunkten des groben Gitters, werden die vier Werte zu je 25% auf den entsprechenden Gitterpunkt des feinen Gitters übertragen. Die Gitterpunkte des feinen Gitters, welche in einer Gitterebene mit dem gröberen Gitter liegen, werden nach den Abbildungsvorschriften wie in Abbildung 3.7 für den zweidimensionalen Fall gezeigt übertragen.

Rand das Potenzial verschwinden soll ( $\phi_{n_p-1} = 0$ ). Daher berechnet sich das elektrische Feld im eindimensionalen Fall am linken und rechten Rand wie folgt:

$$E_0 = -\frac{\phi_1 - V_R(t)}{\Delta x} \quad , \quad E_{n_p-1} = \frac{\phi_{n_p-2}}{\Delta x} \quad (3.38)$$

In einem zwei- und dreidimensionalen Gitter soll das Potenzial an den vier bzw. sechs äußeren Rändern des Simulationsgebietes verschwinden, weshalb sich dort das elektrische Feld analog zu  $E_{n_p-1}$  in (3.38) berechnet. Um die Bewegungsgleichungen zu integrieren, muss das auf den Gitterpunkten bestimmte elektrische Feld auf die Orte der Teilchen interpoliert werden. Dies geschieht analog zur Abbildung der Ladung der Superteilchen auf das Gitter nach (3.4), siehe auch Anhang D. Das elektrische Feld am Ort  $\vec{r}$  wird also folgendermaßen bestimmt:

$$\vec{E}(\vec{r}_\nu) = \sum_{n_p} \vec{E}_X S(\vec{r}_\nu - \vec{X}) \quad , \quad (3.39)$$

wobei  $\vec{E}_X$  das elektrische Feld auf dem betrachteten Gitterpunkt  $\vec{X}$  darstellt. Die Summe in (3.39) muss dabei nicht über alle Gitterpunkte  $n_p$  ausgeführt werden, da nur das elektrische Feld auf den Gitterpunkten zwischen dem betrachteten Ort  $\vec{r}$  zum Feld an diesem Ort beiträgt.  $S$  ist wieder die Abbildungsfunktion, welche im PIC Verfahren eine Dreiecksfunktion ist, analog zu (3.3).

### 3.5. Integration der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen (3.1) werden zeitlich ebenfalls diskretisiert. Die zeitliche Schrittweite und der Gitterpunkt Abstand in der Simulation seien  $\Delta t$  und  $\Delta x$ . Die Geschwindigkeit und der Ort eines Superteilchens im Zeitschritt  $t_1$  werden zunächst auf eine dimensionslose Größe normiert:

$$\hat{r}_{t_1} = \vec{r}_{t_1} \frac{1}{\Delta x} \quad , \quad \hat{v}_{t_1} = \vec{v}_{t_1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad . \quad (3.40)$$

Zunächst sei kein Magnetfeld berücksichtigt. Die Geschwindigkeit und der Ort im nächsten Zeitschritt  $t_2 = t_1 + \Delta t$  wird für diesen Fall folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{t_2} &= \hat{v}_{t_1} + \frac{q\Delta t^2}{m\Delta x} \vec{E}(\vec{r}_{t_1}) = \hat{v}_{t_1} + \hat{E}(\hat{r}_{t_1}) \quad , \quad \text{für } B = 0 \\ \hat{r}_{t_2} &= \hat{r}_{t_1} + \hat{v}_{t_2} \quad , \end{aligned} \quad (3.41)$$

wobei  $\vec{E}(\vec{r}_{t_1})$  das interpolierte elektrische Feld am Ort  $\vec{r}_{t_1}$  ist. Das elektrische Feld muss ebenfalls auf eine dimensionslose Größe normiert werden, wobei  $q$  und  $m$  die Ladung bzw. die Masse des Superteilchens ist. Nun sei zusätzlich ein konstantes, orts- und zeitunabhängiges Magnetfeld  $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$  in  $z$ -Richtung betrachtet. Durch ein konstantes Magnetfeld wird ein geladenes Teilchen auf eine Spiralbahn gezwungen, weshalb das

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

Teilchen keine Energieänderung erfährt, sondern nur eine ständige Änderung der Richtung der  $x$ - $y$ -Komponente der Geschwindigkeit. Daher wird in OPAR der Term der magnetischen Lorentzkraft in der Bewegungsgleichung (3.1) numerisch nicht direkt integriert, sondern der Ort im nächsten Zeitschritt rein geometrisch bestimmt. Abbildung 3.11 verdeutlicht das Prinzip in einer Aufsicht der  $x$ - $y$ -Ebene. Ein Superteilchen befindet sich im Zeitschritt  $t_1$  am Ort

$$\hat{\vec{r}}_{t_1} = \begin{pmatrix} x_{t_1} \\ y_{t_1} \\ z_{t_1} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Der Ort und die Geschwindigkeit, welche das Teilchen im nächsten Zeitschritt  $t_2 = t_1 + \Delta t$  ohne den Einfluss eines Magnetfeldes erreichen würde, ist durch (3.41) gegeben und sei im Folgenden durch die gestrichenen Größen

$$\hat{\vec{r}}'_{t_2} = \begin{pmatrix} x'_{t_2} \\ y'_{t_2} \\ z'_{t_2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\vec{v}}'_{t_2} = \begin{pmatrix} v'_{x,t_2} \\ v'_{y,t_2} \\ v'_{z,t_2} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

ausgedrückt, siehe Abbildung 3.11. Unter dem Einfluss eines Magnetfeldes  $B_z$  bewegt sich das Teilchen jedoch entlang einer Kreisbahn mit dem Radius  $\hat{r}_g$  und nimmt daher im nächsten Zeitschritt den Ort und die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \hat{\vec{r}}_{t_2} &= \begin{pmatrix} x_{t_2} \\ y_{t_2} \\ z_{t_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_{t_1} - x_m) \cos(\alpha_g) - (y_{t_1} - y_m) \sin(\alpha_g) + x_m \\ (x_{t_1} - x_m) \sin(\alpha_g) + (y_{t_1} - y_m) \cos(\alpha_g) + y_m \\ z'_{t_1} \end{pmatrix}, \quad \text{für } B \neq 0 \\ \hat{\vec{v}}_{t_2} &= \begin{pmatrix} v_{x,t_2} \\ v_{y,t_2} \\ v_{z,t_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_\perp \sin(\alpha_g + \beta_g) \\ \hat{v}_\perp \cos(\alpha_g + \beta_g) \\ v'_{z,t_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

ein. Der Winkel  $\alpha_g$  zwischen den Punkten  $\hat{\vec{r}}_{t_1}$  und  $\hat{\vec{r}}_{t_2}$  bestimmt sich über

$$\alpha_g = \frac{\hat{v}_\perp}{\hat{r}_g} = \frac{qB_z \Delta t}{m}, \quad (3.45)$$

wobei  $\hat{r}_g$  der normierte Gyrationradius im Zeitschritt nach (2.49) und  $\hat{v}_\perp$  die Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld  $B_z$  ist,

$$\hat{r}_g = \frac{mv_\perp}{qB_z} \frac{1}{\Delta x} = \frac{m\hat{v}_\perp}{qB_z} \frac{1}{\Delta t}, \quad \hat{v}_\perp = \sqrt{v'^2_{x,t_2} + v'^2_{y,t_2}}. \quad (3.46)$$

Der Winkel  $\beta_g$  (siehe Abbildung 3.11) ist durch

$$\beta_g = \arcsin\left(\frac{y_{t_1} - y_m}{\hat{r}_g}\right) \quad (3.47)$$

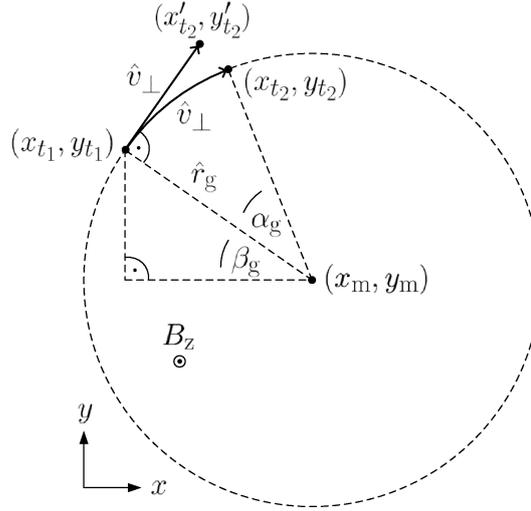


Abbildung 3.11.: Ein Superteilchen befinde sich im Zeitschritt  $t_1$  am Ort  $(x_{t_1}, y_{t_1})$ . Ohne den Einfluss eines Magnetfeldes würde das Teilchen im folgenden Zeitschritt  $t_2$  den Ort  $(x'_{t_2}, y'_{t_2})$  einnehmen. Unter dem Einfluss eines Magnetfeldes  $B_z$  bewegt sich das Teilchen jedoch entlang einer Kreisbahn mit dem Radius  $\hat{r}_g$  und nimmt daher im nächsten Zeitschritt den Ort  $(x_{t_2}, y_{t_2})$  ein.

gegeben. Der Punkt  $(x_m, y_m)$  beschreibt den Mittelpunkt der Spiralbewegung bzw. das magnetische Führungszentrum und lässt sich über eine Geradengleichung zu

$$y_m = \frac{x_{t_1} - x_m}{m_s} + y_{t_1} \quad , \quad m_s = \frac{y'_{t_2} - y_{t_1}}{x'_{t_2} - x_{t_1}} \quad (3.48)$$

bestimmen, wobei die Gerade durch die Punkte  $(x_m, y_m)$  und  $(x_{t_1}, y_{t_1})$  verläuft.  $m_s$  ist dabei die Steigung der Geraden durch die Punkte  $(x_{t_1}, y_{t_1})$  und  $(x'_{t_2}, y'_{t_2})$ , welche eine Tangente an den Gyrationkreis darstellt und damit senkrecht zur Geraden in (3.48) steht, siehe Abbildung 3.11. Setzt man  $y_m$  aus (3.48) in die Kreisgleichung

$$\hat{r}_g^2 = (x_{t_1} - x_m)^2 + (y_{t_1} - y_m)^2 \quad (3.49)$$

ein, erhält man eine quadratische Gleichung für  $x_m$ :

$$x_m^2 \left(1 + \frac{1}{m_s^2}\right) - x_m \left(2x_{t_1} \left(1 + \frac{1}{m_s^2}\right)\right) + x_{t_1}^2 + \left(\frac{x_{t_1}}{m_s}\right)^2 - \hat{r}_g^2 = 0 \quad . \quad (3.50)$$

Die Lösung für  $x_m$  lässt sich mittels der quadratischen Ergänzung gewinnen:

$$x_m = x_{t_1} \pm \sqrt{x_{t_1}^2 - \frac{x_{t_1}^2 + \left(\frac{x_{t_1}}{m_s}\right)^2 - \hat{r}_g^2}{1 + \frac{1}{m_s^2}}} \quad . \quad (3.51)$$

Die  $z$ -Komponenten  $z_{t_2}$  und  $v_{z,t_2}$  in (3.44) werden vom Magnetfeld  $B_z$  nicht beeinflusst und berechnen sich daher analog zu (3.41). Im zweidimensionalen Fall fällt die

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

$z$ -Komponente in (3.44) entsprechend weg. Das oben vorgestellte geometrische Verfahren zur Bestimmung der Gyrationbewegung in einem Magnetfeld ist unabhängig von der Gitterauflösung und der Zeitschrittweite, womit der Gyrationradius in OPAR stets exakt aufgelöst wird.

Im eindimensionalen Fall wird in OPAR neben dem radialen Ort  $r$  und der radialen Geschwindigkeit  $v_r$  noch eine tangentiale Geschwindigkeitskomponente  $v_\phi$  berücksichtigt, um die Zentrifugalkraft auf ein Superteilchen bestimmen zu können. Die zwei Geschwindigkeitskomponenten und der radiale Ort im nächsten Zeitschritt  $t_2 = t_1 + \Delta t$  wird in einer eindimensionalen Simulation durch

$$\begin{aligned}\hat{v}_{r,t_2} &= \hat{v}_{r,t_1} + \frac{(\hat{v}_{\phi,t_1})^2}{\hat{r}_{t_1}} + \hat{E}(\hat{r}_{t_1}) \\ \hat{r}_{t_2} &= \hat{r}_{t_1} + \hat{v}_{r,t_2} \\ \hat{v}_{\phi,t_2} &= \frac{\hat{r}_{t_1}}{\hat{r}_{t_2}} \hat{v}_{\phi,t_1}\end{aligned}\tag{3.52}$$

berechnet, wobei der Term  $\frac{(\hat{v}_{\phi,t_1})^2}{\hat{r}_{t_1}}$  die Zentrifugalkraft auf das Superteilchen berücksichtigt. Ein Magnetfeld sei im eindimensionalen Fall nicht betrachtet. Bei der Wahl des Gitterpunktabstands  $\Delta x$  und des Zeitschritts  $\Delta t$  muss noch die sogenannte *Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung* (auch *CFL-Zahl* genannt), beachtet werden. Diese Bedingung stellt eine stabile Lösung einer zeitabhängigen Differentialgleichung sicher, indem die Fortbewegung einer Größe auf eine Gitterzelle pro Zeitschritt begrenzt wird. In OPAR muss daher der Zeitschritt  $\Delta t$  immer so gewählt werden, dass die auf eine dimensionslose Einheit normierte Geschwindigkeit stets kleiner als eins ist, sich also ein Superteilchen nicht weiter als eine Gitterzelle pro Zeitschritt fortbewegt.

## 3.6. Berücksichtigung von Randbedingungen

Die Simulation berandeter Plasmen bedingt die Berücksichtigung von Teilchenverlusten und Teilchenerzeugung an den Simulationsrändern. Verlässt ein Superteilchen nach einem Zeitschritt das Simulationsgebiet, wird es aus der Simulation entfernt. Berührt oder überschreitet ein Superteilchen die Oberfläche eines Staubteilchens, wird es ebenfalls aus der Simulation entfernt und eine Elementarladung zur Ladung des Staubteilchens hinzu addiert. Die vielfache Elementarladung eines Superteilchen wird dabei nicht berücksichtigt, da sonst ein zu großes Rauschen in der zeitlich variablen Ladung des Staubteilchens auftreten würde. Die Oberfläche des Staubteilchens stellt damit eine vollständig absorbierende Kapazität dar, auf welcher sich die Ladung homogen verteilt. In einer eindimensionalen Simulation entspricht der erste Gitterpunkt der Oberfläche des Staubteilchens. In einer zwei- und dreidimensionalen Simulation liegt die Oberfläche innerhalb des Simulationsgebietes, wie z.B. in Abbildung 3.4 für den zweidimensionalen Fall gezeigt. Aus der Ladung des Staubteilchens folgt dann über einen linearen Zusammenhang das zeitabhängige schwebende Oberflächenpotenzial  $V_R(t)$ , welches in jedem Zeitschritt

als innere Randbedingung gesetzt wird:

$$V_R(t) = \frac{Q_R(t)}{C} \quad , \quad (3.53)$$

wobei  $Q_R(t)$  die Ladung des Staubteilchens ist. Die Kapazität  $C$  hängt von den Materialeigenschaften und insbesondere vom Potenzialprofil des Staubteilchens ab und ist im Falle eines Debye-Hückel-Potenzials nach (2.38) durch

$$C = 4\pi\epsilon_0 R(1 + R/\lambda_1) \approx 4\pi\epsilon_0 R \quad \text{für} \quad R/\lambda_1 \ll 1 \quad (3.54)$$

gegeben, wobei  $R$  der Radius des Staubteilchens und  $\lambda_1$  die linearisierte Debyelänge nach (2.44) ist. Die Näherung gilt für den Fall eines sehr kleinen Staubteilchens im Vergleich zu den Debyelängen im betrachteten Plasma, wodurch sich  $C$  auf den Kapazitätswert in einem Vakuum reduziert. Da in der OML-Theorie das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht nicht vom Radius abhängt, gilt in diesem Fall eine direkte Proportionalität zwischen der Ladung im Gleichgewicht und dem Radius des Staubteilchens. Da mit OPAR insbesondere das Oberflächenpotenzial eines Staubteilchens im Gleichgewicht studiert werden soll, ist die Wahl des Kapazitätswertes in (3.53) nicht von Bedeutung, da sich ein Gleichgewichtspotenzial unabhängig von der gewählten Größe der absorbierten Ladungen einstellen wird, solange die Ladung der Superteilchen im Betrag gleich groß ist. Lediglich die Zeitskala, auf denen sich das Gleichgewichtspotenzial einstellt, wird durch die Wahl des Kapazitätswertes beeinflusst. In OPAR wird daher in allen Simulationen der Kapazitätswert im Vakuum verwendet.

An den äußeren Simulationsrändern müssen die Verluste an Superteilchen ausgeglichen werden, um eine realistische Plasmasimulation zu gestalten. In OPAR sollen die Staubteilchen im Simulationsgebiet in ein „unendlich“ ausgedehntes, ungestörtes Plasma eingebettet sein. Die Plasmateilchen sollen dabei eine Maxwellverteilung der Geschwindigkeit besitzen. Die mittlere Geschwindigkeit der Plasmateilchen lässt sich aus der Maxwellverteilung bestimmen und lautet für den zwei- und dreidimensionalen Fall [100, 112]:

$$v_{\text{av}}^{2\text{D}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad , \quad v_{\text{av}}^{3\text{D}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad , \quad (3.55)$$

wobei  $T$  und  $m$  die Temperatur und die Masse des betrachteten Plasmateilchens sind sowie  $k$  die Boltzmannkonstante. Durch Multiplikation der mittleren Geschwindigkeit mit der Teilchendichte des Plasmas erhält man eine Stromdichte, mit welcher bestimmt werden kann, wie viele Teilchen im zeitlichen Mittel das Simulationsgebiet verlassen. Die mittlere Anzahl von Superteilchen, die in einer das Simulationsgebiet begrenzenden Gitterzelle das Simulationsgebiet pro Zeitschritt verlassen, berechnet sich mit Hilfe der Stromdichte zu

$$\Gamma^{1\text{D}} = \frac{1}{2} N_{\text{SPC}} v_{\text{av}}^{2\text{D}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad , \quad \Gamma^{2\text{D}} = \frac{1}{4} N_{\text{SPC}} v_{\text{av}}^{2\text{D}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad , \quad \Gamma^{3\text{D}} = \frac{1}{6} N_{\text{SPC}} v_{\text{av}}^{3\text{D}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad . \quad (3.56)$$

Dabei ist  $\Delta x$  die Größe der Gitterzelle (Gitterpunktabstand) und  $\Delta t$  die zeitliche Schrittweite der Simulation.  $N_{\text{SPC}}$  ist die Superteilchendichte pro Gitterzelle. Die Faktoren  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

### 3. Simulation von komplexen (staubigen) Plasmen mit OPAR

und  $\frac{1}{6}$  berücksichtigen, dass in einer eindimensionalen Simulation eine Gitterzelle durch zwei Gitterpunkte begrenzt wird, in einer zwei- und dreidimensionalen Simulation durch vier Seiten bzw. sechs Flächen. In einer eindimensionalen Simulation werden zwei Geschwindigkeitskomponenten berücksichtigt, weshalb in  $\Gamma^{1D}$  die mittlere Geschwindigkeit  $v_{av}^{2D}$  verwendet wird.  $\Gamma$  in (3.56) bestimmt damit auch, wie viele Superteilchen nach jedem Simulationsschritt in eine das Simulationsgebiet begrenzende Gitterzelle eingefügt werden müssen. Die eingefügten Superteilchen erhalten dabei wieder eine Maxwellverteilung, welche über die wahrscheinlichste Geschwindigkeit erzeugt werden kann. Für den zwei- und dreidimensionalen Fall berechnet sich die wahrscheinlichste Geschwindigkeit in einer Maxwellverteilung über [100, 112]:

$$v_{mp}^{2D} = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad , \quad v_{mp}^{3D} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad . \quad (3.57)$$

Die Position des einzufügenden Superteilchens in der Gitterzelle wird aus dessen zugewiesener Geschwindigkeit für den ein-, zwei- und dreidimensionalen Fall über

$$\begin{aligned} \hat{r} = R_a \hat{v}_r \quad (1D) \quad & \hat{r}_x = R_a \hat{v}_x \quad (2D) \quad & \hat{r}_x = R_a \hat{v}_x \quad (3D) \\ & \hat{r}_y = R_a \hat{v}_y \quad & \hat{r}_y = R_a \hat{v}_y \\ & & \hat{r}_z = R_a \hat{v}_z \end{aligned} \quad (3.58)$$

bestimmt, wobei  $R_a$  jeweils eine Zufallszahl mit  $0 \leq R_a \leq 1$  darstellt. In einer eindimensionalen Simulation werden die Superteilchen nur in der letzten Gitterzelle eingefügt. In einer zwei- und dreidimensionalen Simulation werden die Superteilchen jeweils in die das Simulationsgebiet begrenzenden Gitterzellen eingefügt. Dieses Verfahren der Teilchenerzeugung an den Simulationsrändern gemäß einer Geschwindigkeitsverteilung ist in Bridesall et al. [110] beschrieben und simuliert jenseits des Simulationsgebietes eine ungestörte und „unendliche“ Plasmaquelle. Ungestört bedeutet, dass das Plasmapotenzial im zeitlichen Mittel überall verschwindet und die Plasmateilchen nur die thermische Bewegung gemäß ihrer Geschwindigkeitsverteilung ausführen. Aus diesem Grund wird auch an den Simulationsrändern das Potenzial gleich Null gesetzt. Betrachtet man im Simulationsgebiet kein geladenes Staubteilchen, tritt also im Simulationsgebiet ebenfalls keine Störung des Plasmapotenzials auf, wird die anfängliche Anzahl der Superteilchen und deren Geschwindigkeitsverteilung im zeitlichen Mittel während der gesamten Simulation konstant bleiben. Eine OPAR-Simulation ohne Staubteilchen wird im nächsten Kapitel als Einführung vorgestellt. Setzt man dagegen ein sich aufladendes Staubteilchen in das Simulationsgebiet, darf die auftretende Störung des Plasmapotenzials nicht bis zu den Simulationsrändern reichen, damit die gewählte äußere Randbedingung eines verschwindenden Potenzials gerechtfertigt bleibt. Das bedeutet, dass ein Staubteilchen weit genug entfernt von den Simulationsrändern positioniert werden muss.

## 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

Im folgenden Kapitel werden OPAR-Simulationen eines Plasmas mit einem Staubteilchen vorgestellt und diskutiert. Das simulierte, vollionisierte Plasma besteht dabei immer aus zwei Komponenten, den negativ geladenen Elektronen und den positiv geladenen Ionen, wobei die Ladungen jeweils den gleichen Betrag haben. Elektronen wie Ionen erhalten dabei zu Beginn eine Maxwellverteilung der Geschwindigkeit. An den Simulationsrändern werden in jedem Zeitschritt Plasmateilchen eingefügt, um ein „unendlich“ ausgedehntes Plasma zu simulieren. Coulomb-Stöße zwischen den Plasmateilchen werden nicht berücksichtigt. Ebenfalls wird kein Magnetoplasma simuliert, die Überlagerung eines externen Magnetfeldes wird im nächsten Kapitel behandelt. Das Verhältnis von Ionen- zu Elektronenmasse wird in den folgenden Simulationen stets auf  $m_i/m_e = 100$  gesetzt, um den numerischen Aufwand zu reduzieren. Hierdurch kann insbesondere die Zeitskala, auf denen ein Staubteilchen ein Gleichgewichtspotenzial entwickelt, erheblich verkürzt werden. Die Plasmafrequenz der Ionen ist zwar nur noch zehnmal größer als die der Elektronen, jedoch lassen sich die beiden Frequenzen immer noch eindeutig trennen. Durch das relativ kleine Massenverhältnis wird daher die Simulation der physikalischen Effekte in einem staubigen Plasma nicht unrealistisch, lediglich die Zeitskalen werden verändert. Zudem ist die Überprüfung von analytischen Theorien weiterhin möglich. Zunächst wird eine Simulation ohne Staubteilchen im Simulationsgebiet diskutiert, um einen Vergleich mit anderen Simulationsergebnissen zu ermöglichen. Hiernach werden Simulationen eines ein-, drei- und zweidimensionalen Plasmas mit einem Staubteilchen vorgestellt und mit den Ergebnissen der OML- und OM-Theorie verglichen.

### 4.1. Simulation ohne Staubteilchen

Um einen Vergleich mit anderen Simulationsergebnissen zu erhalten und die Funktionalität von OPAR zu demonstrieren, sei eine dreidimensionale Simulation ohne Staubteilchen, d.h. ohne Berücksichtigung einer inneren Randbedingung, vorgestellt. Durch das Verfahren der Teilchenerzeugung an den äußeren Simulationsrändern, welche die Verluste an Plasmateilchen ausgleichen, wird in einer solchen Simulation im zeitlichen Mittel die Anzahl der Superteilchen im Simulationsgebiet konstant sowie die Verteilung der Geschwindigkeit unbeeinflusst bleiben. In der dreidimensionalen Simulation wurde ein numerisches Gitter mit  $N_x = N_y = N_z = 51$  Gitterpunkten angesetzt, womit das würfelförmige Simulationsgebiet durch  $50 \cdot 50 \cdot 50 = 125.000$  Gitterzellen repräsentiert wird. In jede Richtung ist eine ungerade Anzahl an Gitterpunkten gewählt worden,

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

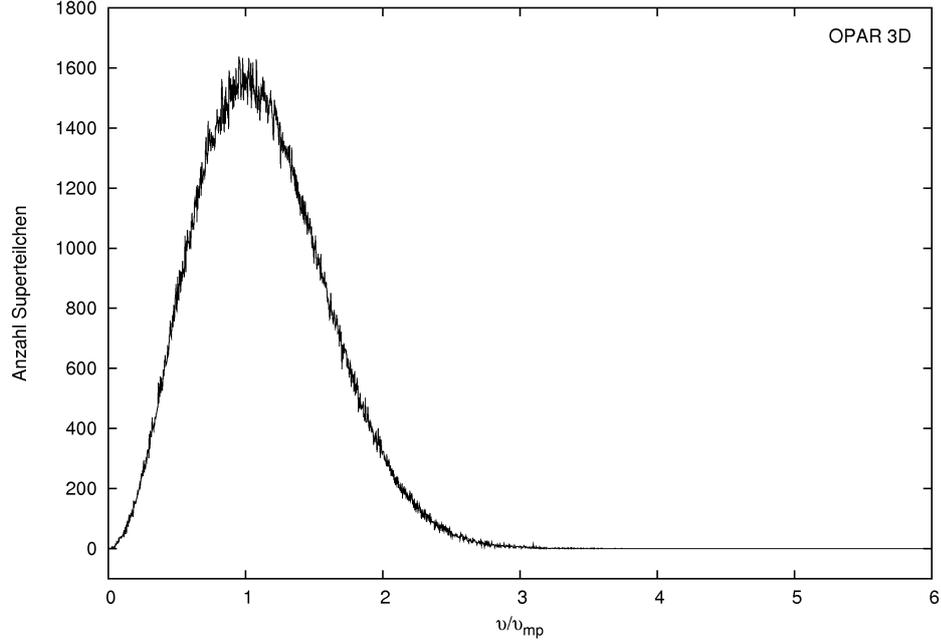


Abbildung 4.1.: Die Geschwindigkeitsverteilung von  $N_{\text{SP}} = 625.000$  Superpartikeln am Anfang der Simulation ohne Staubteilchen, welche einer Maxwellverteilung nach (2.14) entspricht. Die Geschwindigkeit  $v$  ist dabei auf die wahrscheinlichste Geschwindigkeit gemäß (3.47) normiert. Die Geschwindigkeitsverteilung wird in OPAR dabei bis zum Sechsfachen von  $v_{\text{mp}}$  realisiert. Für die Superionen ergibt sich eine identische Verteilung. Die an den Simulationsrändern eingefügten Superpartikeln erhielten ebenfalls eine Maxwellverteilung, weshalb die gezeigte Verteilung während der gesamten Simulationsdauer jeweils erhalten blieb.

damit das Mehrgitterverfahren angewendet werden konnte. Durch den Gitterpunktstand von  $\Delta x = 10 \mu\text{m}$  ergibt sich eine physikalische Größe des Simulationsgebietes von  $1,25 \cdot 10^{-4} \text{mm}^3$ . Die Temperatur wurde mit  $kT_e = kT_i = 1 \text{eV}$  ebenso gleich angesetzt wie die Plasmadichten mit  $n_0 = n_e = n_i = 6 \cdot 10^{15} / \text{m}^3$ , was in etwa typischen Laborbedingungen entspricht. Die Elektronen und Ionen sind durch Superpartikeln repräsentiert, wobei zu Beginn jeweils  $N_{\text{SPC}} = 5$  Superpartikeln räumlich zufällig verteilt in jede Gitterzelle gesetzt worden sind. Damit befanden sich zu Beginn jeweils  $N_{\text{SP}} = 625.000$  Superpartikeln in der Simulation. Der Betrag der Ladung  $Q_{\text{SP}}$ , die jedes Superpartikel trägt, berechnet sich aus der Plasmadichte:

$$Q_{\text{SP}} = \frac{en_0}{N_{\text{SP}}} (N_x - 1) (N_y - 1) (N_z - 1) \Delta x^3 = 1,2 \quad . \quad (4.1)$$

Jedes Superpartikel trägt damit das 1,2-fache der Elementarladung  $e$ , wobei die Superpartikeln negativ und die Superionen positiv geladen sind. Die DebyeLängen des Plasmas betragen  $\lambda_e = \lambda_i = 95,98 \mu\text{m}$  (siehe (C.5)) sowie  $\lambda_l = 67,87 \mu\text{m}$  als linearisierte DebyeLänge (siehe (2.44)) und werden damit durch den Gitterpunktstand mit

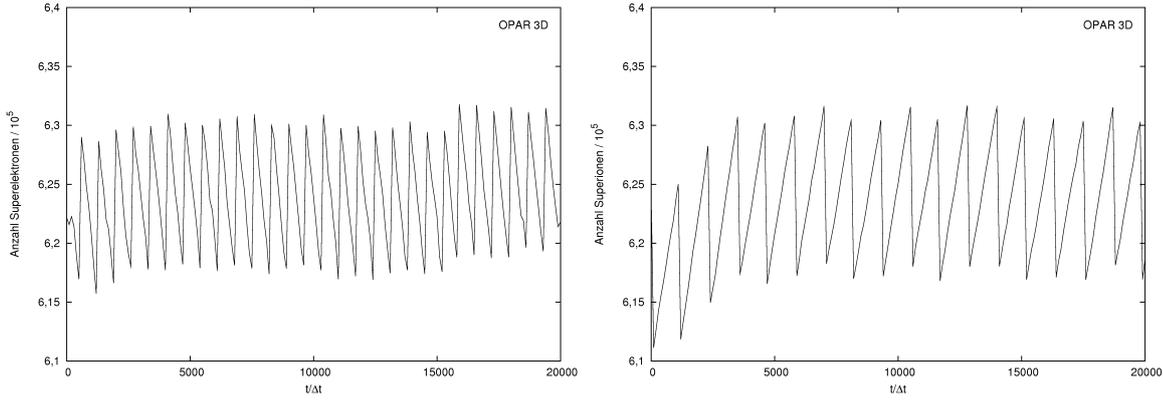


Abbildung 4.2.: Die Anzahl der Superelektronen (links) und Superionen (rechts) im zeitlichen Verlauf der Simulation ohne Staubteilchen mit 20.000 Zeitschritten, wobei die Anzahl alle 100 Zeitschritte ausgegeben wurde. Die Anzahl schwingt stets um deutlich weniger als 2% um die anfängliche Anzahl von  $N_{SP} = 625.000$ , womit im zeitlichen Mittel die Plasmadichte konstant bleibt. Nach jedem fünften bzw. fünfzigsten Zeitschritt ist ein Superelektron bzw. Superion in jede berandende Gitterzelle eingefügt worden, wodurch der periodische Verlauf bestimmt wird. Nach ca. 330 bzw. 3300 Zeitschritten haben die meisten anfänglich eingefügten Superelektronen bzw. Superionen das Simulationsgebiet verlassen. Die Simulation besteht dann nur noch aus Superteilchen, welche aus den Simulationsrändern stammen. Erst hierdurch ergibt sich eine räumliche Verteilung der Superteilchen, welche um die vorgegebene Plasmadichte konstant schwingt.

$\Delta x = 10 \mu\text{m}$  gut aufgelöst. Die Plasmafrequenz der Elektronen berechnet sich über

$$\omega_e = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (4.2)$$

und beträgt  $\omega_e = 4,37 \cdot 10^9/\text{s}$ . Der Zeitschritt in der Simulation wurde in Einheiten der Plasmafrequenz zu  $\Delta t = 0,01/\omega_e$  gewählt, womit die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung hinreichend erfüllt wird. Die Superteilchen sind zu Beginn jeweils gemäß einer Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell auf die Gitterzellen verteilt worden. Abbildung 4.1 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung der Superelektronen am Anfang der Simulation, welche einer Maxwellverteilung nach (2.14) entspricht. Für die Superionen ergibt sich eine identische Verteilung. Die an den Simulationsrändern eingefügten Superteilchen erhielten ebenfalls eine Maxwellverteilung, weshalb die gezeigte Verteilung während der gesamten Simulationsdauer erhalten blieb.

Abbildung 4.2 zeigt die Anzahl der Superteilchen (Elektronen und Ionen) im zeitlichen Verlauf der Simulation, welche insgesamt 20.000 Zeitschritte umfasst, was 200 Plasmaschwingungen  $\omega_e$  entspricht. Dabei wurde die Anzahl der Superteilchen alle 100 Zeitschritte, also einmal pro Plasmaschwingung, ausgegeben. Die Anzahl der Superteilchen schwingt stets um deutlich weniger als 2% um die anfängliche Anzahl von  $N_{SP} = 625.000$ , womit im zeitlichen Mittel betrachtet die Anzahl der Superteilchen und damit die Plasmadichte in sehr guter Näherung konstant bleibt. Die Anzahl der pro Zeitschritt und

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

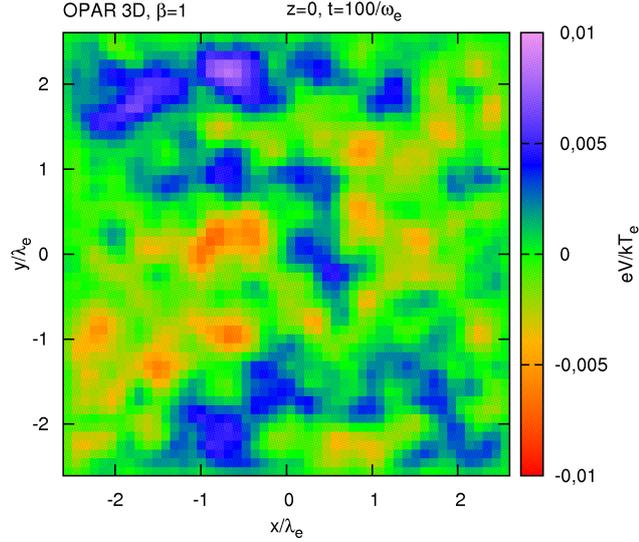


Abbildung 4.3.: Das Potenzial  $eV/kT_e$  der Simulation ohne Staubteilchen für den Zeitschritt  $t = 10.000 \Delta t = 100/\omega_e$ . Der Abstand vom Mittelpunkt ist jeweils auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert. Es ist die  $x$ - $y$ -Ebene mit  $z = 0$  gezeigt, womit sich ein mittiger Querschnitt durch das würfelförmige Simulationsgebiet ergibt. Gebiete von leicht erhöhter Ionen- bzw. Elektronendichte sind in Rot bzw. in Blau dargestellt. Über alle Zeitschritte gemittelt verschwindet das Potenzial und die Ladungsdichte auf allen Gitterpunkten.

berandeter Gitterzelle eingefügten Superteilchen beträgt nach (3.46)  $\Gamma_e^{3D} = 0,19$  für die Superelektronen und  $\Gamma_i^{3D} = 0,019$  für die Superionen. Damit wird also nach jedem fünften Zeitschritt ein Superelektron und nach jedem fünfzigsten Zeitschritt ein Superion in jede berandende Gitterzelle eingefügt. Hierdurch wird der periodische Verlauf in Abbildung 4.2 bestimmt. Insbesondere beim Verlauf der Superionenanzahl in Abbildung 4.2 ist zu Beginn der Simulation eine deutliche Abnahme der Superionenanzahl zu erkennen, welche sich erst nach ca. 3000 Zeitschritten wieder stabilisiert. Dieses leichte Ungleichgewicht ist ein Effekt der anfänglich räumlich zufällig verteilten 5 Superteilchen pro Gitterzelle. Die Strecke, welche ein unbeeinflusstes Elektron bzw. Ion mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit  $v_{mp}$  pro Zeitschritt zurücklegt, lässt sich über (3.47) bestimmen zu

$$v_{mp}^e = \sqrt{\frac{2kT_0}{m_e}} = 0,153 \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad v_{mp}^i = \sqrt{\frac{2kT_0}{100 m_e}} = 0,0153 \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad . \quad (4.3)$$

Ein Elektron bzw. Ion mit der Geschwindigkeit  $v_{mp}$  benötigt demnach ca. 330 bzw. 3300 Zeitschritte, um das Simulationsgebiet mit in jeder Richtung 50 Gitterzellen zu durchqueren. Das bedeutet, nach ca. 330 bzw. 3300 Zeitschritten haben die meisten anfänglich eingefügten Superelektronen und Superionen das Simulationsgebiet verlassen. Die Simulation besteht dann nur noch aus Superteilchen, welche aus den Simulationsrändern stammen. Erst hierdurch ergibt sich eine räumliche Verteilung der Superteilchen

im Simulationsgebiet, welche um die vorgegebene Plasmadichte konstant schwinkt. Im zeitlichen Mittel verschwindet damit auch die Ladungsdichte sowie das Potenzial auf den 125.000 Gitterpunkten. In Abbildung 4.3 ist das Potenzial in der  $x$ - $y$ -Ebene mit  $z = 0$  für den Zeitschritt  $t = 10.000 \Delta t = 100/\omega_e$  gezeigt, womit sich ein mittiger Querschnitt durch das würfelförmige Simulationsgebiet ergibt. Gebiete von leicht erhöhter Ionen- bzw. Elektronendichte sind in Rot bzw. in Blau dargestellt. Über alle Simulationszeitschritte gemittelt verschwindet das Potenzial und damit die Ladungsdichte auf allen Gitterpunkten. Durch diese Simulation ohne Staubteilchen wurde demonstriert, dass OPAR ein „unendlich“ ausgedehntes, ungestörtes Plasma simulieren kann. Im Folgenden werden 1D-, 3D- sowie 2D-OPAR-Simulationen mit Staubteilchen vorgestellt.

## 4.2. Eindimensionale Simulationen mit Staubteilchen

In diesem Abschnitt werden eindimensionale OPAR-Simulationen mit einem Staubteilchen diskutiert, wobei der erste Gitterpunkt der Oberfläche eines Staubteilchens mit dem Radius  $R$  entspricht, wie es in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Insgesamt werden 15 Simulationen vorgestellt, wobei jeweils fünf verschiedene Staubteilchenradien bei drei verschiedenen Temperaturverhältnissen  $\beta$  simuliert wurden. In allen Simulationen sind die Plasmadichten mit  $n_0 = n_e = n_i = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^3$  ebenso gleich angesetzt wie die Elektronentemperatur mit  $kT_e = 1 \text{ eV}$ . Die Ionentemperatur wurde zu  $kT_i = 1 \text{ eV}$ ;  $0,1 \text{ eV}$  und  $0,01 \text{ eV}$  gewählt, die zugehörigen Debyelängen sind in Tabelle 4.1 (rechts) angegeben. Die fünf Radien der Staubteilchen betragen  $R = 10 \mu\text{m}$ ;  $20 \mu\text{m}$ ;  $50 \mu\text{m}$ ;  $100 \mu\text{m}$  und  $200 \mu\text{m}$ , womit die Radien sowohl kleiner als auch größer als die Debyelängen des Plasmas ausfallen. Der Gitterpunktabstand  $\Delta x$  ist in Abhängigkeit des Staubteilchenradius stets so gewählt, dass das Verhältnis  $R/\Delta x = 10$  beträgt, womit der Radius in allen Simulationen gut aufgelöst wird. Die Anzahl der Gitterpunkte sowie die physikalische Größe des Simulationsgebietes sind in Tabelle 4.1 angegeben. Mit steigendem Radius und Gitterpunktabstand ist ein jeweils kleineres Gitter angesetzt worden, um den numerischen Aufwand zu reduzieren. Die Elektronen und Ionen werden durch Superteilchen repräsentiert, wobei zu Beginn jeweils  $N_{\text{SP}} = 500.000$  Superteilchen gemäß einer Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell in das Simulationsgebiet gesetzt wurden. Bei der Verteilung der Superteilchen auf die Gitterzellen wurde dabei die sphärische Symmetrie des Simulationsgebietes berücksichtigt. In den jeweils  $N_x - 1$  Kugelschalen der Dicke  $\Delta x$  um das sphärische Staubteilchen herum sind die Superteilchen derart räumlich zufällig verteilt worden, dass die Volumendichte (Superteilchen pro  $\Delta x^3$ ) in jeder Kugelschale gleich groß ist. Der Betrag der Ladung  $Q_{\text{SP}}$ , die jedes Superteilchen in der Simulation trägt, ergibt sich aus der Plasmadichte:

$$Q_{\text{SP}} = \frac{en_0}{N_{\text{SP}}} (N_x - 1) \Delta x^3 \quad . \quad (4.4)$$

Die Ladungen  $Q_{\text{SP}}$  sind für die entsprechenden Simulationen in Tabelle 4.1 angegeben. Die Zeitschrittweite in den Simulationen ist ebenfalls in Tabelle 4.1 angegeben und erfüllt jeweils hinreichend die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung.

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

$R/\mu\text{m}$	$\Delta x/\mu\text{m}$	$N_x$	$Vl/\text{mm}^3$	$\Delta t/\omega_e$	$Q_{\text{SP}}/e$	$kT_i/\text{eV}$	$\lambda_i/\mu\text{m}$	$\lambda_l/\mu\text{m}$
10	1	401	0,29	0,001	3,464	1,0	95,98	67,87
20	2	401	2,31	0,002	27,714	0,5	67,87	55,41
50	5	201	4,85	0,005	58,182	0,1	30,35	28,94
100	10	101	5,58	0,01	66,853	0,01	9,60	9,55
200	20	101	44,60	0,02	534,825			

Tabelle 4.1.: Links: Parameter zu fünf verschiedenen 1D-OPAR-Simulationen. Angegeben ist der Staubteilchenradius  $R$ , der Gitterpunktastand  $\Delta x$ , die Gitterpunktanzahl  $N_x$ , das Volumen des physikalischen Simulationsgebietes  $Vl$  (inkl. Staubteilchen), die Zeitschrittweite  $\Delta t$  sowie der Betrag der Superteilchenladung  $Q_{\text{SP}}$ . In allen Simulationen gilt das Verhältnis  $R/\Delta x = 10$ ,  $m_i/m_e = 100$  sowie  $N_{\text{SP}} = 500.000$ ,  $n_0 = n_e = n_i = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^3$  und  $kT_e = 1 \text{ eV}$ . Die Debyelänge der Elektronen beträgt damit  $\lambda_e = 95,98 \mu\text{m}$ , die Plasmafrequenz  $\omega_e = 4,37 \cdot 10^9 / \text{s}$ . Rechts: Die Debyelängen der Ionen  $\lambda_i$  nach (C.5) und die linearisierten Debyelängen  $\lambda_l$  nach (C.6) für die angegebenen Plasmaparameter sowie für verschiedene Iontemperaturen.

##### 4.2.1. Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht

Abbildung 4.4 zeigt den zeitlichen Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  in den 15 Simulationen mit den fünf Staubteilchenradien  $R$  für die drei Temperaturverhältnisse  $\beta$ . Zu Beginn wurde das Oberflächenpotenzial bzw. die Ladung der Staubteilchen gleich Null gesetzt. Erwartungsgemäß laden sich sämtliche Staubteilchen im Verlauf der Simulation negativ auf, bis das Oberflächenpotenzial ab jeweils ca. der Hälfte der Simulationsdauer einen Gleichgewichtszustand erreicht hat. Der Betrag des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht fällt dabei mit sinkender Iontemperatur jeweils geringer aus und zeigt für kleine Radien im Vergleich zu den entsprechenden Debyelängen eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Oberflächenpotenzial aus der OML-Theorie, siehe Abbildung 4.6. Der Verlauf des Oberflächenpotenzials bei der Iontemperatur von  $kT_i = 0,01 \text{ eV}$  entspricht zu Beginn dem Verlauf einer gedämpften Schwingung, wobei mit zunehmendem Staubteilchenradius die Amplitude abnimmt und die Schwingung beim größten Radius von  $R = 200 \mu\text{m}$  fast ganz verschwindet. Dieses Verhalten wird durch die relativ geringe kinetische Energie der Ionen im Vergleich zu den Elektronen verursacht. Denn die „kalten“ Ionen werden nahezu radial auf das zu Beginn noch unabgeschirmte, negativ geladene Staubteilchen beschleunigt, was zu einem hohen Ionenstrom führt, welcher das Staubteilchen teilweise wieder entlädt. Erst im Verlauf der Simulation bildet sich eine signifikant erhöhte Ionendichte um das Staubteilchen herum aus, welche die negative Oberflächenladung abschirmt und den Gleichgewichtszustand ermöglicht. Die Amplitude der auftretenden Schwingung hängt dabei nicht vom Radius des Staubteilchens ab, sondern nur von der Superteilchenladung  $Q_{\text{SP}}$  bzw. von der relativen Anzahl der Superteilchen in den Simulationen. Da die physikalische Plasmadichte in allen Simulationen stets gleich groß ist, wird die Anzahl der Superteilchen in einer Simulation nur durch die Superteilchenladung bestimmt. Die Anzahl der Superteilchen ist zwar zu Beginn in jeder Simulation gleich groß, jedoch steigt die Größe des Simulationsgebietes sowie die Superteilchenladung mit dem Radius des Staubteilchens in den Simulationen an. Demnach

## 4.2. Eindimensionale Simulationen mit Staubteilchen

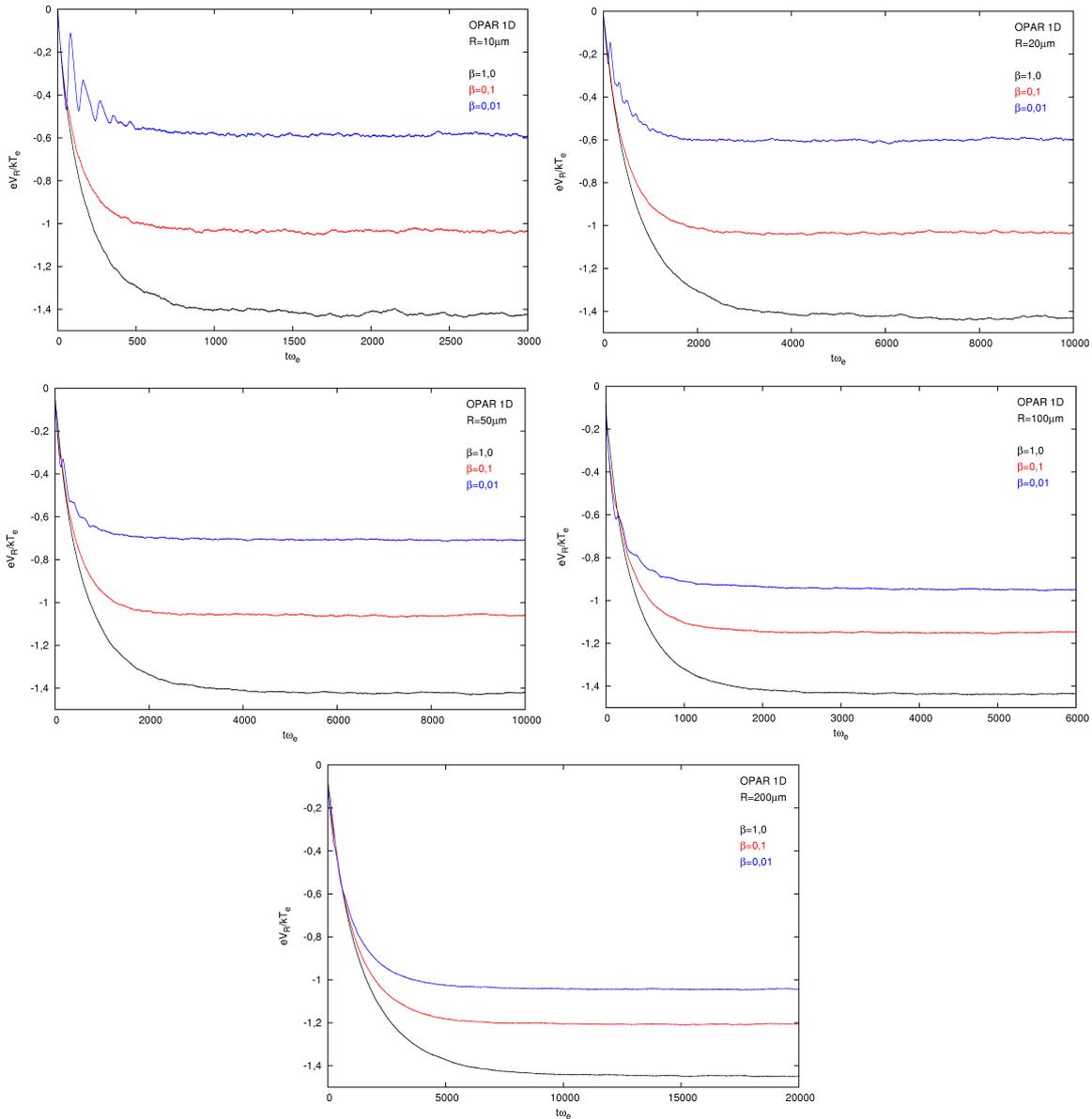


Abbildung 4.4.: Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  in den insgesamt 15 Simulationen mit fünf verschiedenen Staubteilchenradien  $R$  bei jeweils drei Temperaturverhältnissen  $\beta$ . Die weiteren Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.1 angegeben. Das Oberflächenpotenzial wurde alle zehn Zeitschritte ausgegeben und auf die Plasmafrequenz der Elektronen  $\omega_e$  normiert. Zu Beginn wurde das Oberflächenpotenzial bzw. die Ladung der Staubteilchen gleich Null gesetzt. Die Staubteilchen laden sich im Verlauf der Simulation negativ auf, bis das Oberflächenpotenzial einen Gleichgewichtszustand erreicht hat.

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

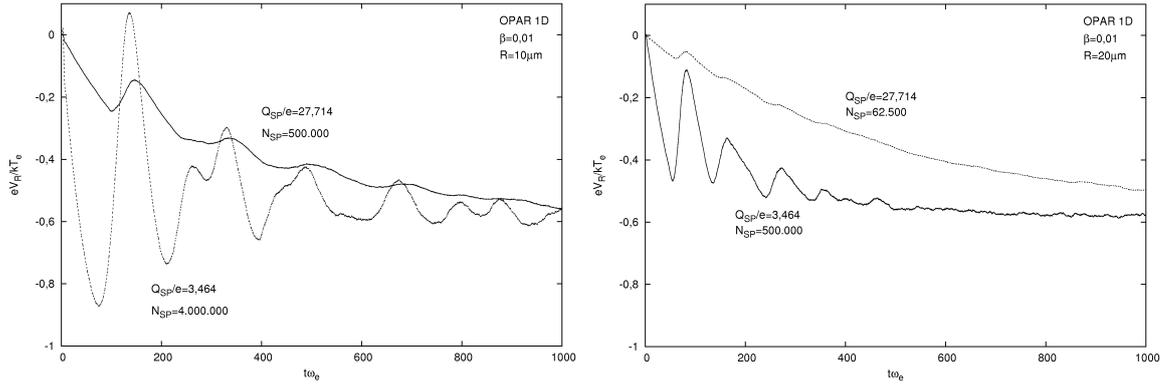


Abbildung 4.5.: Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  in den Simulationen mit den Staubteilchenradien  $R = 10 \mu\text{m}$  und  $20 \mu\text{m}$  für  $\beta = 0,01$  aus Abbildung 4.4 (durchgezogene Linie) in einem Zeitausschnitt. Zum Vergleich (gestrichelte Linie) ist jeweils eine Simulation gezeigt, in welcher bis auf die Superteilchenladung die gleichen Parameter verwendet wurden wie in Tabelle 4.1. Dabei wurde in der zusätzlichen Simulation mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  (gestrichelte Linie) die Superteilchenladung wie in der Simulation mit dem Radius  $R = 20 \mu\text{m}$  verwendet und umgekehrt, womit sich die Anzahl  $N_{SP}$  der Superteilchen in der Simulation jeweils unterscheidet.

sinkt die Dichte der Superteilchen in Bezug auf die physikalische Größe des Simulationsgebietes mit steigendem Staubteilchenradius. Da bei Absorption eines Superteilchens durch das Staubteilchen jeweils nur eine Elementarladung der Oberflächenladung hinzugefügt wird (siehe Abschnitt 3.6), hängt die Amplitude der Schwingung im anfänglichen Verlauf des Oberflächenpotenzials nur von der relativen Anzahl der Superteilchen ab. In Abbildung 4.5 ist zusätzlich zum Verlauf des Oberflächenpotenzials für die Radien  $R = 10 \mu\text{m}$  und  $20 \mu\text{m}$  aus Abbildung 4.4 der Verlauf aus zwei weiteren Simulationen gezeigt (gestrichelte Linie), wobei hier jeweils bis auf die Superteilchenladung die gleichen Parameter verwendet wurden wie in Tabelle 4.1 angegeben. Dabei wurde in der zusätzlichen Simulation mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  (gestrichelte Linie) die Superteilchenladung wie in der Simulation mit dem Radius  $R = 20 \mu\text{m}$  verwendet und umgekehrt, womit sich die Anzahl der Superteilchen in der Simulation jeweils unterscheidet. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Amplitude mit größerer Superteilchenanzahl ebenfalls größer wird. Der Betrag des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht ist dagegen unabhängig von der Größe der Superteilchenladung. Lediglich die Zeitskala bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes wird beeinflusst, wobei erwartungsgemäß mit einer kleineren Anzahl von Superteilchen deutlich mehr Zeitschritte notwendig sind, um den Gleichgewichtszustand zu erreichen. Die Abnahme der Amplitude mit dem Radius in den Simulationen mit  $\beta = 0,01$  in Abbildung 4.4 stellt also wie beschrieben einen rein numerischen Effekt dar. Während der Gleichgewichtszustand in den Simulationen mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  nach ca.  $t\omega_e = 1.500$  (ca.  $0,3 \mu\text{s}$ ) Plasmaschwingungen erreicht ist, wird der Gleichgewichtszustand mit dem Radius  $R = 200 \mu\text{m}$  erst nach ca.  $t\omega_e = 10.000$  (ca.  $2,3 \mu\text{s}$ ) erreicht. Allerdings sind die Zeitskalen wie erwähnt nicht direkt miteinander vergleich-

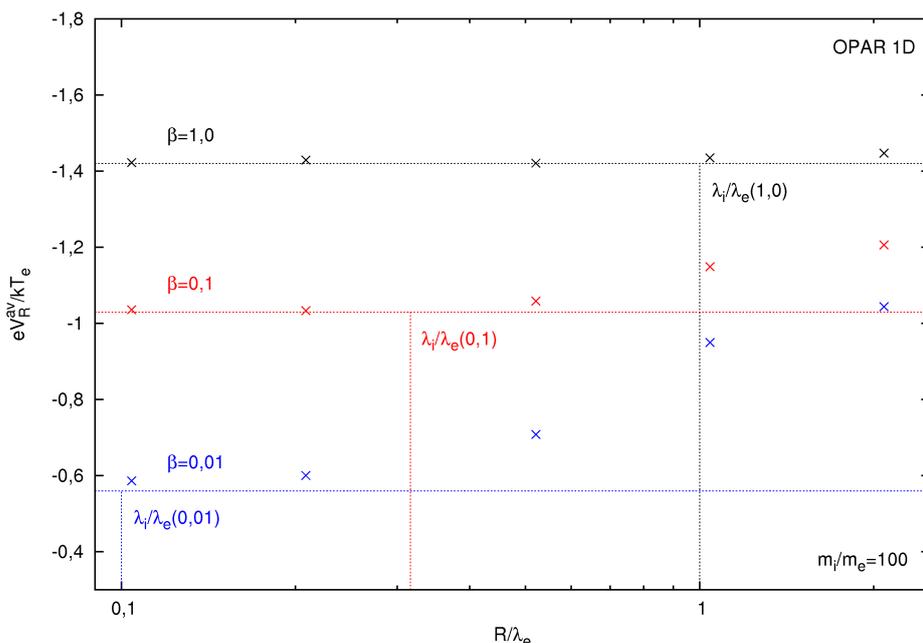


Abbildung 4.6.: Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{\text{av}}/kT_e$  (farbige Kreuze) im Gleichgewicht von insgesamt 15 Simulationen für fünf verschiedene Staubteilchenradien  $R$  und drei Temperaturverhältnissen  $\beta = T_i/T_e$ . Die Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.1 angegeben. Die gestrichelten, horizontalen Linien zeigen die Oberflächenpotenziale, wie sie sich aus der OML-Theorie ergeben. Die vertikalen Linien zeigen die Debyelängen der Ionen und bestimmen somit den Übergang zwischen dem OML- und OM-Fall. Für kleine Radien im Vergleich zu den entsprechenden Debyelängen ergibt sich jeweils eine sehr gute Übereinstimmung des gemittelten Oberflächenpotenzials mit dem aus der OML-Theorie, die Abweichung beträgt stets weniger als 1%.

bar, da die Superteilchenladung in den Simulationen mit unterschiedlichen Radien nicht gleich angesetzt wurde. Der Gleichgewichtszustand wird mit geringer werdender Ionen-temperatur jeweils etwas schneller erreicht, da der Ionenstrom (siehe Gleichung (2.16) aus der OML-Theorie) mit sinkender Temperatur ansteigt.

Abbildung 4.6 zeigt das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{\text{av}}/kT_e$  im Gleichgewicht der insgesamt 15 1D-OPAR-Simulationen. Die arithmetische Mittelung wurde dabei jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Die zugehörigen Standardabweichungen liegen im Bereich von  $10^{-3}$  und sind damit vernachlässigbar klein. Die gestrichelten, horizontalen Linien zeigen die drei Oberflächenpotenziale, wie sie sich aus der OML-Theorie (siehe Abbildung 2.4) ergeben. Die vertikalen Linien zeigen die entsprechenden Debyelängen der Ionen und bestimmen somit den Übergang zwischen dem OML- und dem OM-Fall (siehe Abbildung 2.9). Für kleine Radien im Vergleich zu den Debyelängen ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung des gemittelten Oberflächenpotenzials mit dem aus der OML-Theorie, die Abweichung beträgt stets weniger als 1%. Für größe-

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

re Radien, wobei der größte gewählte Radius mit  $R = 200 \mu\text{m}$  etwa dem doppeltem der Debyelänge der Elektronen entspricht, steigt der Betrag des Oberflächenpotenzials jeweils an. Denn nach der OM-Theorie fällt der Ionenstrom auf ein Staubteilchen für große Radien im Vergleich zu den Debyelängen des Plasmas stets kleiner aus als nach der OML-Theorie, wie im Abschnitt 2.3.3 diskutiert wurde. Aus dem Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht lässt sich nach (3.43) über die Kapazität  $C$  die Ladung des Staubteilchens bestimmen:

$$Q_{\text{R}}^{\text{av}} = eV_{\text{R}}^{\text{av}} \cdot C \quad . \quad (4.5)$$

Ausgehend vom Kapazitätswert im Vakuum ( $C = 4\pi\epsilon_0 R$ ) nimmt das Staubteilchen mit dem Radius  $R = 200 \mu\text{m}$  bei  $\beta = 1,0$  die größte Ladung aus den 15 Simulationen an, die kleinste das Staubteilchen mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  bei  $\beta = 0,01$ . Die Ladungen betragen  $Q_{200}^{\text{av}} = 201.034,24 e$  und  $Q_{10}^{\text{av}} = 4.069,39 e$ . In OPAR wurde in allen Simulationen der Kapazitätswert im Vakuum verwendet, da sich das Gleichgewichtspotenzial unabhängig von dessen Größe einstellt. Allerdings hängt der tatsächliche Kapazitätswert vom Potenzialprofil des Staubteilchens ab, insbesondere für größere Radien im Vergleich zu den Debyelängen, wie bereits im Abschnitt 3.6 diskutiert wurde. Die angegebenen Gleichgewichtsladungen stellen daher nur eine Näherung dar.

Die Rechnerlaufzeit für  $10^6$  Zeitschritte einer eindimensionalen OPAR-Simulation beträgt mit einem Intel Core I7 - 3770K 4x3,5 GHz Prozessor in paralleler Rechnung ca. drei Stunden, unabhängig von der Gittergröße und der Zeitschrittweite.

#### 4.2.2. Verlauf der Ionen- und Elektronendichte

In Abbildung 4.7 ist der gemittelte radiale Verlauf der Elektronen- und Ionendichte  $n_e^{\text{av}}$  und  $n_i^{\text{av}}$  der 15 Simulationen gezeigt. Die jeweiligen Teilchendichten sind dabei in jeder Gitterzelle alle 1.000 Zeitschritte bestimmt und ausgegeben worden. Die arithmetische Mittelung wurde wieder über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand, wodurch die Fluktuationen aufgrund der thermischen Verteilungsfunktion der Plasmateilchen weitgehend herausgefiltert sind. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert, die Dichte jeweils auf die anfänglich angesetzte Plasmadichte  $n_0$ . Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . In größerer Entfernung von der Oberfläche des Staubteilchens ist die Elektronen- und Ionendichte jeweils ungestört sowie gleich groß und entspricht der anfänglichen Plasmadichte  $n_0$ . Somit verschwindet im zeitlichen Mittel die Ladungsdichte und das Potenzial auf den letzten Gitterpunkten. In der Nähe der negativ geladenen Oberfläche des Staubteilchens werden die Dichten zunehmend gestört. Die drei jeweils gestrichelten und zum Staubteilchen abfallenden Kurven entsprechen dabei der Elektronendichte, die durchgezogenen Kurven der Ionendichte. Zu erkennen ist, dass die Elektronendichte in allen Simulationen in der unmittelbaren Umgebung des Staubteilchens auf ca. 20% der Plasmadichte  $n_0$  abfällt. Die Elektronendichte fällt dabei mit sinkendem Temperaturverhältnis jeweils langsamer ab, da der Betrag des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht mit sinkendem  $\beta$  abnimmt.

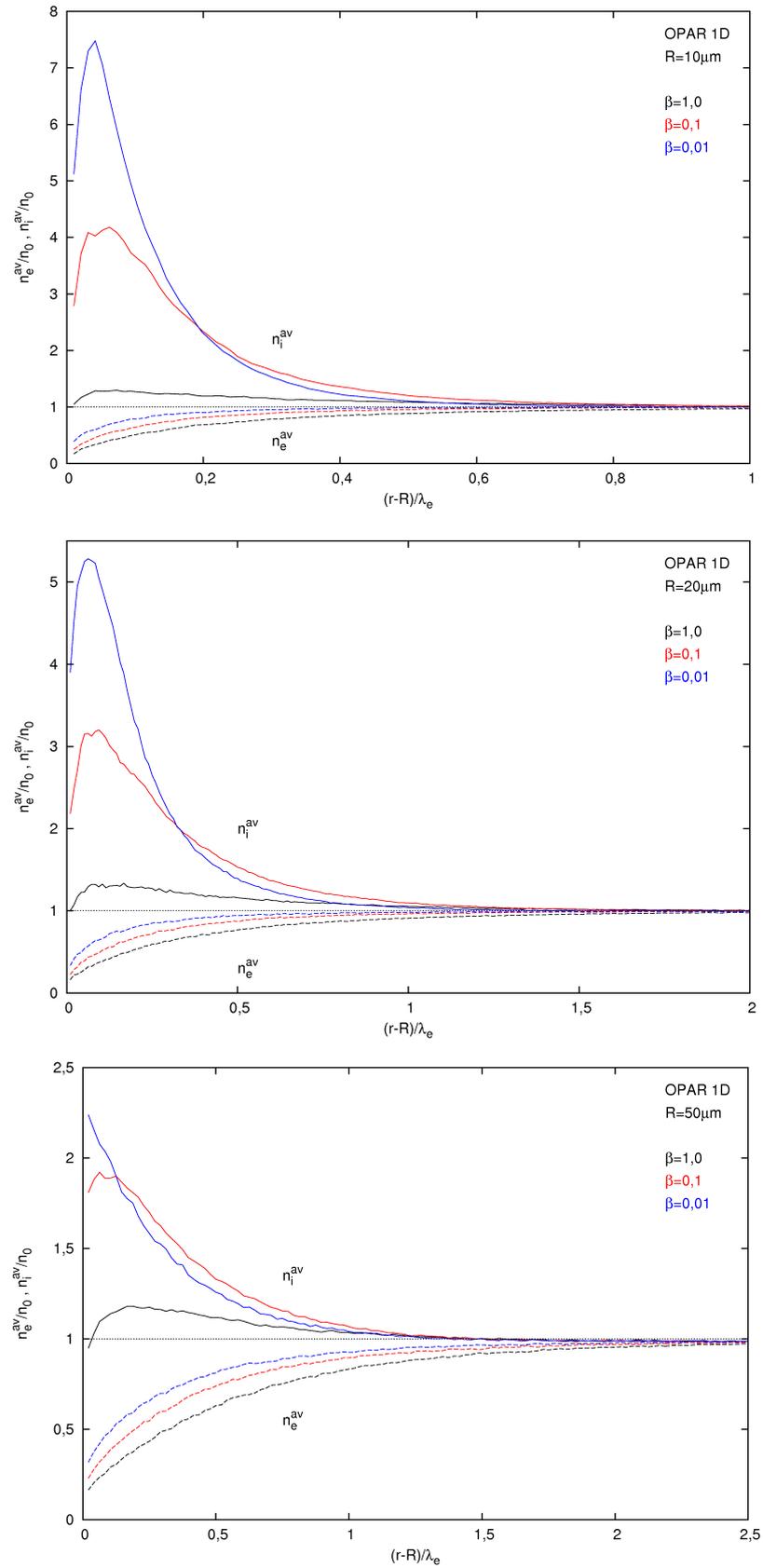
Für die Radien  $R = 10 \mu\text{m}$ ;  $20 \mu\text{m}$  und  $50 \mu\text{m}$ , welche kleiner als die Debyelänge der Elektronen sind, steigt die Ionendichte in der Umgebung des Staubteilchens jeweils deutlich über  $n_0$  an. Dieser Anstieg steht im Gegensatz zum Dichteverlauf an einer ebenen Plasmawand, bei welcher die Ionendichte im Vergleich zur Elektronendichte in der Nähe der Wand zwar auch deutlich erhöht ist, aber ebenfalls unter die Plasmadichte  $n_0$  fällt. Der Unterschied ergibt sich aus der Geometrie der Plasmabegrenzung. Während die meisten Ionen, welche sich auf eine Plasmawand zubewegen, auch von dieser absorbiert werden, werden im Falle eines sphärischen Staubteilchens die meisten Ionen nicht vom Staubteilchen absorbiert, sondern reflektiert. Im zeitlichen Mittel ist also der Strom von reflektierten Ionen größer als der Strom von Ionen, die vom Staubteilchen absorbiert werden, was zu der erhöhten Ionendichte in der näheren Umgebung des Staubteilchens führt. Erst in der unmittelbaren Umgebung (ca.  $r < 2R$ ) des Staubteilchens geht der Verlauf der Ionendichte in den Dichteverlauf nahe einer Plasmawand über, denn die Ionendichte erreicht hier einen Maximalwert, um dann zur Oberfläche hin stark abzufallen. Der Maximalwert der Ionendichte fällt dabei für kleine  $\beta$  stets deutlich größer aus, was auf die geringere kinetische Energie der Ionen zurückzuführen ist, wodurch deutlich mehr Ionen durch das anziehende Oberflächenpotenzial in Richtung des Staubteilchens beschleunigt werden als bei höheren Temperaturverhältnissen. Der Maximalwert nimmt außerdem jeweils mit größer werdendem Radius ab, da der Strom von absorbierten Ionen mit wachsendem Radius ebenfalls zunimmt.

Ein anderer Verlauf der Ionendichte ergibt sich, wenn der Staubteilchenradius ungefähr gleich oder größer als die Debyelänge der Elektronen ausfällt, wie es für die Radien  $R = 100 \mu\text{m}$  und  $200 \mu\text{m}$  der Fall ist. Hier fällt die Ionendichte zunächst deutlich unter die ungestörte Plasmadichte  $n_0$  ab, bevor diese wieder leicht ansteigt. Für größere Radien geht der Verlauf zunehmend in den charakteristischen Verlauf nahe einer ebenen Plasmawand über. Während sich also im Fall von kleinen Radien ( $R < \lambda_e$ ) eine relativ „dicke“ Schicht (engl. thick sheath) aus Ionen um das Staubteilchen herum ausbildet, ist es im Fall von großen Radien ( $R \geq \lambda_e$ ) eine relativ „dünne“ Schicht (engl. thin sheath). Zudem sind die Ionen- und Elektronendichten für die großen Radien  $R = 100 \mu\text{m}$  und  $200 \mu\text{m}$  in einem Bereich ab ca.  $(r - R) > 3\lambda_e$  ungefähr gleich, also  $n_i^{\text{av}} \approx n_e^{\text{av}} < n_0$ . Dieser Bereich wird auch quasineutrale Vorrandschicht (engl. pre-sheath) genannt, in welcher die Ionen auf die sogenannte Bohmgeschwindigkeit beschleunigt werden. In Riemann [113] wird die quasineutrale Vorrandschicht ausführlich behandelt.

### 4.2.3. Verlauf des Potenzialprofils

In Abbildung 4.8 sind die radialen, gemittelten Potenzialprofile der 15 Simulationen dargestellt. Der Abstand  $r - R$  von der Oberfläche des Staubteilchens am linken Rand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  und das Potenzial auf das jeweilige gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht aus Abbildung 4.6 normiert. Der Potenzialverlauf ist bis zu einem Abstand von vier Debyelängen gezeigt. Zum Vergleich ist jeweils das Debye-Hückel-Potenzial (gestrichelte Linien) nach (2.38) für den entsprechenden Radius dargestellt. Die dabei verwendeten Abschirmmlängen  $\lambda_d$  sind in der Abbildung angegeben. Für die Radien, welche kleiner als die jeweilige Debyelänge der Ionen sind, wurden die Abschirm-

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen



## 4.2. Eindimensionale Simulationen mit Staubteilchen

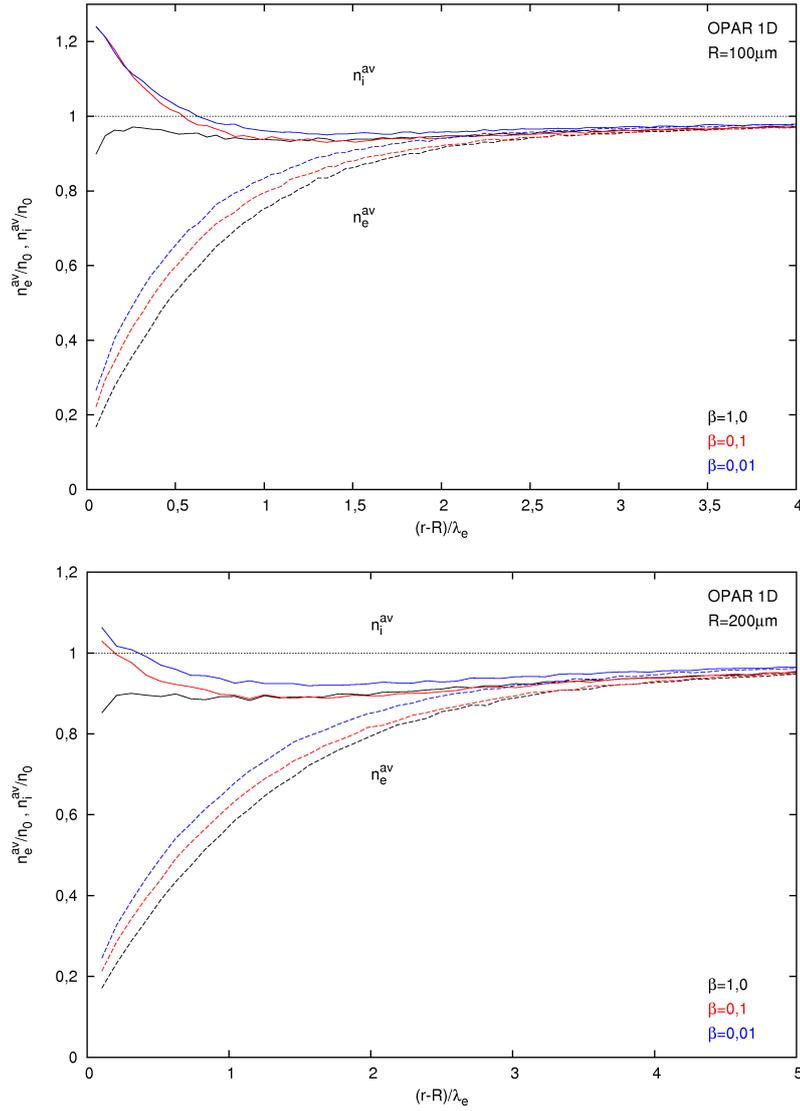


Abbildung 4.7.: Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte  $n_e^{av}$  und  $n_i^{av}$  der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien  $R$  und jeweils drei Temperaturverhältnissen  $\beta$ . Die Dichten wurden alle 1000 Zeitschritte ausgegeben und die arithmetische Mittelung wurde jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert, die jeweilige Dichte auf die anfänglich angesetzte Plasmadichte von  $n_0 = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^3$ . Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . In größerer Entfernung von der Oberfläche des Staubteilchens ist die Elektronen- und Ionendichte jeweils ungestört sowie gleich groß und entspricht der anfänglich angesetzte Plasmadichte. Somit verschwindet im zeitlichen Mittel die Ladungsdichte und das Potenzial auf den letzten Gitterpunkten. Erst in der Nähe der negativ geladenen Oberfläche des Staubteilchens werden die Plasmadichten zunehmend gestört. Die drei jeweils gestrichelten und zum Staubteilchen abfallenden Kurven entsprechen der Elektronendichte, die durchgezogenen Kurven der Ionendichte.

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

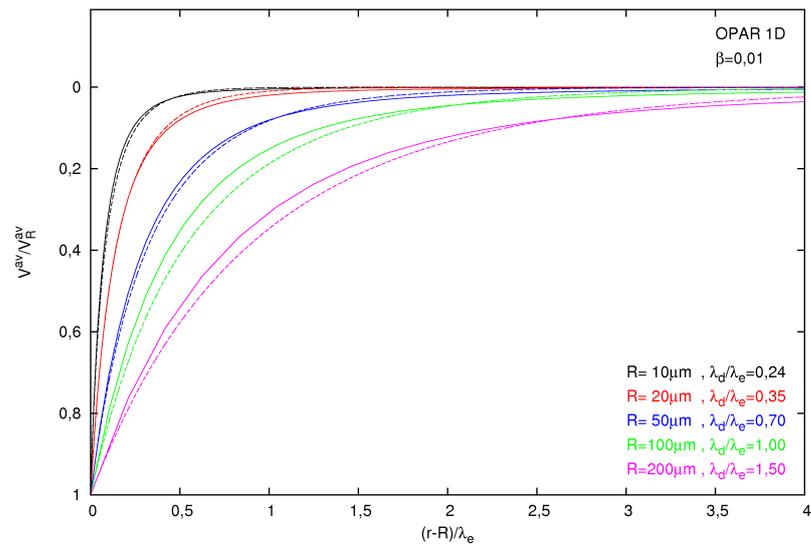
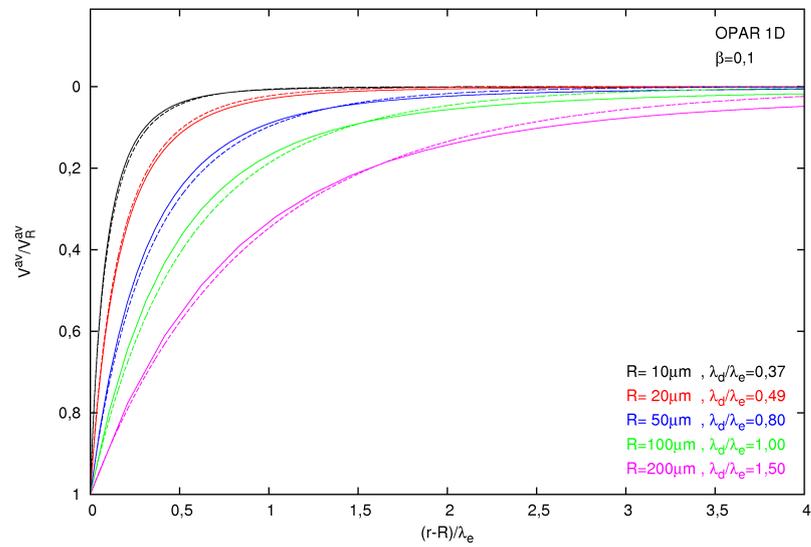
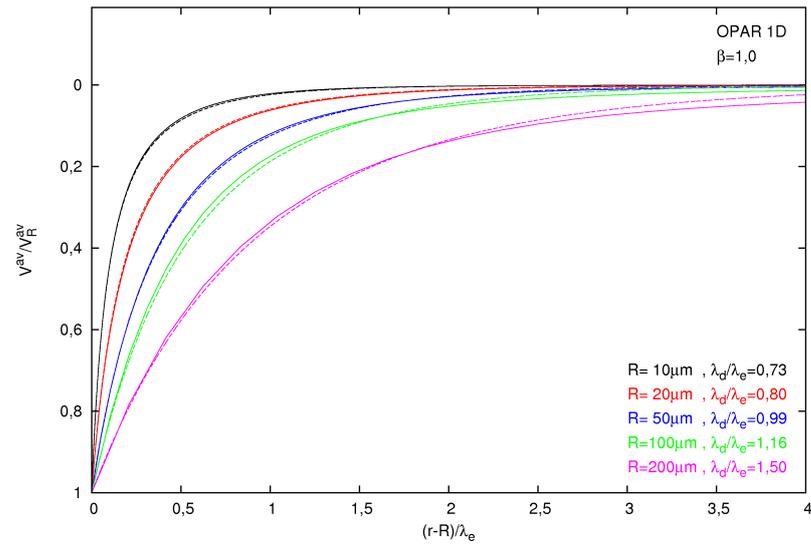


Abbildung 4.8.: Der gemittelte radiale Verlauf des Potentials  $V^{\text{av}}$  der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien  $R$  und jeweils drei Temperaturverhältnissen  $\beta$ . Das Potential wurde alle 1.000 Zeitschritte ausgegeben und die arithmetische Mittelung wurde jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  und das Potential auf das jeweilige gemittelte Oberflächenpotential im Gleichgewicht  $V_R^{\text{av}}$  normiert. Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . Zum Vergleich ist das Debye-Hückel-Potenzial (gestrichelte Linien) nach (2.38) für den entsprechenden Radius gezeigt. Die dabei verwendeten Abschirmweiten  $\lambda_d$  sind in der Abbildung angegeben und stammen teilweise aus der numerischen Lösung des Oberflächenpotentials im Gleichgewicht gemäß der OM-Theorie, siehe Abschnitt 2.3.3.

längen verwendet, welche sich aus der numerischen Lösung des Oberflächenpotentials im Gleichgewicht gemäß der OM-Theorie ergeben haben, siehe Abschnitt (2.3.3). Während die Potenzialprofile für  $\beta = 1, 0$  bis auf den größten Radius  $R = 200 \mu\text{m}$  recht gut durch das Debye-Hückel-Potenzial mit einer ansteigenden Abschirmweite approximiert werden können, kann für  $\beta = 0, 1$  und  $0, 01$  nur noch für die beiden kleinsten bzw. den kleinsten Radius eine gute Approximation erreicht werden.

Für die größeren Radien im Vergleich zu den entsprechenden Debyelängen fällt das Oberflächenpotential für kleine Abstände stets schneller und für größere Abstände stets langsamer ab als das Debye-Hückel-Potenzial. Die Potenzialverläufe stimmen damit mit den Ergebnissen aus dem Abschnitt 2.3.3 überein, wonach selbst bei einer immer weiter ansteigenden Abschirmweite im Debye-Hückel-Potenzial keine numerische Lösung des Oberflächenpotentials nach der OM-Theorie mehr möglich ist. Denn durch die auftretenden Potenzialbarrieren bei größeren Radien und den damit verbundenen Ionenbahnen wird die Abschirmung des Oberflächenpotentials zunehmend nichtlinear, wodurch sich das Potenzialprofil nicht mehr durch ein Debye-Hückel-Potenzial darstellen lässt, welches aus der linearisierten Poisson-Gleichung mit einer entsprechenden Abschirmweite folgt (siehe Anhang C). Zudem verläuft das Potenzialprofil für den größten Radius von  $200 \mu\text{m}$  für alle drei Temperaturverhältnisse annähernd identisch, weshalb das Debye-Hückel-Potenzial in allen drei Fällen auch mit einer Abschirmweite von  $\lambda = 1, 5 \lambda_e$  angesetzt wurde. Analog verläuft das Oberflächenpotential für den Radius von  $100 \mu\text{m}$  bei  $\beta = 0, 1$  und  $0, 01$  annähernd gleich. Dagegen fällt das Potential für die kleineren Radien umso langsamer ab, je höher das Temperaturverhältnis ausfällt, was mit dem Dichteverlauf der Ionen aus Abbildung 4.7 korreliert. Denn je „dicker“ der Mantel (Sheath) aus Ionen um das Staubteilchen herum ausfällt, desto schneller muss das Oberflächenpotential entsprechend abfallen.

### 4.3. Dreidimensionale Simulationen mit Staubteilchen

In diesem Abschnitt werden dreidimensionale OPAR-Simulationen mit einem Staubteilchen vorgestellt, wobei das Staubteilchen stets in der Mitte des würfelförmigen Simulationsgebietes positioniert ist. Insgesamt werden wieder 15 Simulationen diskutiert, wobei jeweils fünf verschiedene Staubteilchenradien bei drei verschiedenen Temperaturverhältnissen  $\beta$  simuliert wurden. In allen Simulationen sind die Plasmadichten mit  $n_0 = n_e = n_i = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^3$  ebenso gleich angesetzt wie die Elektronentemperatur mit  $kT_e = 1 \text{ eV}$ . Die Ionentemperatur wurde zu  $kT_i = 1 \text{ eV}$ ;  $0,1 \text{ eV}$  und  $0,01 \text{ eV}$  gewählt, die zugehörigen Debyelängen sind in Tabelle 4.1 (rechts) angegeben. Die fünf Radien der Staubteilchen betragen wieder  $R = 10 \mu\text{m}$ ;  $20 \mu\text{m}$ ;  $50 \mu\text{m}$ ;  $100 \mu\text{m}$  und  $200 \mu\text{m}$ , womit die Radien sowohl kleiner als auch größer als die Debyelängen des Plasmas ausfallen.

Da der numerische Aufwand der dreidimensionalen Simulationen im Vergleich zu den ein- und zweidimensionalen enorm erhöht ist, ist eine geschickte Wahl der Parameter erforderlich, um den numerischen Aufwand in einem akzeptablen Rahmen zu halten. Die Rechnerlaufzeit wird dabei zum einen durch die Anzahl der Gitterpunkte, der Superteilchen sowie der nötigen Zeitschritte bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes bestimmt, zum anderen durch den Gitterpunktabstand  $\Delta x$  und die Zeitschrittweite  $\Delta t$ . Dabei gilt, je größer die Superteilchenanzahl in einer Simulation ist, desto weniger Zeitschritte sind bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustand erforderlich. Es weiteren nimmt die Rechnerlaufzeit für einen Zeitschritt zu, je größer die Werte von  $\Delta x$  und  $\Delta t$  ausfallen.

Der Gitterpunktabstand  $\Delta x$  ist in den Simulationen mit den Radien  $R = 10 \mu\text{m}$ ;  $20 \mu\text{m}$  und  $50 \mu\text{m}$  so gewählt worden, dass das Verhältnis jeweils  $R/\Delta x = 4$  beträgt. In den Simulationen mit den Radien  $R = 100 \mu\text{m}$  und  $200 \mu\text{m}$  wurde dagegen  $R/\Delta x = 5$  und eine größere Anzahl von Superteilchen als in den anderen Simulationen angesetzt, was die Rechnerlaufzeit bezüglich eines Zeitschrittes und der notwendigen Anzahl der Zeitschritte bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustand deutlich reduziert. Im Falle von  $R/\Delta x = 4$  wird das Oberflächenpotenzial des Staubteilchens im numerischen Gitter durch 206 Gitterpunkte repräsentiert, im Falle von  $R/\Delta x = 5$  durch 270 Gitterpunkte. Während bei den größeren Staubteilchenradien und Gitterpunktabständen jeweils ein Gitter mit  $81 \cdot 81 \cdot 81$  Gitterpunkten ausreichend ist, um die Randbedingung eines verschwindenden Potenzials auf den das Simulationsgebiet berandenden Gitterpunkten ansetzen zu können, ist bei den beiden kleinsten Staubteilchenradien in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses teilweise ein größeres Gittersystem angesetzt worden. Das Potenzial eines Staubteilchen fällt nämlich für größere Temperaturverhältnisse jeweils langsamer ab, wie bereits in den Potenzialprofilen der eindimensionalen Simulationen zu erkennen ist (siehe Abbildung 4.8).

In Tabelle 4.2 sind die entsprechenden Simulationsparameter der 15 Simulationen zusammengefasst. Die Zeitschrittweite erfüllt jeweils wieder hinreichend die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung. Die Gitterpunktabstände sind stets in allen drei Raumrichtungen gleich angesetzt, also  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ . Die Elektronen und Ionen werden durch Super-

$R/\mu\text{m}$	$\Delta x/\mu\text{m}$	$N_x$	$Vl/\text{mm}^3$	$\Delta t/\omega_e$	$Q_{\text{SP}}/e$	$N_{\text{SP}}$
10	2,5	121, für $\beta = 1,0$	0,027	0,0025	0,375	432.000
		101, für $\beta = 0,1; 0,01$	0,016			250.000
20	5	101, für $\beta = 1,0$	0,125	0,005	1,536	488.281
		81, für $\beta = 0,1; 0,01$	0,064			250.000
50	12,5	81, für alle $\beta$	1,0	0,0125	24,0	250.000
100	20	81, für alle $\beta$	4,096	0,02	24,576	1.000.000
200	40	81, für alle $\beta$	13,82	0,04	78,6432	2.500.000

Tabelle 4.2.: Parameter zu 15 verschiedenen 3D-OPAR-Simulationen. Angegeben ist der Staubteilchenradius  $R$ , der Gitterpunktabstand  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ , die Gitterpunktanzahl  $N_x = N_y = N_z$ , das Volumen des physikalischen Simulationsgebietes  $Vl$  (inkl. Staubteilchen), die Zeitschrittweite  $\Delta t$ , der Betrag der Superteilchenladung  $Q_{\text{SP}}$  sowie die anfängliche Anzahl der Superteilchen  $N_{\text{SP}}$ . Für die drei kleinsten Radien gilt das Verhältnis  $R/\Delta x = 4$ , für die beiden größten Radien  $R/\Delta x = 5$ . Weiterhin gilt in allen Simulationen  $m_i/m_e = 100$ ,  $n_0 = n_e = n_i = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^3$  und  $kT_e = 1 \text{ eV}$ , woraus  $\lambda_e = 95,98 \mu\text{m}$  und  $\omega_e = 4,37 \cdot 10^9/\text{s}$  folgt. Die jeweiligen Debyelängen  $\lambda_i$  und  $\lambda_1$  sind in Tabelle 4.1 (rechts) angegeben.

teilchen repräsentiert, welche zu Beginn gemäß einer Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell in das Simulationsgebiet gesetzt wurden. In jede Gitterzelle sind dabei in der jeweiligen Simulation die gleiche Anzahl von Superteilchen räumlich zufällig verteilt worden. Der Betrag der Ladung  $Q_{\text{SP}}$ , die jedes Superteilchen in der Simulation trägt, ergibt sich aus der Plasmadichte:

$$Q_{\text{SP}} = \frac{en_0}{N_{\text{SP}}} (N_x - 1) (N_y - 1) (N_z - 1) \Delta x^3 \quad . \quad (4.6)$$

Die Ladungen  $Q_{\text{SP}}$  für die entsprechenden Simulationen sind ebenfalls in Tabelle 4.2 angegeben.

### 4.3.1. Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht

Abbildung 4.9 zeigt den zeitlichen Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  in den 15 Simulationen mit den fünf Staubteilchenradien  $R$  für die drei Temperaturverhältnisse  $\beta$ . Zu Beginn wurde das Oberflächenpotenzial bzw. die Ladung der Staubteilchen gleich Null gesetzt. Erwartungsgemäß laden sich sämtliche Staubteilchen im Verlauf der Simulation negativ auf, bis das Oberflächenpotenzial ab jeweils ca. der Hälfte der Simulationsdauer einen Gleichgewichtszustand erreicht hat. Der Betrag des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht fällt dabei mit sinkender Iontemperatur jeweils geringer aus und zeigt für kleine Radien im Vergleich zu den entsprechenden Debyelängen eine gute Übereinstimmung mit dem Oberflächenpotenzial aus der OML-Theorie, siehe Abbildung 4.6. Der Verlauf des Oberflächenpotenzials bei der Iontemperatur von  $kT_i = 0,01 \text{ eV}$  entspricht zu Beginn dem Verlauf einer gedämpften Schwingung, wobei mit zunehmendem Staubteilchenradius die Amplitude abnimmt und die Schwingung beim größten Radius von  $R = 200 \mu\text{m}$  fast ganz verschwindet. Dieses Verhalten wird durch die relativ

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

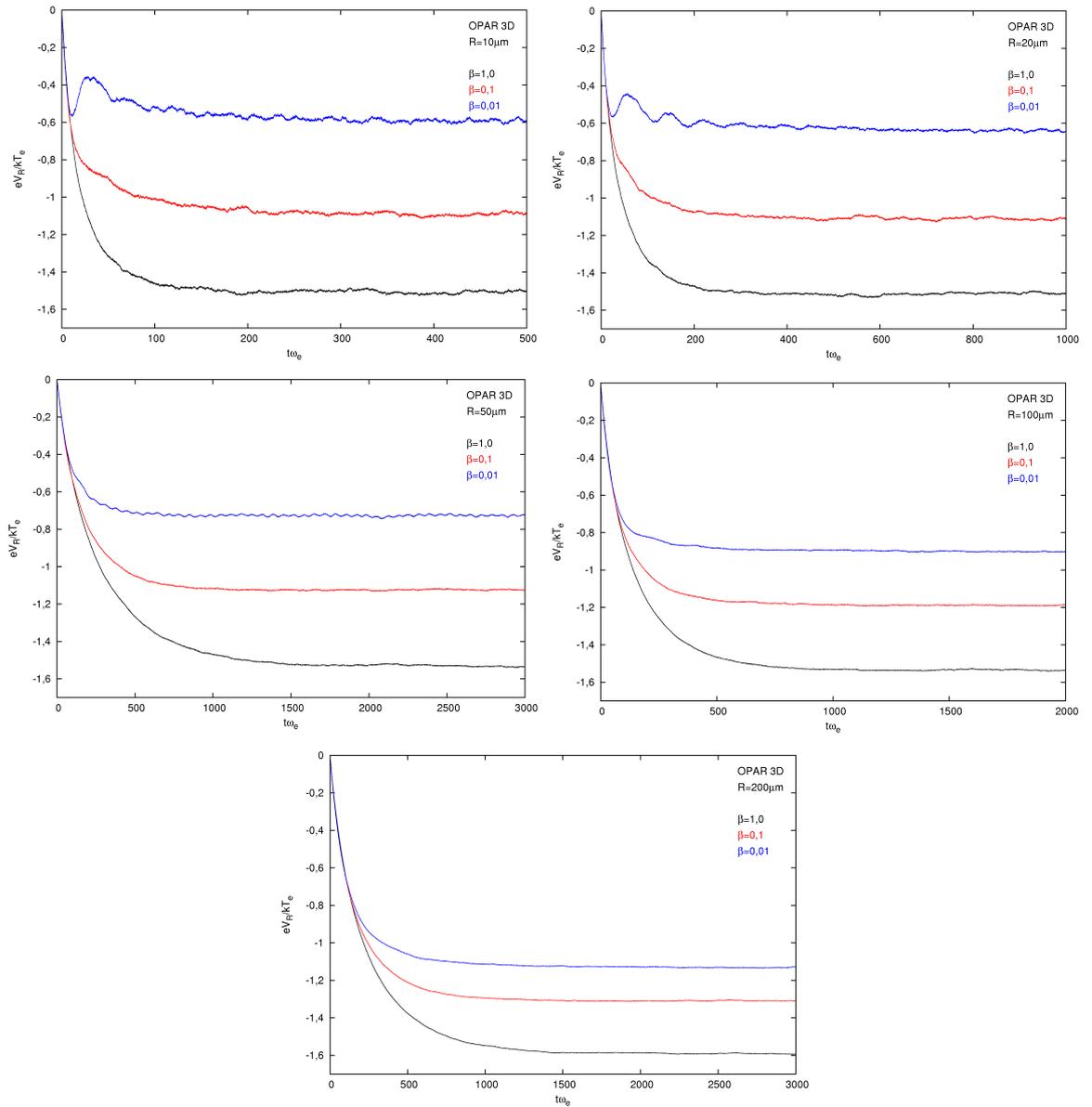


Abbildung 4.9.: Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  in den insgesamt 15 Simulationen mit fünf verschiedenen Staubteilchenradien  $R$  bei jeweils drei Temperaturverhältnissen  $\beta$ . Die weiteren Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.2 angegeben. Das Oberflächenpotenzial wurde alle zehn Zeitschritte ausgegeben und auf die Plasmafrequenz der Elektronen  $\omega_e$  normiert. Zu Beginn wurde das Oberflächenpotenzial bzw. die Ladung der Staubteilchen gleich Null gesetzt. Die Staubteilchen laden sich im Verlauf der Simulation negativ auf, bis das Oberflächenpotenzial einen Gleichgewichtszustand erreicht hat.

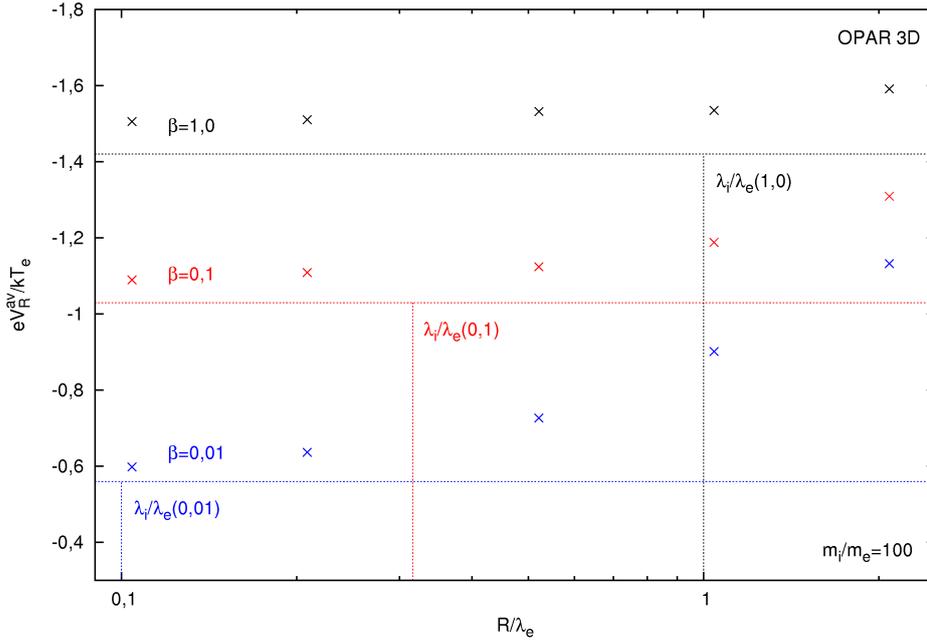


Abbildung 4.10.: Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{\text{av}}/kT_e$  (farbige Kreuze) im Gleichgewicht von insgesamt 15 Simulationen für fünf verschiedene Staubteilchenradien  $R$  und drei Temperaturverhältnissen  $\beta = T_i/T_e$ . Die Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.2 angegeben. Die gestrichelten, horizontalen Linien zeigen die Oberflächenpotenziale, wie sie sich aus der OML-Theorie ergeben. Die vertikalen Linien zeigen die Debyelängen der Ionen und bestimmen somit den Übergang zwischen dem OML- und dem OM-Fall. Die bestimmten Oberflächenpotenziale enthalten alle aufgrund der Gitterpunktauflösung und dem sich damit ergebenden Verhältnis  $R/\Delta x$  einen systematischen Fehler von ca. +5% bis +8%

geringe kinetische Energie der Ionen verursacht und trat bereits in den eindimensionalen Simulationen auf und wurde im letzten Abschnitt diskutiert.

Im Vergleich zu Abbildung 4.4 aus den 1D-Simulationen wird der Gleichgewichtszustand in den 3D-Simulationen nach deutlich weniger Plasmaschwingungen erreicht, was in der jeweiligen Größe der Superteilchenladung begründet liegt. Die Superteilchenladungen sind in den 3D-Simulationen jeweils kleiner angesetzt worden als in den 1D-Simulationen, weshalb mehr Superteilchen pro Volumen im Simulationsgebiet vorhanden sind, was die Anzahl der nötigen Zeitschritte bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes reduziert. Der Gleichgewichtszustand wird mit kleiner werdender Ionenenergie jeweils etwas schneller erreicht, da der Ionenstrom (siehe Gleichung (2.16) aus der OML-Theorie) mit sinkender Temperatur ansteigt.

Abbildung 4.10 zeigt das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{\text{av}}/kT_e$  im Gleichgewicht der insgesamt 15 3D-OPAR-Simulationen. Die arithmetische Mittelung wurde dabei jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Die zugehörigen Standardabweichungen liegen im Bereich von  $10^{-3}$  und sind damit vernachlässigbar klein. Die gestrichelten, hori-

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

zontalen Linien zeigen die drei Oberflächenpotenziale, wie sie sich aus der OML-Theorie (siehe Abbildung 2.4) ergeben. Die vertikalen Linien zeigen die entsprechenden Debyelängen der Ionen und bestimmen somit den Übergang zwischen dem OML- und dem OM-Fall (siehe Abbildung 2.9). Für kleine Radien im Vergleich zu den Debyelängen fällt der Betrag des Oberflächenpotenzials stets etwas höher aus als nach der OML-Theorie, die Abweichung liegt im Bereich von ca. +5% bis +8%.

Im Vergleich zu den 15 1D-OPAR-Simulationen aus Abbildung 4.6 fallen sämtliche Oberflächenpotenziale vom Betrag jeweils höher aus, da der Gitterpunkt Abstand in den 3D-Simulationen jeweils größer gewählt wurde als in den 1D-Simulationen. Verkleinert man den Gitterpunkt Abstand in einer Simulation, wird das zeitabhängige Oberflächenpotential des Staubteilchen in den 3D-Simulationen durch entsprechend mehr Gitterpunkte repräsentiert. Für höhere Verhältnisse von  $R/\Delta x$  ergibt sich somit jeweils ein vom Betrag her kleineres Oberflächenpotential im Gleichgewicht. Die bestimmten Oberflächenpotenziale in Abbildung 4.10 enthalten also alle einen systematischen Fehler, welcher hier maximal +8% beträgt. Aus dem Oberflächenpotential im Gleichgewicht lässt sich analog zu (3.43) wieder die Ladung der Staubteilchen bestimmen. Ausgehend vom Kapazitätswert im Vakuum ( $C = 4\pi\epsilon_0 R$ ) nimmt das Staubteilchen mit dem Radius  $R = 200 \mu\text{m}$  bei  $\beta = 1,0$  die größte Ladung aus den 15 Simulationen an, die kleinste das Staubteilchen mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  bei  $\beta = 0,01$ . Die Ladungen betragen hier  $Q_{200}^{\text{av}} = 221.058,08 e$  und  $Q_{10}^{\text{av}} = 4.152,48 e$ . Wie im Abschnitt für die eindimensionalen Simulationen bereits diskutiert, stellen die angegebenen Gleichgewichtsladungen nur eine Näherung dar.

Die Rechnerlaufzeit der dreidimensionalen OPAR-Simulationen hängt im Gegensatz zu den eindimensionalen stark von der Gittergröße, der Anzahl der Superteilchen, vom Gitterpunkt Abstand sowie von der Zeitschrittweite ab. Mit einem Intel Core I7 - 3770K 4x3,5 GHz Prozessor in paralleler Rechnung benötigen  $10^5$  Zeitschritte in einem Gittersystem mit  $81 \cdot 81 \cdot 81$  Gitterpunkten zwischen ca. 20 und 40 Stunden, während eine Simulation mit  $121 \cdot 121 \cdot 121$  Gitterpunkten aufgrund des kleinsten Gitterpunkt Abstandes und der kleinsten Zeitschrittweite für  $10^5$  Zeitschritte ca. 30 Stunden benötigt.

#### 4.3.2. Verlauf der Ionen- und Elektronendichte

In Abbildung 4.11 ist der gemittelte radiale Verlauf der Elektronen- und Ionendichte  $n_e^{\text{av}}$  und  $n_i^{\text{av}}$  der 15 Simulationen gezeigt. Die jeweiligen Teilchendichten sind dabei alle 1.000 Zeitschritte innerhalb konzentrischer Kugelschalen in Bezug auf das Staubteilchen bestimmt und ausgegeben worden. Die Breite der Kugelschalen wurde für die zwei kleinsten Staubteilchenradien jeweils gleich dem Gitterpunkt Abstand gesetzt, für die drei größten Radien wurde  $5 \mu\text{m}$  bzw.  $10 \mu\text{m}$  gewählt, um eine höhere Auflösung zu erhalten. Die arithmetische Mittelung wurde wieder jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand, wodurch die Fluktuationen aufgrund der thermischen Verteilungsfunktion der Plasmateilchen weitgehend herausgefiltert sind. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert, die Dichte jeweils auf die anfänglich angesetzte Plasmadichte  $n_0$ . Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . Der Abstand  $r$  bezieht sich also auf die Mitte des Staubteilchens bzw. des Simulationsgebietes. Der Verlauf der

Dichten ist nahezu identisch zu denen aus den 1D-OPAR-Simulationen nach Abbildung 4.7 und wurde im letzten Abschnitt ausführlich diskutiert.

### 4.3.3. Verlauf des Potenzialprofils

In Abbildung 4.12 sind die radialen, gemittelten Potenzialprofile der jeweils 15 Simulationen bei den drei Temperaturverhältnissen gezeigt. Die Mittelung der Profile wurde dabei wie folgt durchgeführt: In den 3D-OPAR-Simulationen stimmen stets insgesamt sechs Gitterpunkte des kartesischen Gittersystems mit der Oberfläche des Staubteilchens überein (siehe Abschnitt (3.3.3)). Ausgehend von einem solchen Gitterpunkt sind sechs radiale Potenzialprofile in Bezug auf den Mittelpunkt des Staubteilchens bis zum letzten Gitterpunkt am Simulationsrand aus dem Gittersystem ausgelesen worden. Dabei wurden die Profile jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer arithmetisch gemittelt, in welchen sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Diese sechs zeitlich gemittelten Profile sind dann noch einmal zu einem Profil gemittelt worden.

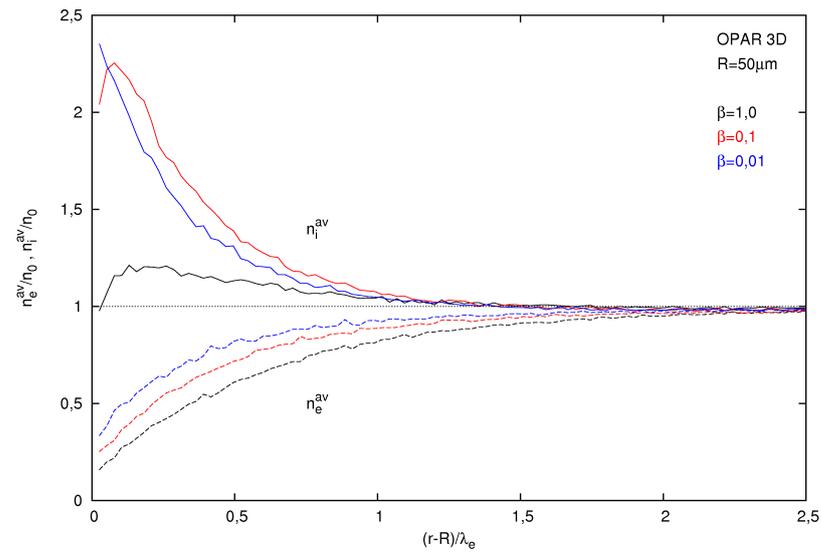
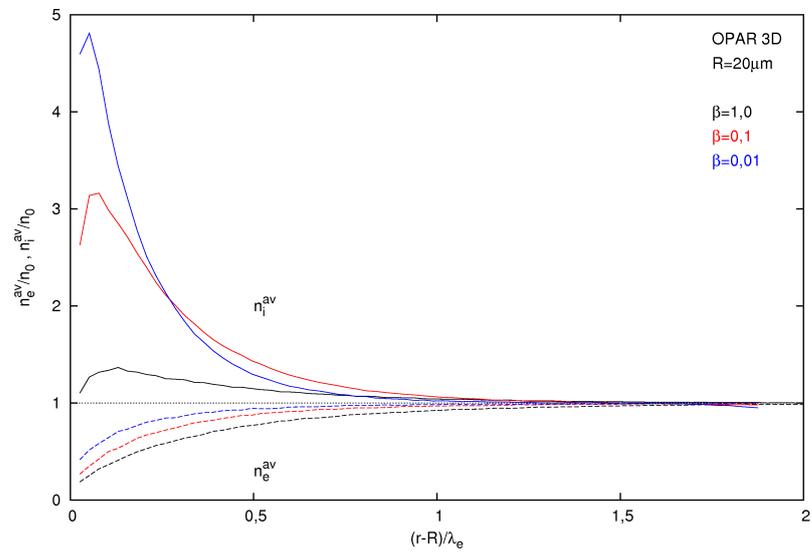
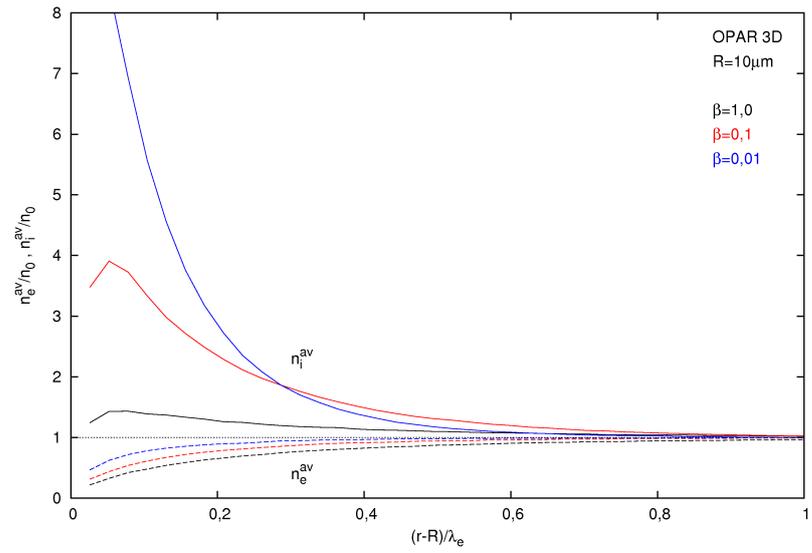
Der Abstand  $r - R$  von der Oberfläche des Staubteilchens am linken Rand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  und das Potenzial auf das jeweilige gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht normiert. Der Potenzialverlauf ist bis zu einem Abstand von vier Debyelängen dargestellt. Zum Vergleich ist jeweils das Debye-Hückel-Potenzial (gestrichelte Linien) nach (2.38) für den entsprechenden Radius gezeigt. Die dabei verwendeten Abschirmmlängen  $\lambda_d$  sind in der Abbildung angegeben. Für die Radien, welche kleiner als die jeweilige Debyelänge der Ionen sind, wurden die Abschirmmlängen verwendet, welche sich aus der numerischen Lösung des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht gemäß der OM-Theorie ergeben haben, siehe Abschnitt (2.3.3) und Abbildung 2.10. Der Verlauf der Potenziale ist wieder nahezu identisch zu denen aus den 1D-OPAR-Simulationen nach Abbildung 4.8.

In Abbildung 4.13 ist das gemittelte Potenzial (links) und die Ladungsdichte (rechts) auf den Gitterpunkten aus der Simulation mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  und  $\beta = 1$  in der  $x$ - $y$ -Ebene mit  $z = 0$  gezeigt, womit sich ein mittiger Querschnitt durch das würfelförmige Simulationsgebiet ergibt. Wieder wurde die arithmetische Mittelung über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt. Die Ladungsdichte ist dabei auf eine Superteilchenladung pro Gitterzellenvolumen normiert worden:

$$\rho_0 = \frac{Q_{\text{SP}}}{\Delta x^3} \quad . \quad (4.7)$$

Deutlich zu erkennen ist der rotationssymmetrische Verlauf des Potenzials und der Ladungsdichte im kartesischen Gitter um das Staubteilchen in der Mitte des Simulationsgebietes, wobei in den äußeren Randbereichen das Potenzial und die Ladungsdichte jeweils verschwindet. Das Potenzial bzw. die Ladungsdichte auf den Gitterpunkten innerhalb des Staubteilchens ist auf das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht (siehe Abbildung 4.10) bzw. gleich Null gesetzt worden.

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen



### 4.3. Dreidimensionale Simulationen mit Staubteilchen

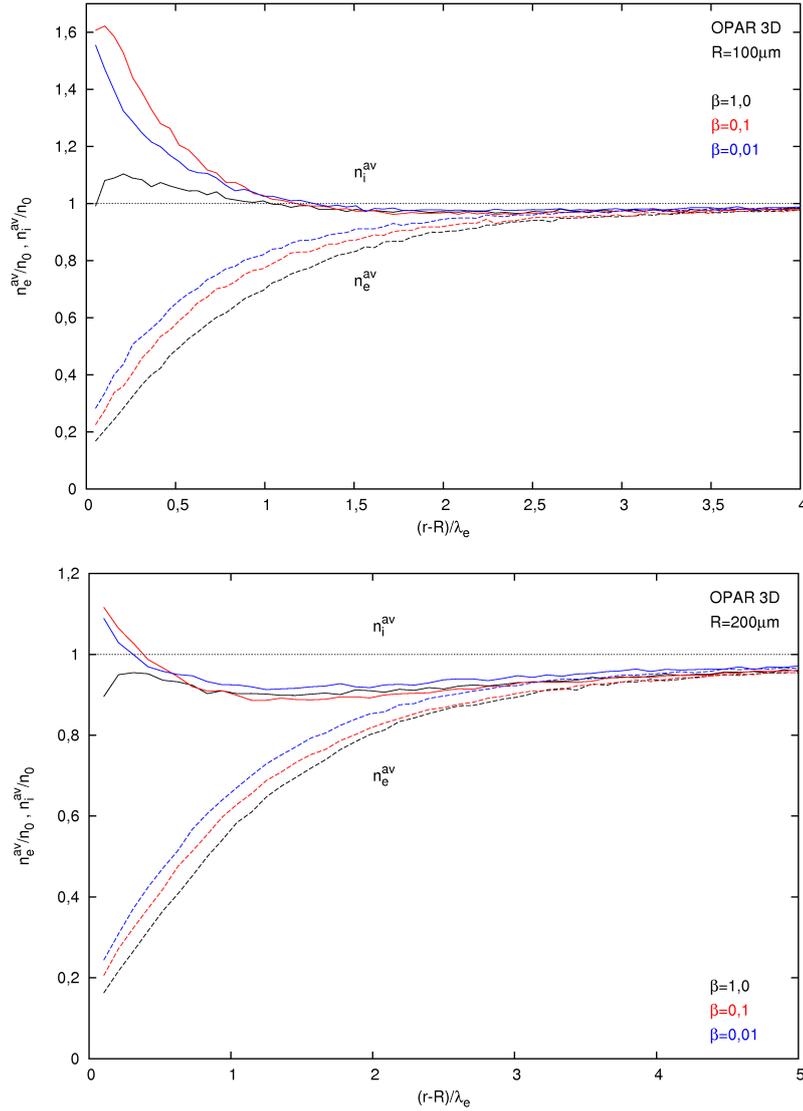
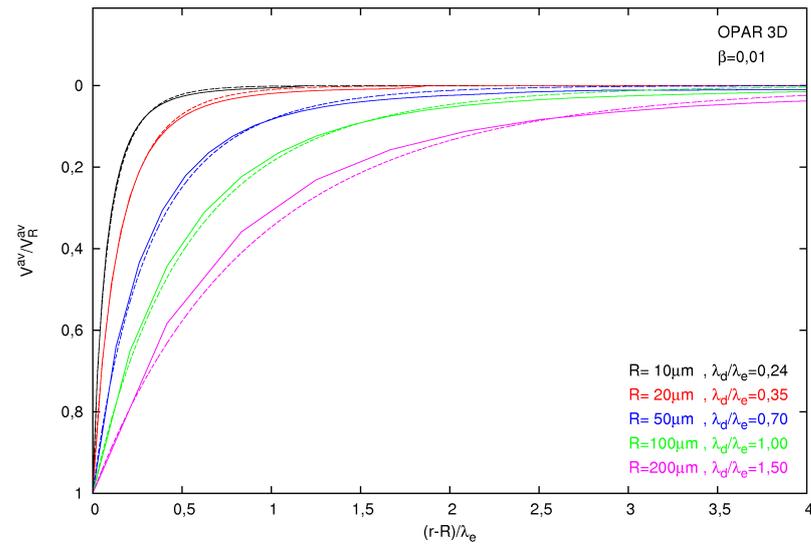
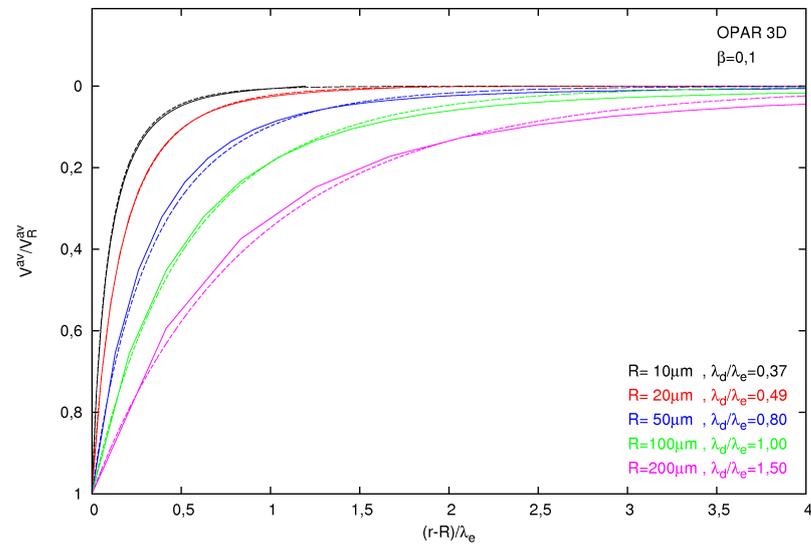
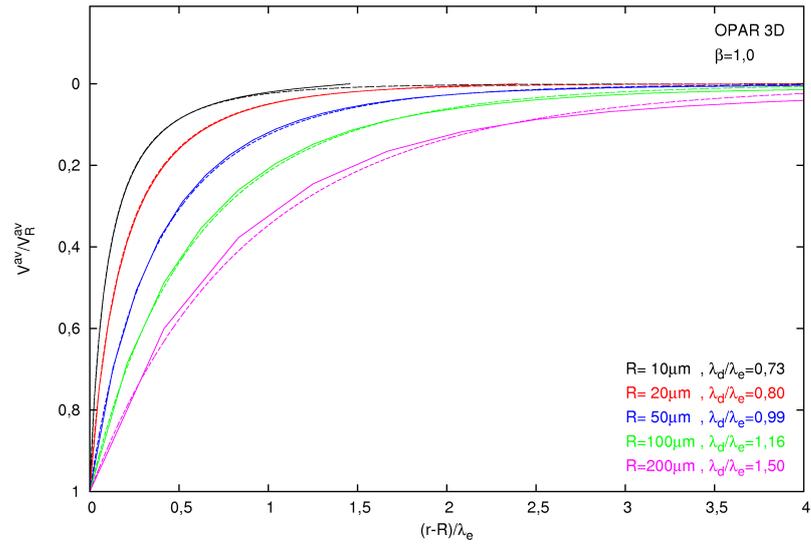


Abbildung 4.11.: Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte  $n_e^{av}$  und  $n_i^{av}$  der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien  $R$  und jeweils drei Temperaturverhältnissen  $\beta$ . Die Dichten wurden alle 1.000 Zeitschritte ausgegeben und die arithmetische Mittelung wurde jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert, die jeweilige Dichte auf die anfänglich angesetzte Plasmadichte von  $n_0 = 6 \cdot 10^{15} / \text{m}^3$ . Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . In größerer Entfernung von der Oberfläche des Staubteilchens ist die Elektronen- und Ionendichte jeweils ungestört sowie gleich groß und entspricht der anfänglichen Plasmadichte. Somit verschwindet im zeitlichen Mittel die Ladungsdichte und das Potenzial auf den letzten Gitterpunkten. Erst in der Nähe der negativ geladenen Oberfläche des Staubteilchens werden die Plasmadichten zunehmend gestört. Die drei jeweils gestrichelten und zum Staubteilchen abfallenden Kurven entsprechen der Elektronendichte, die durchgezogenen Kurven der Ionendichte.

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen



### 4.3. Dreidimensionale Simulationen mit Staubteilchen

Abbildung 4.12.: Der gemittelte radiale Verlauf des Potentials  $V^{\text{av}}$  der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien  $R$  und jeweils drei Temperaturverhältnissen  $\beta$ . Das Potenzial wurde alle 1.000 Zeitschritte ausgegeben und die arithmetische Mittelung wurde jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  und das Potenzial auf das jeweilige gemittelte Oberflächenpotential im Gleichgewicht  $V_R^{\text{av}}$  aus Abbildung 4.10 normiert. Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . Zum Vergleich ist das Debye-Hückel-Potenzial (gestrichelte Linien) nach (2.38) für den entsprechenden Radius gezeigt. Die dabei verwendeten Abschirmmlängen  $\lambda_d$  sind in der Abbildung angegeben und stammen teilweise aus der numerischen Lösung des Oberflächenpotentials im Gleichgewicht gemäß der OM-Theorie, siehe Abschnitt (2.3.3).

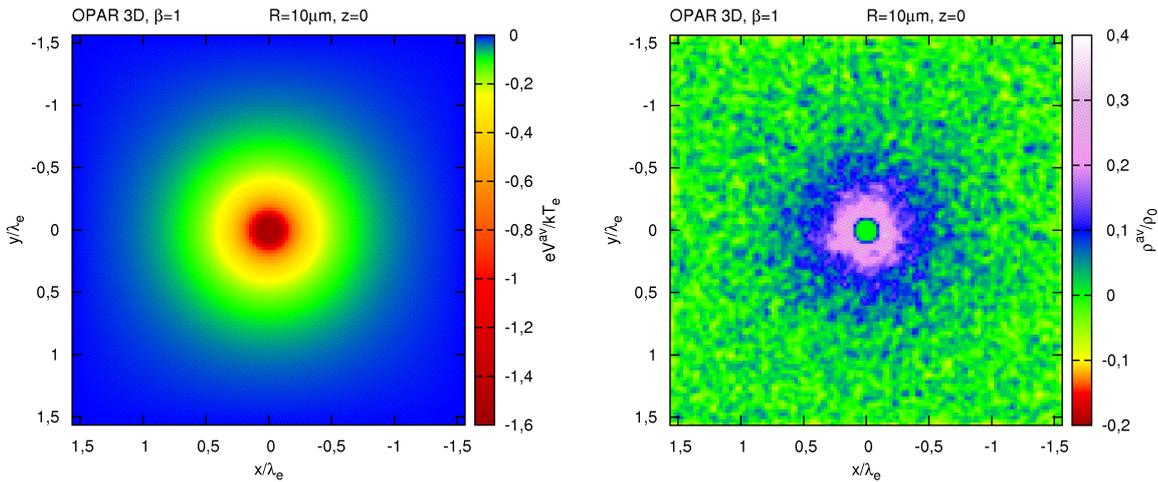


Abbildung 4.13.: Das gemittelte Potenzial  $eV^{\text{av}}/kT_e$  (links) und die Ladungsdichte  $\rho^{\text{av}}/\rho_0$  (rechts) aus der Simulation mit dem Staubteilchenradius  $R = 10 \mu\text{m}$  und  $\beta = 1$ , siehe Tabelle 4.2. Der Abstand vom Mittelpunkt ist jeweils auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert. Es ist die  $x$ - $y$ -Ebene mit  $z = 0$  gezeigt, womit sich ein mittiger Querschnitt durch das würfelförmige Simulationsgebiet mit dem Staubteilchen in der Mitte ergibt. Die arithmetische Mittelung wurde über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Die Ladungsdichte ist auf eine Superteilchenladung pro Gitterzellenvolumen  $\rho_0$  nach (4.7) normiert worden. Das Potenzial bzw. die Ladungsdichte auf den Gitterpunkten innerhalb des Staubteilchens ist auf das Oberflächenpotential im Gleichgewicht (siehe Abbildung 4.10) bzw. gleich Null gesetzt worden.

## 4.4. Zweidimensionale Simulationen mit Staubteilchen

In diesem Abschnitt werden zweidimensionale OPAR-Simulationen mit einem Staubteilchen in der Mitte des ebenen Simulationsgebietes vorgestellt. Insgesamt werden wieder 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien  $R$  und drei Temperaturverhältnissen  $\beta$  diskutiert. Die Plasmadichten sind in allen Simulationen mit  $n_0 = n_e = n_i = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^2$  (hier eine Flächendichte) ebenso gleich angesetzt wie die Elektronentemperatur mit  $kT_e = 1 \text{ eV}$ . Die Ionentemperatur wurde hier zu  $kT_i = 1 \text{ eV}$ ;  $0,5 \text{ eV}$  und  $0,1 \text{ eV}$  gewählt, die zugehörigen Debyelängen sind in Tabelle 4.1 (rechts) angegeben. Abweichend zu den ein- und dreidimensionalen Simulationen ist auf die Ionentemperatur  $kT_i = 0,01 \text{ eV}$  verzichtet worden, da mit sinkender Ionentemperatur das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht für den OML-Fall gegen einen konstanten Wert geht, siehe Abbildung 2.5. Die Oberflächenpotenziale im Gleichgewicht zu den Temperaturen  $kT_i = 0,1 \text{ eV}$  und  $0,01 \text{ eV}$  unterscheiden sich also nicht signifikant, da der Ionenstrom auf ein Staubteilchen bei kleinen Temperaturverhältnissen unabhängig von der Temperatur wird, siehe Abschnitt 2.1.2. Mit kleiner werdender Ionentemperatur sinkt der Ionenstrom auf einen Minimalwert ab, was einen deutlich erhöhten numerischen Aufwand bezüglich der benötigten Zeitschritte bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes bedeutet.

Der numerische Aufwand der zweidimensionalen Simulationen ist im Vergleich zu den dreidimensionalen zwar geringer, aber auch hier ist eine geschickte Wahl der Parameter erforderlich, um den numerischen Aufwand in einem akzeptablen Rahmen zu halten. Der Gitterpunktabstand  $\Delta x$  ist in den Simulationen mit den Radien  $R = 10 \mu\text{m}$ ;  $20 \mu\text{m}$  und  $50 \mu\text{m}$  wieder so gewählt worden, dass das Verhältnis jeweils  $R/\Delta x = 4$  beträgt. In den Simulationen mit den Radien  $R = 100 \mu\text{m}$  und  $200 \mu\text{m}$  wurde dagegen  $R/\Delta x = 5$  angesetzt. Im Falle von  $R/\Delta x = 4$  wird das Oberflächenpotenzial des Staubteilchens im numerischen Gitter durch 24 Gitterpunkte repräsentiert, im Falle von  $R/\Delta x = 5$  durch 20 Gitterpunkte. Während beim größten Staubteilchenradius und Gitterpunktabstand jeweils ein Gitter mit  $251 \cdot 251$  Gitterpunkten ausreichend ist, um die Randbedingung eines verschwindenden Potenzials auf den das Simulationsgebiet berandenden Gitterpunkten ansetzen zu können, ist bei den kleineren Staubteilchenradien in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses teilweise ein größeres Gittersystem angesetzt worden.

In Tabelle 4.3 sind die entsprechenden Simulationsparameter der fünf Simulationen zusammengefasst. Die Zeitschrittweite erfüllt jeweils wieder hinreichend die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung. Die Gitterpunktabstände sind stets in allen zwei Raumrichtungen gleich angesetzt, also  $\Delta x = \Delta y$ . Die Elektronen und Ionen werden durch Superteilchen repräsentiert, welche zu Beginn gemäß einer Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell in das Simulationsgebiet gesetzt wurden. In jede Gitterzelle sind dabei in der jeweiligen Simulation die gleiche Anzahl von Superteilchen räumlich zufällig verteilt worden. Der Betrag der Ladung  $Q_{\text{SP}}$ , die jedes Superteilchen in der Simulation trägt, ergibt sich aus der Plasmadichte:

$$Q_{\text{SP}} = \frac{en_0}{N_{\text{SP}}} (N_x - 1) (N_y - 1) \Delta x^2 \quad . \quad (4.8)$$

$R/\mu\text{m}$	$\Delta x/\mu\text{m}$	$N_x$	$Al/\text{mm}^2$	$\Delta t/\omega_e$	$Q_{\text{SP}}/e$	$N_{\text{SP}}$
10	2,5	351, für $\beta = 1,0$	0,77	0,0025	3.750	1.225.000
		401, für $\beta = 0,5$	1,0			1.600.000
		601, für $\beta = 0,1$	2,25			3.600.000
20	5	351, für $\beta = 1,0$	3,06	0,005	15.000	1.225.000
		401, für $\beta = 0,5$	4,0			1.600.000
		601, für $\beta = 0,1$	9,0			3.600.000
50	12,5	251, für $\beta = 1,0; 0,5$	9,8	0,0125	73.242	800.000
		401, für $\beta = 0,1$	25,0			2.048.000
100	20	251, für $\beta = 1,0; 0,5$	25,0	0,02	120.000	1.250.000
		351, für $\beta = 0,1$	49,0			2.450.000
200	40	251, für alle $\beta$	100,0	0,04	192.000	3.125.000

Tabelle 4.3.: Parameter zu 15 verschiedenen 2D-OPAR-Simulationen. Angegeben ist der Staubteilchenradius  $R$ , der Gitterpunktabstand  $\Delta x = \Delta y$ , die Gitterpunktanzahl  $N_x = N_y$ , die Fläche des physikalischen Simulationsgebietes  $Al$  (inkl. Staubteilchen), die Zeitschrittweite  $\Delta t$ , der Betrag der Superteilchenladung  $Q_{\text{SP}}$  sowie die anfängliche Anzahl der Superteilchen  $N_{\text{SP}}$ . Für die drei kleinsten Radien gilt das Verhältnis  $R/\Delta x = 4$ , für die beiden größten Radien  $R/\Delta x = 5$ . Weiterhin gilt in allen Simulationen  $m_i/m_e = 100$ ,  $n_0 = n_e = n_i = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^2$  (Flächendichte) und  $kT_e = 1 \text{ eV}$ , womit  $\lambda_e = 95,98 \mu\text{m}$  und  $\omega_e = 4,37 \cdot 10^9/\text{s}$  folgt. Die jeweiligen Debyelängen  $\lambda_i$  und  $\lambda_l$  sind in Tabelle 4.1 (rechts) angegeben.

Die Ladungen  $Q_{\text{SP}}$  für die entsprechenden Simulationen sind ebenfalls in Tabelle 4.3 angegeben.

#### 4.4.1. Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht

Abbildung 4.14 zeigt den zeitlichen Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  in den 15 Simulationen mit den fünf Staubteilchenradien  $R$  für die drei Temperaturverhältnisse  $\beta$ . Zu Beginn wurde das Oberflächenpotenzial bzw. die Ladung der Staubteilchen gleich Null gesetzt. Erwartungsgemäß laden sich sämtliche Staubteilchen im Verlauf der Simulation negativ auf, bis das Oberflächenpotenzial ab jeweils ca. der Hälfte der Simulationsdauer den Gleichgewichtszustand erreicht hat.

Im Gegensatz zu den ein- und dreidimensionalen Simulationen fällt der Betrag des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht mit sinkender Iontemperatur nicht geringer, sondern jeweils höher aus. Eine Ausnahme bilden nur die Oberflächenpotenziale beim größten Radius von  $R = 200 \mu\text{m}$ , welche nahezu identisch ausfallen. Deutlich zu erkennen ist, dass im Vergleich zu den beiden Temperaturverhältnissen  $\beta = 1,0$  und  $0,5$  bei  $\beta = 0,1$  jeweils wesentlich mehr Zeitschritte bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes notwendig sind. Denn wie bereits oben erwähnt, sinkt mit kleiner werdender Iontemperatur der Ionenstrom auf ein Staubteilchen, weshalb deutlich mehr Zeitschritte bis zum Erreichen eines Gleichgewichtszustandes notwendig sind.

Für kleine Radien im Vergleich zu den entsprechenden Debyelängen zeigt sich wieder eine gute Übereinstimmung mit dem Oberflächenpotenzial aus der OML-Theorie, siehe

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

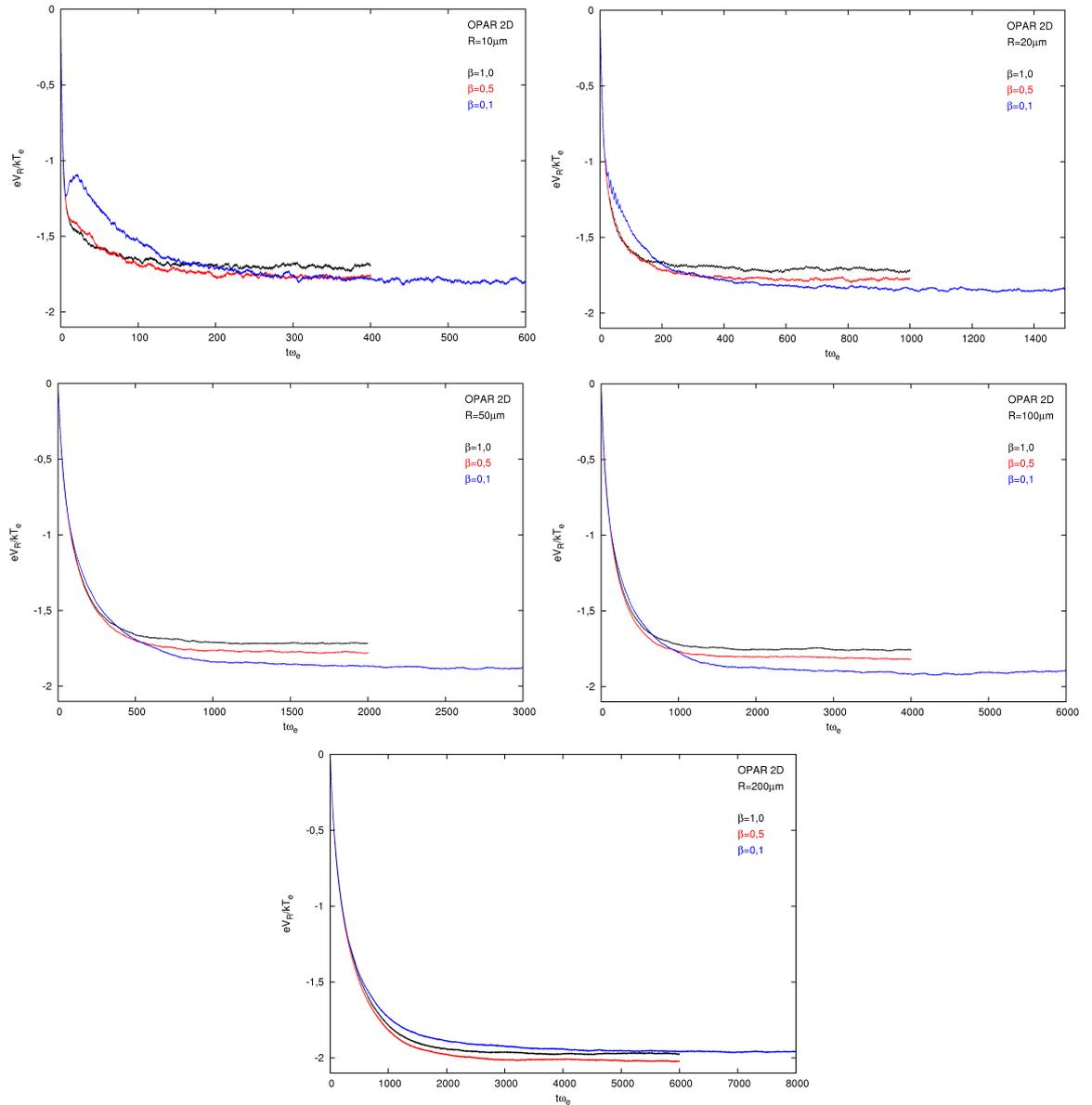


Abbildung 4.14.: Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  in den insgesamt 15 Simulationen mit fünf verschiedenen Staubteilchenradien  $R$  bei jeweils drei Temperaturverhältnissen  $\beta$ . Die weiteren Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.3 angegeben. Das Oberflächenpotenzial wurde alle zehn Zeitschritte ausgegeben und auf die Plasmafrequenz der Elektronen  $\omega_e$  normiert. Zu Beginn wurde das Oberflächenpotenzial bzw. die Ladung der Staubteilchen gleich Null gesetzt. Die Staubteilchen laden sich im Verlauf der Simulation negativ auf, bis das Oberflächenpotenzial einen Gleichgewichtszustand erreicht hat.

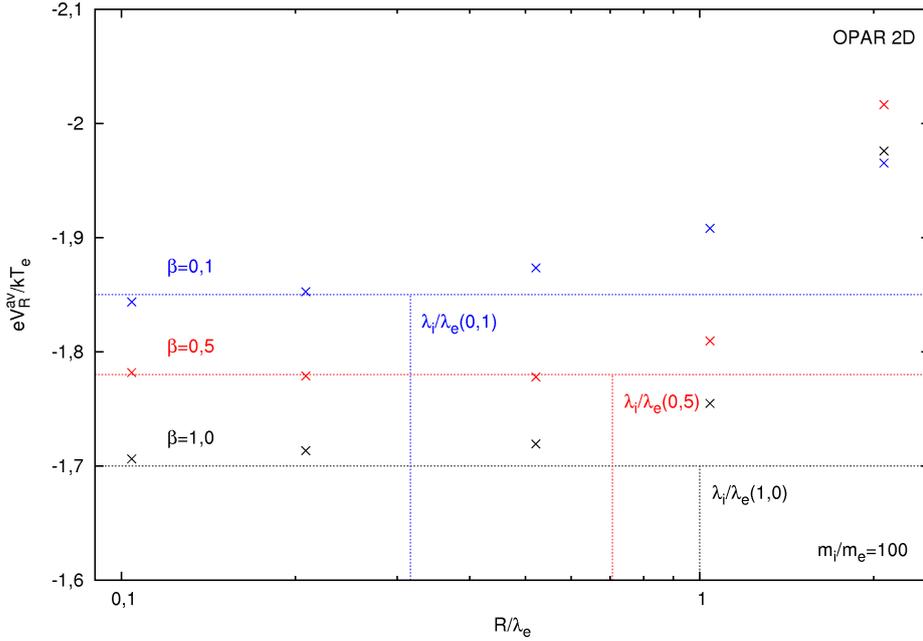


Abbildung 4.15.: Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{\text{av}}/kT_e$  (farbige Kreuze) im Gleichgewicht von insgesamt 15 Simulationen für fünf verschiedene Staubteilchenradien  $R$  und drei Temperaturverhältnissen  $\beta = T_i/T_e$ . Die Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.3 angegeben. Die gestrichelten, horizontalen Linien zeigen die Oberflächenpotenziale, wie sie sich aus der OML-Theorie ergeben. Die vertikalen Linien zeigen die Debyelängen der Ionen und bestimmen somit den Übergang zwischen dem OML- und dem OM-Fall. Die bestimmten Oberflächenpotenziale enthalten alle aufgrund der Gitterpunktauflösung und dem sich damit ergebenden Verhältnis  $R/\Delta x$  einen systematischen Fehler von ca.  $\pm 1,2\%$ .

hierzu Abbildung 4.15. Der Verlauf des Oberflächenpotenzials gemäß einer gedämpften Schwingung tritt im zweidimensionalen Fall bereits bei einer Ionentemperatur von  $kT_i = 0,1 \text{ eV}$  auf, wobei mit zunehmendem Staubteilchenradius die Amplitude abnimmt. Dieses Verhalten wird durch die relativ geringe kinetische Energie der Ionen verursacht und trat bereits in den ein- und dreidimensionalen Simulationen auf und wurde im Abschnitt 4.2 diskutiert.

Abbildung 4.15 zeigt das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{\text{av}}/kT_e$  im Gleichgewicht der insgesamt 15 2D-OPAR-Simulationen. Die arithmetische Mittelung wurde dabei jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Die zugehörigen Standardabweichungen liegen im Bereich von  $10^{-2}$  und fallen damit zwar größer aus als im ein- und dreidimensionalen Fall, sind aber immer noch relativ klein. Die gestrichelten, horizontalen Linien zeigen die drei Oberflächenpotenziale, wie sie sich aus der OML-Theorie (siehe Abbildung 2.5) ergeben. Die vertikalen Linien zeigen die entsprechenden Debyelängen der Ionen und bestimmen somit den Übergang zwischen dem OML- und dem OM-Fall. Für kleine Radien im Vergleich zu den Debyelängen ergibt sich eine sehr gute Über-

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

einstimmung des gemittelten Oberflächenpotenzials mit dem aus der OML-Theorie, die Abweichung beträgt stets weniger als 1,2% und ist damit deutlich geringer als in den 3D-OPAR-Simulationen.

Aus dem Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht lässt sich analog zu (3.43) wieder die Ladung der Staubteilchen bestimmen. Ausgehend vom Kapazitätswert  $C = 4\pi\epsilon_0 R$  im Vakuum nimmt das Staubteilchen mit dem Radius  $R = 200 \mu\text{m}$  bei  $\beta = 0,5$  die größte Ladung aus den 15 Simulationen an, die kleinste das Staubteilchen mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  bei  $\beta = 1,0$ . Die Ladungen betragen hier  $Q_{200}^{\text{av}} = 280.111,46 e$  und  $Q_{10}^{\text{av}} = 11.886,88 e$ . Wie im Abschnitt für die eindimensionalen Simulationen bereits diskutiert, stellen die angegebenen Gleichgewichtsladungen nur eine Näherung dar.

Die Rechnerlaufzeit der zweidimensionalen OPAR-Simulationen hängt wie die dreidimensionalen stark von der Gittergröße, der Anzahl der Superteilchen, vom Gitterpunktstand sowie von der Zeitschrittweite ab. Mit einem Intel Core I7 - 3770K 4x3,5 GHz Prozessor in paralleler Rechnung benötigen  $10^5$  Zeitschritte in einem Gittersystem mit  $251 \cdot 251$  Gitterpunkten (siehe Tabelle 4.3) zwischen ca. 6 und 16 Stunden. Die Simulation mit dem größten Gittersystem von  $601 \cdot 601$  Gitterpunkten benötigt mit dem kleinsten Gitterpunktstand und der kleinsten Zeitschrittweite für  $10^5$  Zeitschritte ca. 10 Stunden.

#### 4.4.2. Verlauf der Ionen- und Elektronendichte

In Abbildung 4.16 ist der gemittelte radiale Verlauf der Elektronen- und Ionendichte  $n_e^{\text{av}}$  und  $n_i^{\text{av}}$  der 15 Simulationen gezeigt. Die jeweiligen Teilchendichten sind dabei alle 1.000 Zeitschritte innerhalb konzentrischer Kreisringe in Bezug auf das Staubteilchen bestimmt und ausgegeben worden. Die Breite der Kreisringe wurde für die zwei kleinsten Staubteilchenradien jeweils gleich dem Gitterpunktstand gesetzt, für die drei größten Radien wurde  $5 \mu\text{m}$  bzw.  $10 \mu\text{m}$  gewählt, um eine höhere Auflösung zu erhalten. Die arithmetische Mittelung wurde wieder jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand, wodurch die Fluktuationen aufgrund der thermischen Verteilungsfunktion der Plasmateilchen weitgehend herausgefiltert sind. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert, die Dichte jeweils auf die anfänglich angesetzte Plasmadichte  $n_0$ . Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ .

In größerer Entfernung von der Oberfläche des Staubteilchens ist die Elektronen- und Ionendichte jeweils ungestört sowie gleich groß und entspricht der anfänglichen Plasmadichte  $n_0$ . Somit verschwindet im zeitlichen Mittel die Ladungsdichte und das Potenzial auf den letzten Gitterpunkten. In der Nähe der negativ geladenen Oberfläche des Staubteilchens werden die Dichten zunehmend gestört. Die drei jeweils gestrichelten und zum Staubteilchen abfallenden Kurven entsprechen dabei der Elektronendichte, die durchgezogenen Kurven der Ionendichte. Zu erkennen ist, dass die Elektronendichte in allen Simulationen in der unmittelbaren Umgebung des Staubteilchens auf ca. 10% der Plasmadichte  $n_0$  abfällt. Im Gegensatz zu den 1D- bzw. 3D-Simulationen fallen die Elektronendichten hier unabhängig vom Temperaturverhältnis insbesondere bei den größeren Staubteilchenradien in etwa schnell gleich ab, was darauf zurückzuführen ist, dass

sich im zweidimensionalen Fall die Oberflächenpotenziale im Gleichgewicht bei den drei gewählten Temperaturverhältnissen nur jeweils um ca.  $0,08 kT_e/e$  unterscheiden.

Für die Radien  $R = 10 \mu\text{m}$  und  $20 \mu\text{m}$ , welche deutlich kleiner als die Debyelänge der Elektronen ausfallen, steigt die Ionendichte in der Umgebung des Staubteilchens jeweils deutlich über  $n_0$  an. Dieser Anstieg steht im Gegensatz zum Dichteverlauf an einer ebenen Plasmawand, wie im Abschnitt 4.2 beschrieben wurde. Zu beachten ist, dass die Ionendichte ab dem Radius von  $R = 20 \mu\text{m}$  bereits leicht unter die anfängliche Dichte  $n_0$  fällt und das Maximum ab dem Radius  $R = 50 \mu\text{m}$  für das Temperaturverhältnis von  $\beta = 1,0$  unterhalb von  $n_0$  liegt. In den 1D- bzw. 3D-Simulationen ist dies erst der Fall, wenn der Radius deutlich größer als die Debyelänge der Elektronen ausfällt, also bei  $R = 200 \mu\text{m}$ , siehe Abbildung 4.7 bzw. 4.11. Zudem sind die Dichteverläufe in den 2D-Simulationen bereits ab dem Radius  $R = 100 \mu\text{m}$  nahezu identisch. Entgegen dem Dichteverlauf in den 1D- bzw. 3D-Simulationen geht der Verlauf hier bereits bei kleinen Radien in den charakteristischen Verlauf nahe einer ebenen Plasmawand über.

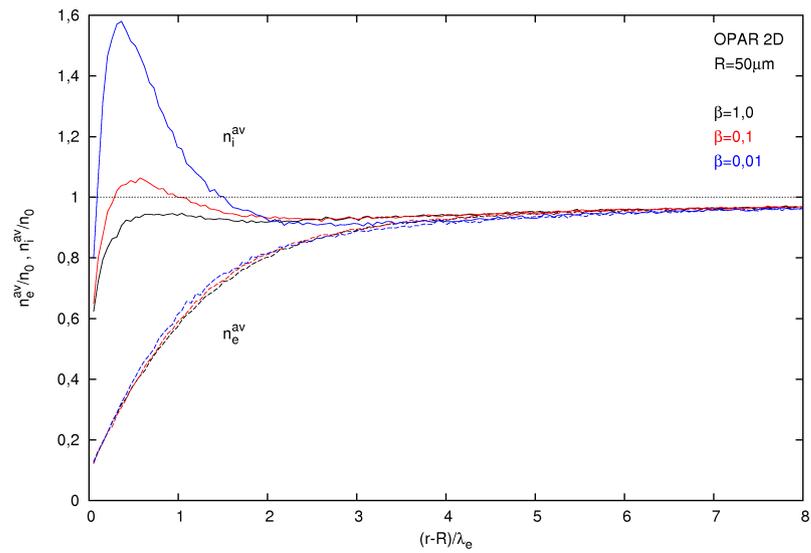
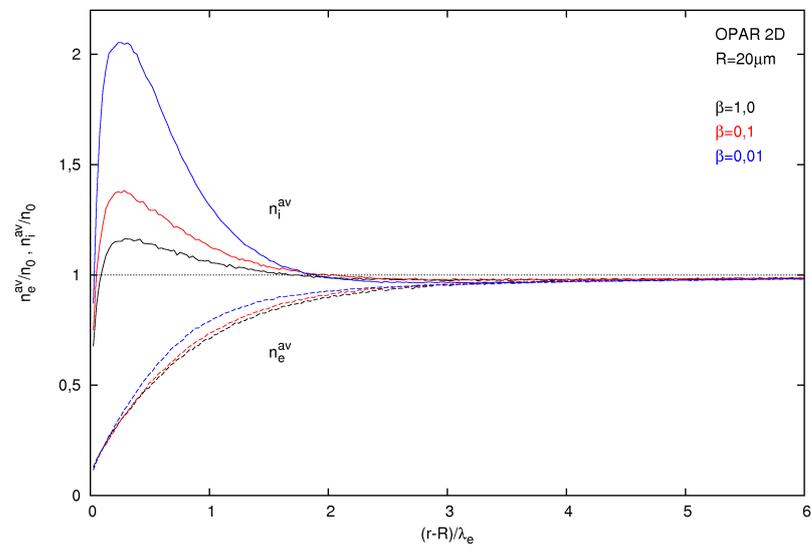
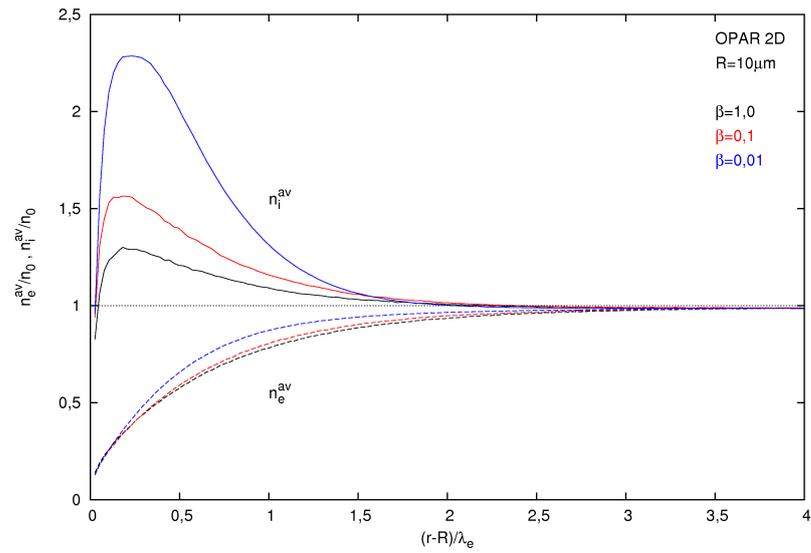
### 4.4.3. Verlauf des Potenzialprofils

In Abbildung 4.17 sind die radialen, gemittelten Potenzialprofile der jeweils 15 Simulationen gezeigt. Die Mittelung der Profile wurde dabei wie folgt durchgeführt: In den 2D-OPAR-Simulationen stimmen stets insgesamt vier Gitterpunkte des kartesischen Gittersystems mit der Oberfläche des Staubteilchens überein (siehe Abschnitt 3.3.2). Ausgehend von einem solchen Gitterpunkt sind vier radiale Potenzialprofile in Bezug auf den Mittelpunkt des Staubteilchens bis zum letzten Gitterpunkt am Simulationsrand aus dem Gittersystem ausgelesen worden. Dabei wurden die Profile jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer arithmetisch gemittelt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Diese vier zeitlich gemittelten Profile sind dann noch einmal zu einem Profil gemittelt worden. Der Abstand  $r - R$  von der Oberfläche des Staubteilchens am linken Rand ist auf die Debyelänge der Elektronen und das Potenzial auf das jeweilige gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht aus Abbildung 4.15 normiert. Der Potenzialverlauf ist bis zu einem Abstand von vier Debyelängen dargestellt. Zum Vergleich ist jeweils der Potenzialverlauf (gestrichelte Linien) des zylindersymmetrischen Falls nach (2.48) für den entsprechenden Radius gezeigt. Die dabei verwendeten Abschirmlängen  $\lambda_d$  sind in der Abbildung angegeben.

Allerdings kann lediglich für den kleinsten Radius von  $R = 10 \mu\text{m}$  bei den Temperaturverhältnissen  $\beta = 1,0$  und  $0,5$  eine gute Approximation erreicht werden. Ähnlich wie in den 1D- und 3D-Simulationen fällt das Oberflächenpotenzial für die größeren Radien für kleine Abstände stets schneller und für größere Abstände stets langsamer ab als das zylindersymmetrische Potenzial. Denn durch die auftretenden Potenzialbarrieren bei größeren Radien und den damit verbundenen Ionenbahnen wird die Abschirmung des Oberflächenpotenzials zunehmend nichtlinear, wodurch sich das Potenzialprofil nicht mehr durch (2.48) darstellen lässt, welches wie das Debye-Hückel-Potenzial aus der linearisierten Poissongleichung mit einer entsprechenden Abschirmlänge folgt [59].

Im Vergleich zu den Abbildungen 4.8 bzw. 4.12 der 1D- bzw. 3D-Simulationen fällt das Potenzial in den 2D-Simulationen stets deutlich langsamer ab, da der Betrag des Ober-

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen



#### 4.4. Zweidimensionale Simulationen mit Staubteilchen

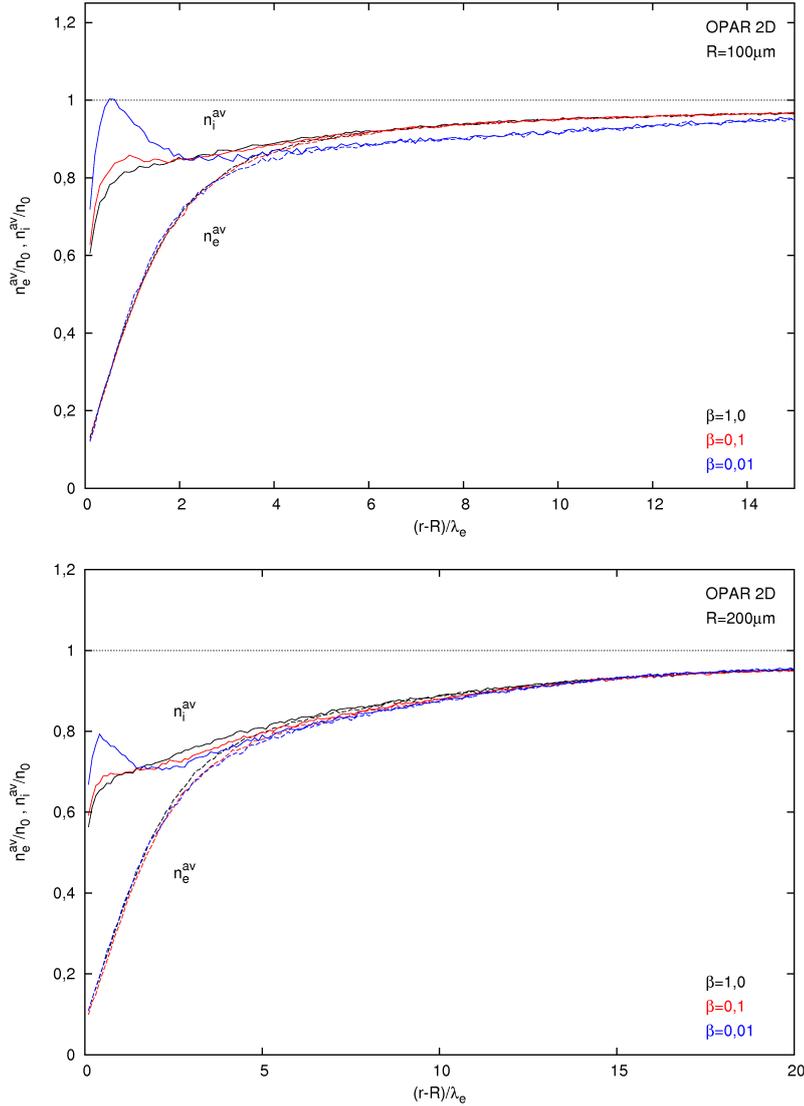
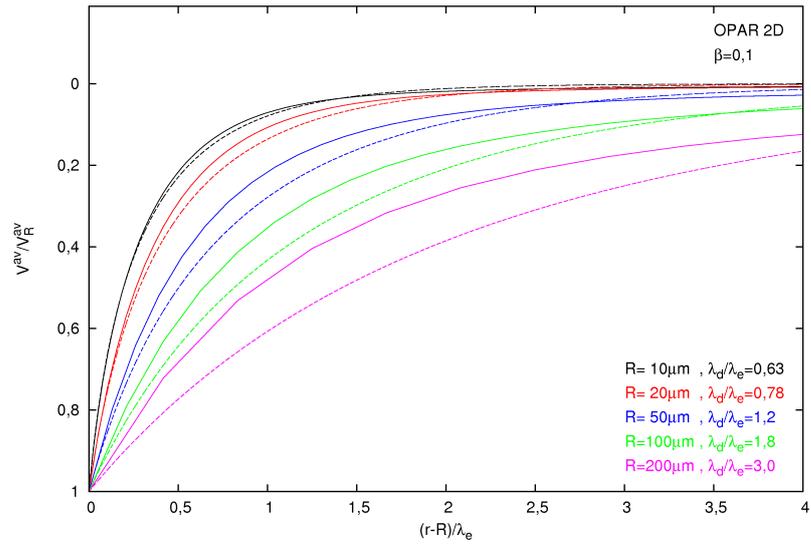
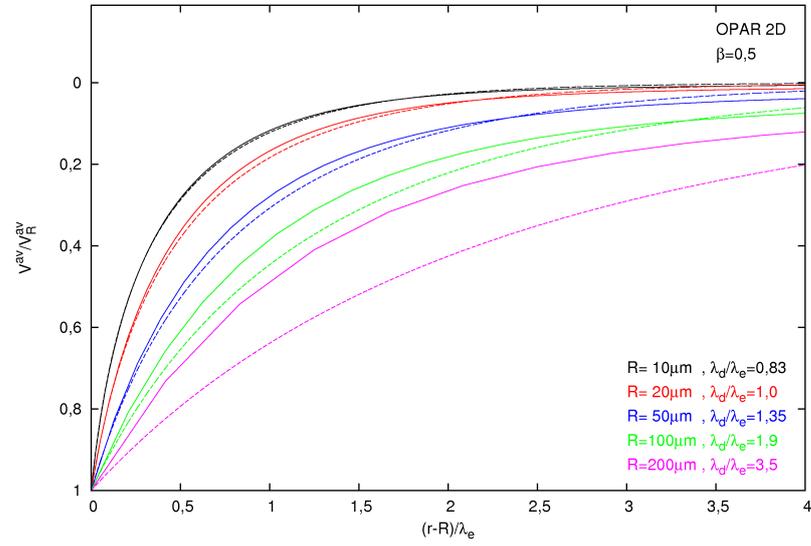
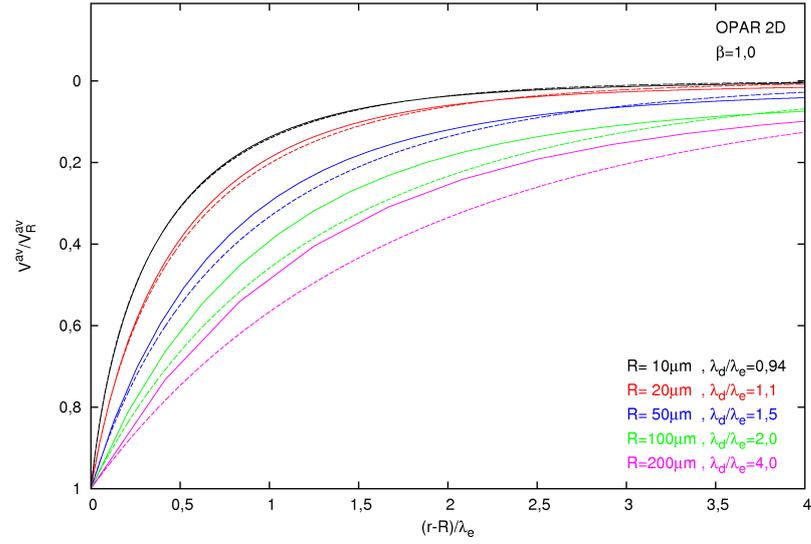


Abbildung 4.16.: Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte  $n_e^{av}$  und  $n_i^{av}$  der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien  $R$  und jeweils drei Temperaturverhältnissen  $\beta$ . Die Dichten wurden alle 1000 Zeitschritte ausgegeben und die arithmetische Mittelung wurde jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert, die jeweilige Dichte auf die anfänglich angesetzte Plasmadichte von  $n_0 = 6 \cdot 10^{15}/\text{m}^3$ . Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . In größerer Entfernung von der Oberfläche des Staubteilchens ist die Elektronen- und Ionendichte jeweils ungestört sowie gleich groß und entspricht der anfänglich Plasmadichte. Somit verwindet im zeitlichen Mittel die Ladungsdichte und das Potenzial auf den letzten Gitterpunkten. Erst in der Nähe der negativ geladenen Oberfläche des Staubteilchens werden die Plasmadichten zunehmend gestört. Die drei jeweils gestrichelten und zum Staubteilchen abfallenden Kurven entsprechen der Elektronendichte, die durchgezogenen Kurven der Ionendichte.

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen



#### 4.4. Zweidimensionale Simulationen mit Staubteilchen

Abbildung 4.17.: Der gemittelte radiale Verlauf des Potentials  $V^{\text{av}}$  der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien  $R$  und jeweils drei Temperaturverhältnissen  $\beta$ . Das Potential wurde alle 1000 Zeitschritte ausgegeben und die arithmetische Mittelung wurde jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  und das Potential auf das jeweilige gemittelte Oberflächenpotential im Gleichgewicht  $V_R^{\text{av}}$  normiert. Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . Zum Vergleich ist der Potenzialverlauf für den zylindersymmetrischen Fall nach (2.48) für den entsprechenden Radius gezeigt. Die dabei verwendeten Abschirmlängen  $\lambda_D$  sind in der Abbildung angegeben.

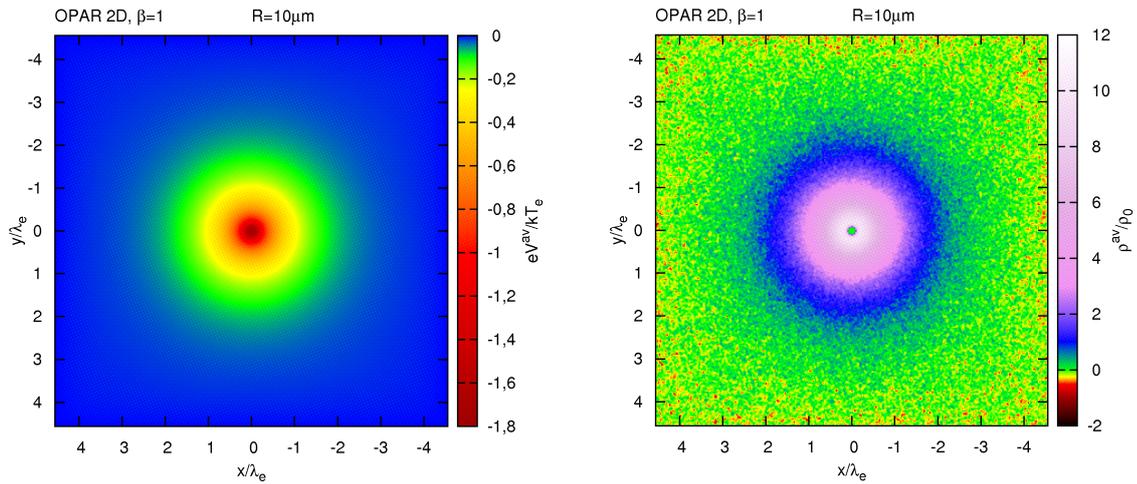


Abbildung 4.18.: Das gemittelte Potential  $eV^{\text{av}}/kT_e$  (links) und die Ladungsdichte  $\rho^{\text{av}}/\rho_0$  (rechts) aus der Simulation mit dem Staubteilchenradius  $R = 10 \mu\text{m}$  und  $\beta = 1$ , siehe Tabelle 4.3. Der Abstand vom Mittelpunkt ist jeweils auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert. Es ist das gesamte Simulationsgebiet mit dem Staubteilchen in der Mitte gezeigt. Die arithmetische Mittelung wurde über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt, in welcher sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Die Ladungsdichte ist auf eine Superteilchenladung pro Gitterzellenfläche  $\rho_0$  nach (4.9) normiert worden. Das Potential bzw. die Ladungsdichte auf den Gitterpunkten innerhalb des Staubteilchens ist auf das Oberflächenpotential im Gleichgewicht (siehe Abbildung 4.15) bzw. gleich Null gesetzt worden.

#### 4. OPAR-Simulationen von staubigen Plasmen

flächenpotenzials im Gleichgewicht im zweidimensionalen Fall jeweils größer ausfällt als im dreidimensionalen Fall. Das Potenzial fällt für die kleine Radien umso langsamer ab, je höher das Temperaturverhältnis ausfällt, was mit dem Dichteverlauf der Ionen aus Abbildung 4.16 korreliert. Denn je „dicker“ der Mantel (Sheath) aus Ionen um das Staubteilchen herum ausfällt, desto schneller muss das Oberflächenpotenzial entsprechend abfallen.

In Abbildung 4.18 ist das gemittelte Potenzial (links) und die Ladungsdichte (rechts) aus der Simulation mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  und  $\beta = 1$  gezeigt. Wieder wurde die arithmetische Mittelung über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt. Die Ladungsdichte ist dabei auf eine Superteilchenladung pro Gitterzellenfläche normiert worden:

$$\rho_0 = \frac{Q_{\text{SP}}}{\Delta x^2} \quad . \quad (4.9)$$

Deutlich zu erkennen ist der rotationssymmetrische Verlauf des Potenzials und der Ladungsdichte im kartesischen Gitter um das Staubteilchen in der Mitte des Simulationsgebietes, wobei in den äußeren Randbereichen das Potenzial und die Ladungsdichte jeweils verwindet. Das Potenzial bzw. die Ladungsdichte auf den Gitterpunkten innerhalb des Staubteilchens ist auf das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht (siehe Abbildung 4.15) bzw. gleich Null gesetzt worden.

# 5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen

In diesem Kapitel werden OPAR-Simulationen eines Magnetoplasmas mit einem Staubteilchen vorgestellt und diskutiert. Das Magnetoplasma wird durch die Überlagerung des gesamten Simulationsgebietes mit einem homogenen und konstanten Magnetfeld in  $z$ -Richtung erzeugt. Ansonsten sind die gleichen Simulationsparameter angesetzt worden wie im letzten Kapitel. Die Elektronen und Ionen werden im Magnetfeld auf Spiralbahnen (Gyrationsbewegung) um die Magnetfeldlinien gezwungen, wobei der Gyrationradius neben der magnetischen Flussdichte von der Ladung und Masse sowie der Geschwindigkeit des Teilchens senkrecht zum Magnetfeld abhängt, siehe Abschnitt 2.4.1. In OPAR wird der Term der magnetischen Lorentzkraft in der Bewegungsgleichung numerisch nicht direkt integriert, sondern der Ort des Teilchens im nächsten Zeitschritt rein geometrisch bestimmt, wie im Abschnitt 3.5 diskutiert wurde. In den Simulationen wird die konstante magnetische Flussdichte durch die Vorgabe des wahrscheinlichsten Gyrationradius der Elektronen in einer Maxwellverteilung der Geschwindigkeit bestimmt. Die magnetische Flussdichte hat in der Simulation keinen Einfluss auf die Ladung des Staubteilchens, lediglich die Ladungsströme von Elektronen und Ionen werden beeinflusst.

## 5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen

In diesem Abschnitt werden dreidimensionale OPAR-Simulationen eines Magnetoplasmas mit einem Staubteilchen in der Mitte des würfelförmigen Simulationsgebietes vorgestellt. Es wurden die gleichen Parameter angesetzt wie in den Simulationen ohne ein Magnetfeld, siehe Tabelle 4.2. In den Simulationen wurde ein homogenes und konstantes Magnetfeld  $B_z$  in  $z$ -Richtung überlagert, welches sich durch die Vorgabe des wahrscheinlichsten Gyrationradius der Elektronen gemäß

$$B_z = \sqrt{\frac{m_e k T_e}{2}} \frac{1}{e r_{ge}^{mp}} \quad (5.1)$$

bestimmt, siehe Gleichung (2.51). Die dazu gehörige Gyrationfrequenz der Elektronen lautet nach Gleichung (2.50):

$$\omega_{ge} = \frac{e B_z}{m_e} \quad . \quad (5.2)$$

## 5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen

$r_{\text{ge}}^{\text{mp}}/\mu\text{m}$	$r_{\text{gi}}^{\text{mp}}(1,0)/\mu\text{m}$	$r_{\text{gi}}^{\text{mp}}(0,1)/\mu\text{m}$	$r_{\text{gi}}^{\text{mp}}(0,01)/\mu\text{m}$	$B_z/\text{T}$	$\omega_{\text{ge}} \cdot \text{s}/10^8$
400	4.000	1264,8	400	0,00425	7,43
200	2.000	632,4	200	0,0085	14,9
100	1.000	316,2	100	0,017	29,7
50	500	158,1	50	0,034	59,4
20	200	63,24	20	0,085	149
10	100	31,62	10	0,17	297
5	50	15,81	5	0,34	594
1	10	3,16	1	1,69	2.970
0,1	1,0	0,32	0,1	16,9	29.700
0,01	0,1	0,03	0,01	169	297.000

Tabelle 5.1.: *Parameter der 3D-OPAR-Simulationen eines Magnetoplasmas. Es wurden zehn verschiedene wahrscheinlichste Gyrationenradien  $r_{\text{ge}}^{\text{mp}}$  der Elektronen angesetzt. Angegeben sind die dazu gehörigen wahrscheinlichsten Gyrationenradien der Ionen  $r_{\text{gi}}^{\text{mp}}(\beta)$  nach (5.3), die magnetische Flussdichte  $B_z$  nach (5.1) und die Gyrationenfrequenz der Elektronen  $\omega_{\text{ge}}$  nach (5.2). Es ist wieder ein Massenverhältnis von  $m_i/m_e = 100$  sowie eine Elektronentemperatur von  $kT_e = 1 \text{ eV}$  angesetzt worden.*

Der wahrscheinlichste Gyrationenradius der Ionen ergibt sich zu

$$r_{\text{gi}}^{\text{mp}} = r_{\text{ge}}^{\text{mp}} \sqrt{\beta \frac{m_i}{m_e}}, \quad (5.3)$$

siehe Gleichung (2.53). Es sind insgesamt 140 Simulationen mit zehn verschiedenen magnetischen Flussdichten durchgeführt worden. In Tabelle 5.1 sind die wahrscheinlichsten Gyrationenradien der Elektronen und Ionen sowie die zugehörigen magnetischen Flussdichten angegeben. Simulationen mit  $r_{\text{ge}}^{\text{mp}} = 0,01 \mu\text{m}$  sind nur beim größten Temperaturverhältnis  $\beta = 1,0$  durchgeführt worden, siehe nächster Abschnitt.

### 5.1.1. Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht

Abbildung 5.1 zeigt den zeitlichen Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  für vier verschiedene Simulationen mit dem Staubteilchenradius  $R = 200 \mu\text{m}$  bei  $\beta = 1,0$ . Die dabei angesetzten wahrscheinlichsten Gyrationenradien der Elektronen sind angegeben. Zum Vergleich ist der Verlauf des Oberflächenpotenzials für den Fall ohne Magnetfeld aus Abbildung 4.9 dargestellt. Mit kleiner werdendem Gyrationenradius der Elektronen nimmt das Oberflächenpotenzial vom Betrag her zu, wobei die Anzahl der benötigten Zeitschritte bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes wächst, da mit stärker werdendem Magnetfeld die Ladungsströme auf das Staubteilchen kleiner werden, wie im Abschnitt 2.4.2 diskutiert wurde. Für die Simulationen mit den vier anderen Staubteilchenradien ergeben sich ähnliche zeitliche Verläufe des Oberflächenpotenzials.

Abbildung 5.2 zeigt das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{\text{av}}/kT_e$  im Gleichgewicht von insgesamt 75 3D-OPAR-Simulationen eines Magnetoplasmas. Es sind jeweils fünf verschiedene Gyrationenradien der Elektronen bei den fünf Staubteilchenradien sowie

## 5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen

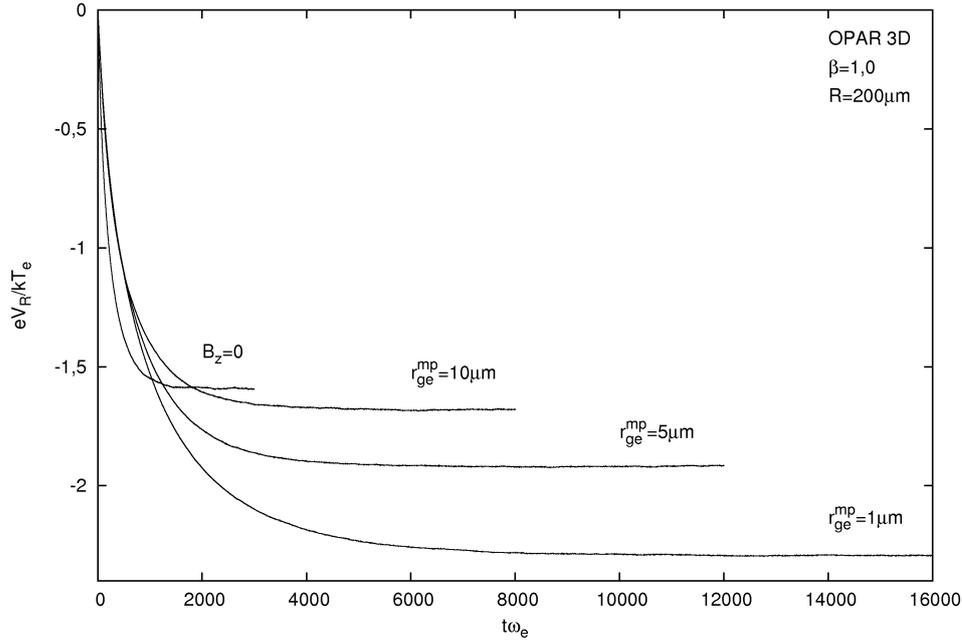


Abbildung 5.1.: Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials  $eV_R/kT_e$  für drei Simulationen eines Magnetoplasmas mit  $\beta = 1,0$  und dem Staubteilchenradius  $R = 200 \mu\text{m}$ . Die dabei angesetzten wahrscheinlichsten Gyrationradien der Elektronen  $r_{ge}^{\text{mp}}$  sind angegeben. Zum Vergleich ist der Verlauf des Oberflächenpotenzials für den Fall ohne Magnetfeld aus Abbildung 4.9 dargestellt. Die weiteren Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.2 sowie 5.1 angegeben. Das Oberflächenpotenzial wurde alle zehn Zeitschritte ausgegeben und auf die Plasmfrequenz der Elektronen  $\omega_e$  normiert.

den drei Temperaturverhältnissen gezeigt. Zum Vergleich sind die Oberflächenpotenziale aus Abbildung 4.10 für den Fall ohne ein Magnetfeld dargestellt (schwarze Kreuze). Die gepunktete, horizontale Linie OML  $B = 0$  gibt jeweils das Oberflächenpotenzial an, welches sich aus der OML-Theorie ohne ein Magnetfeld ergibt. Die gepunktete, horizontale Linie OML  $B_i$  gibt dagegen jeweils das Oberflächenpotenzial aus der OML-Theorie für ein Magnetfeld  $B_i$  aus Gleichung (2.77) an (siehe Abbildung 2.16), welche den Fall von magnetisierten Elektronen und Ionen mit der Bedingung  $\gamma_e, \gamma_i > 1,0$  beschreibt. Die vertikalen Linien zeigen die entsprechenden Debyelängen der Ionen und bestimmen somit den Übergang zwischen dem OML- und dem OM-Fall (ohne Magnetfeld). Mit kleiner werdendem Gyrationradius  $r_{ge}^{\text{mp}}$ , also mit stärker werdendem magnetischen Fluss  $B_z$ , nimmt das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht bei allen Staubteilchenradien vom Betrag her zu. Eine signifikante Änderung der Oberflächenpotenziale tritt jedoch unabhängig vom Temperaturverhältnis erst ein, wenn der wahrscheinliche Gyrationradius der Elektronen deutlich kleiner als die Debyelänge  $\lambda_e$  ist. Außerdem fällt die jeweilige Zunahme der Oberflächenpotenziale in Abhängigkeit des Gyrationradius für die verschiedenen Staubteilchenradien unterschiedlich aus. Im Vergleich zum Fall ohne Magnetfeld nimmt beispielsweise das Oberflächenpotenzial bei  $\beta = 1,0$  und  $r_{ge}^{\text{mp}} = 1,0 \mu\text{m}$  für den Radius

## 5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen

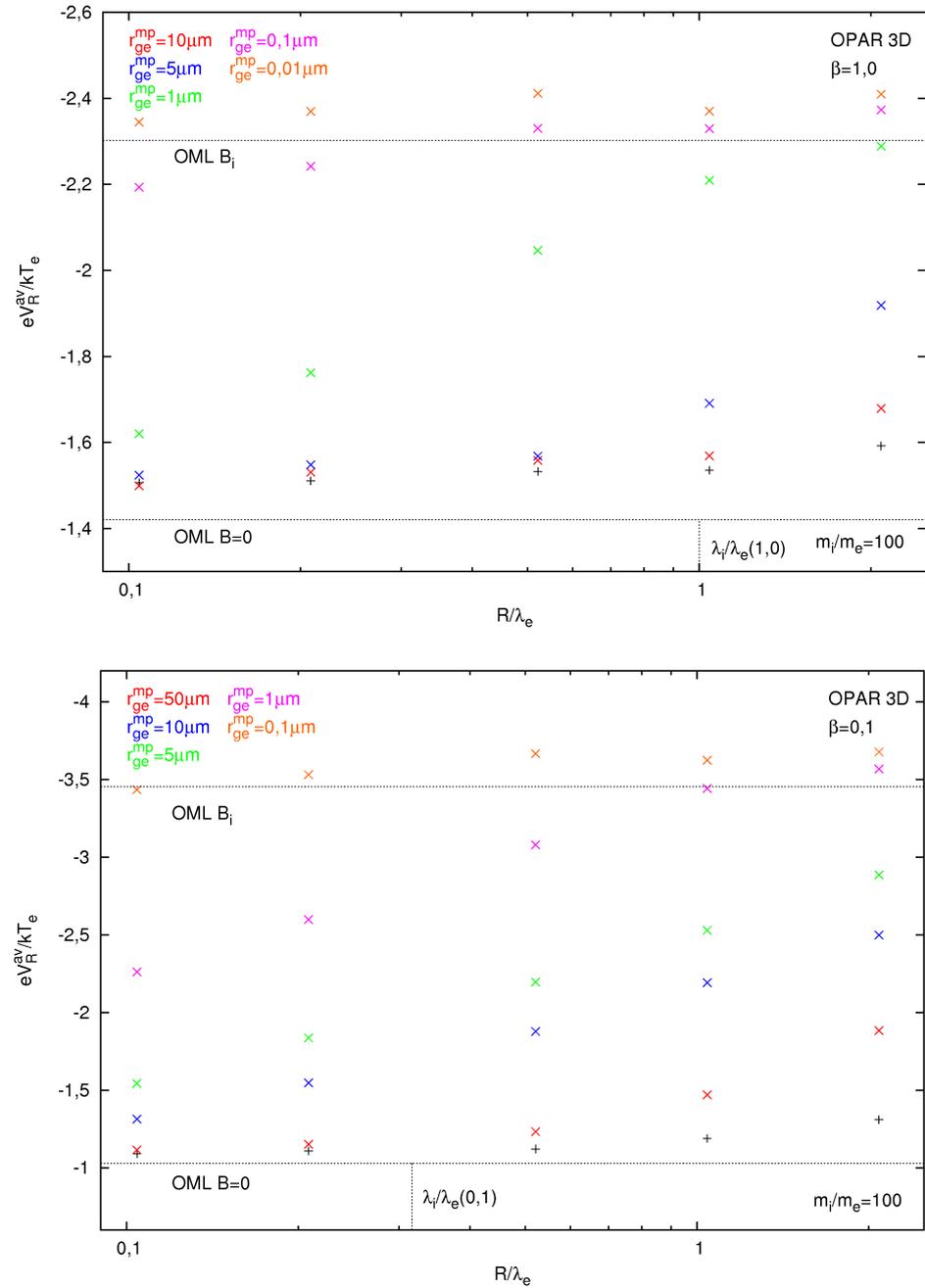
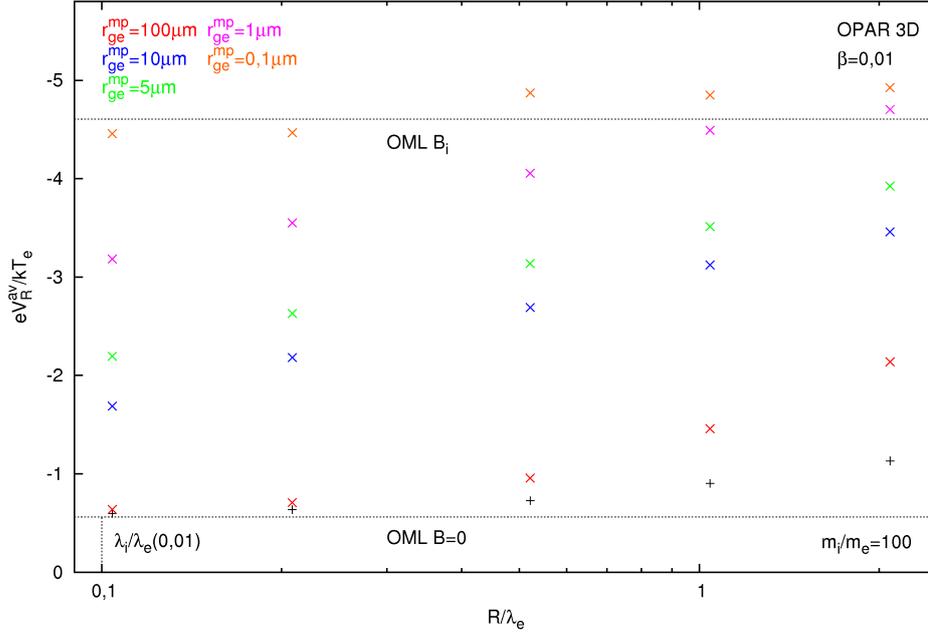


Abbildung 5.2.: Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{av}/kT_e$  (farbige Kreuze) im Gleichgewicht von jeweils 25 Simulationen eines Magnetoplasmas für fünf verschiedene Staubteilchenradien  $R$  und drei Temperaturverhältnissen  $\beta = T_i/T_e$ . Die dabei angesetzten wahrscheinlichsten Gyrationradien der Elektronen  $r_{ge}^{mp}$  sind links oben angegeben. Die anderen Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.2 sowie 5.1 zu finden. Zum Vergleich sind die Oberflächenpotenziale aus Abbildung 4.10 für den Fall ohne ein Magnetfeld dargestellt (schwarze Kreuze). Die gepunktete, untere bzw. obere horizontale Linie gibt das Oberflächenpotenzial aus der OML-Theorie ohne Magnetfeld bzw. für ein Magnetfeld  $B_i$  an.

## 5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen



$R = 200 \mu m$  um ca. 44% zu, für den Radius  $R = 10 \mu m$  jedoch nur um ca. 8%. Die Zunahme des Oberflächenpotenzials fällt also mit steigendem magnetischen Fluss umso größer aus, je größer der Radius des Staubteilchens im Vergleich zur Debyelänge  $\lambda_e$  ist. Das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht strebt jedoch mit steigendem magnetischen Fluss bei allen Radien einem maximalen Wert zu, welcher sich aus der OML-Theorie für ein Magnetfeld  $B_i$  ergibt. Beim kleinsten Gyrationradius  $r_{ge}^{mp} = 0,01 \mu m$  (für  $\beta = 1,0$ ) bzw.  $r_{ge}^{mp} = 0,1 \mu m$  (für  $\beta = 0,1$  und  $0,01$ ) stimmen die Oberflächenpotenziale aller fünf Staubteilchenradien annähernd überein und liegen um ca. 2% bis 5% höher als nach der OML-Theorie für ein Magnetfeld  $B_i$ . Dieser Effekt ist ähnlich wie im Fall ohne Magnetfeld auf die Gitterpunktauflösung und dem sich damit ergebenden Verhältnis  $R/\Delta x$  zurückzuführen, wie im Abschnitt 4.3 diskutiert wurde.

Die Abbildungen 5.3, 5.4 und 5.5 zeigen das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{av}/kT_e$  im Gleichgewicht der insgesamt 140 3D-OPAR-Simulationen eines Magnetoplasmas in Abhängigkeit von  $\gamma_i = R/r_{gi}^{mp}$  für die fünf Staubteilchenradien und die drei Temperaturverhältnisse. Zum Vergleich ist das Oberflächenpotenzial für ein Magnetfeld  $B_e$  nach Gleichung (2.81) in Abhängigkeit von  $\gamma_i$  dargestellt (OML  $B_e$ , gestrichelte Linie). Die Kurve ist ähnlich zu der in Abbildung 2.18, jedoch hier für ein Massenverhältnis von  $m_i/m_e = 100$  sowie dem entsprechendem Temperaturverhältnis. Die Kurve OML  $B_e$  beschreibt also den Fall von magnetisierten Elektronen, aber unmagnetisierten Ionen im Bereich  $\gamma_i < 1,0 < \gamma_e$ . Die gepunktete Linie OML  $B_i$  gibt wieder den Fall von magnetisierten Elektronen und Ionen nach (2.77) mit der Bedingung  $\gamma_e, \gamma_i > 1,0$  an. Die Kurve OML  $B$  (gestrichelte Linie) modelliert den Übergang zwischen dem Fall ohne Magnetfeld (OML  $B = 0$ ) und dem Fall OML  $B_i$  und wird im nächsten Abschnitt erläutert. Die vertikale Linie markiert jeweils den Wert, bei dem der wahrscheinlichste Gyrationradius

## 5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen

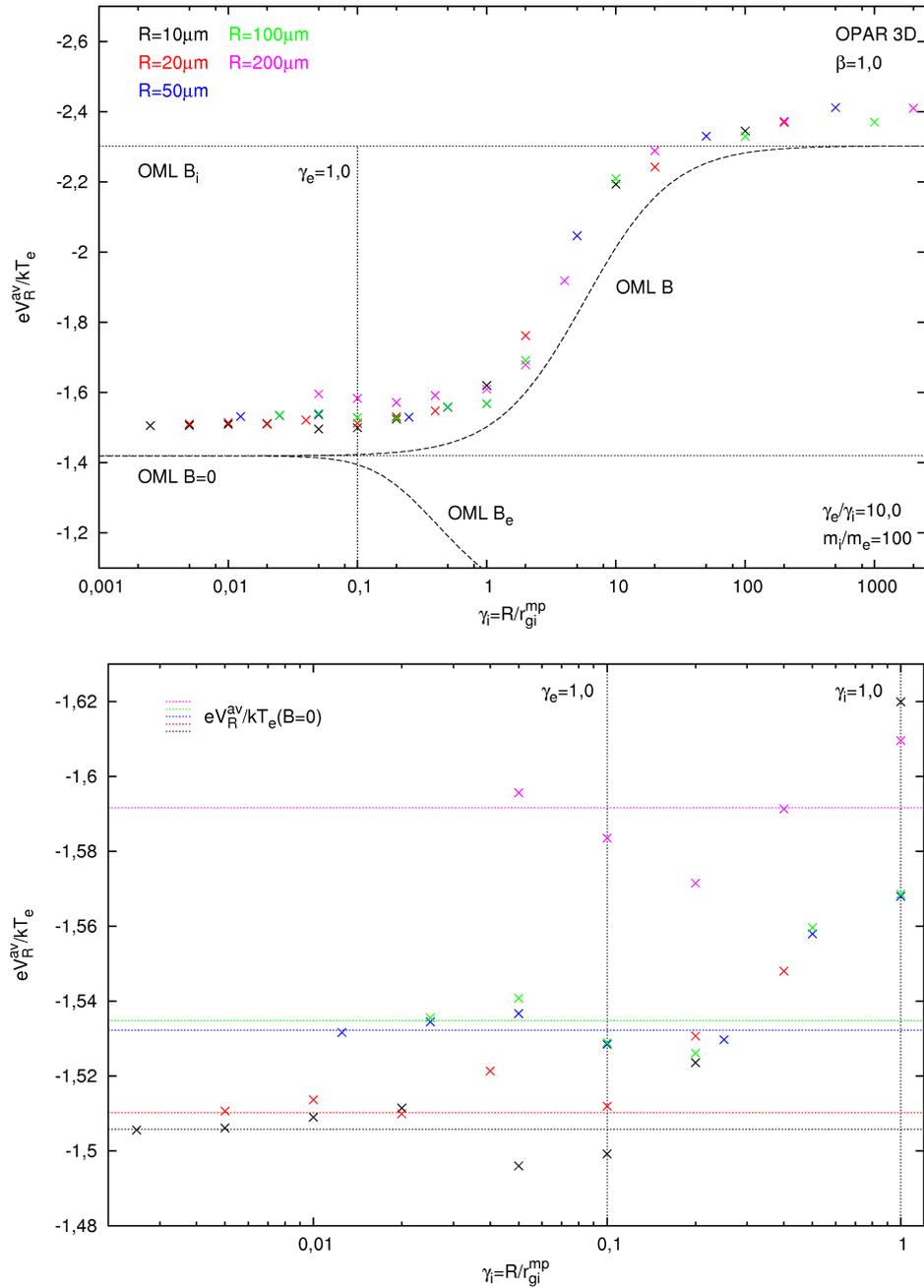


Abbildung 5.3.: Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{av}/kT_e$  (farbige Kreuze) im Gleichgewicht von insgesamt 50 Simulationen eines Magnetoplasmas für  $\beta = 1,0$  in Abhängigkeit von  $\gamma_i = R/r_{gi}^{mp}$  für fünf verschiedene Staubteilchenradien  $R$ . Die Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.2 sowie 5.1 angegeben. Die Kurven OML  $B_e$  und OML B (gestrichelte Linien) geben den Verlauf des Oberflächenpotenzials nach (2.81) bzw. (5.7) an, die Linie OML  $B_i$  mit  $eV_R/kT_e = -2,3$  nach (2.77). Die Abbildung unten zeigt einen Ausschnitt bis  $\gamma_i = 1$ . Die farbigen Linien geben dabei für den entsprechenden Radius das Oberflächenpotenzial aus Abbildung 4.10 für den Fall ohne Magnetfeld an.

## 5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen

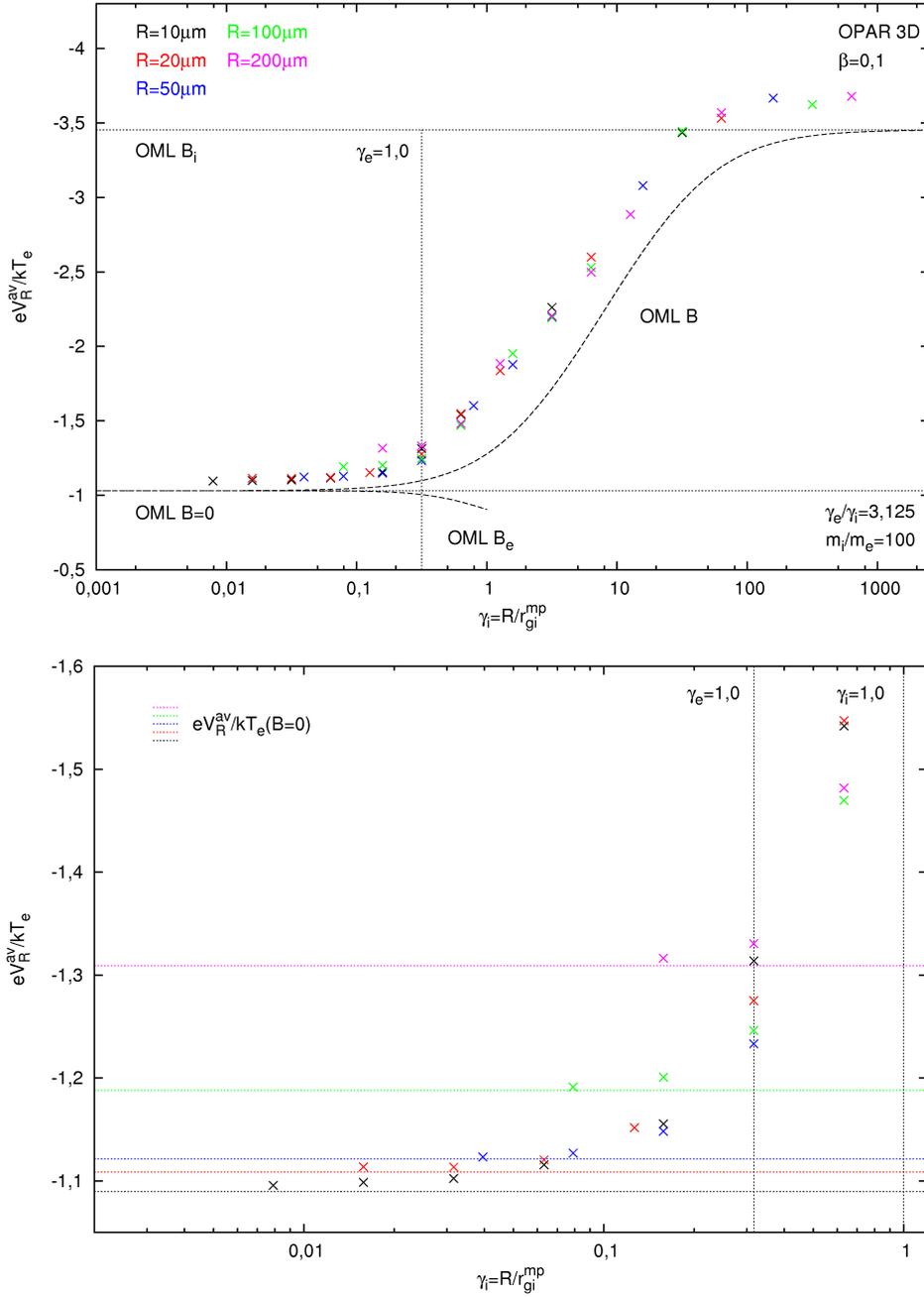


Abbildung 5.4.: Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotential  $eV_R^{av}/kT_e$  (farbige Kreuze) im Gleichgewicht von insgesamt 45 Simulationen eines Magnetoplasmas für  $\beta = 0,1$  in Abhängigkeit von  $\gamma_i = R/r_{gi}^{mp}$  für fünf verschiedene Staubteilchenradien  $R$ . Die Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.2 sowie 5.1 angegeben. Die Kurven OML  $B_e$  und OML  $B$  (gestrichelte Linien) geben den Verlauf des Oberflächenpotenzials nach (2.81) bzw. (5.7) an, die Linie OML  $B_i$  mit  $eV_R/kT_e = -3,54$  nach (2.77). Die Abbildung unten zeigt einen Ausschnitt bis  $\gamma_i = 1,0$ . Die farbigen Linien geben dabei für den entsprechenden Radius das Oberflächenpotential aus Abbildung 4.10 für den Fall ohne Magnetfeld an.

## 5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen

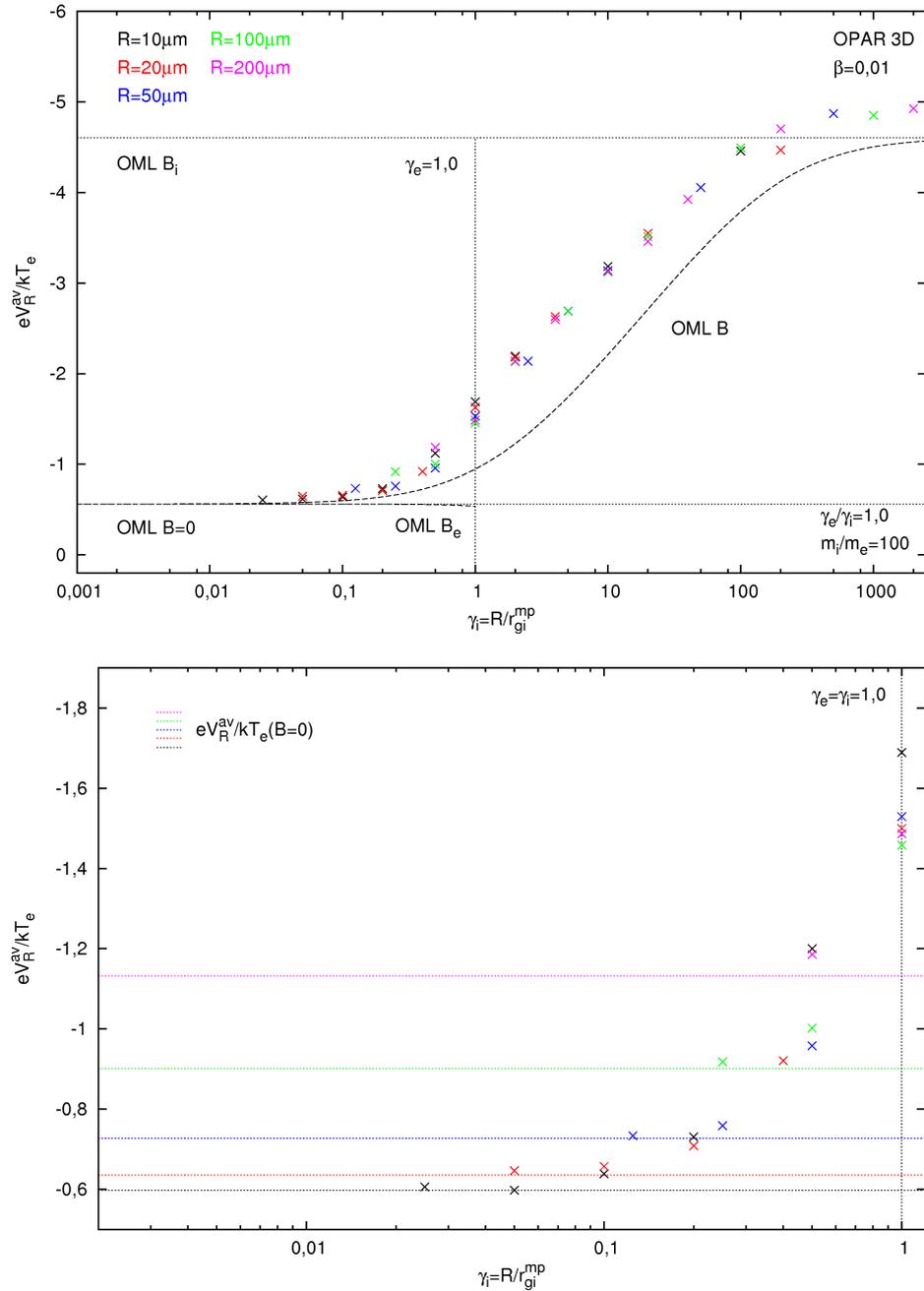


Abbildung 5.5.: Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial  $eV_R^{av}/kT_e$  (farbige Kreuze) im Gleichgewicht von insgesamt 45 Simulationen eines Magnetoplasmas für  $\beta = 0,01$  in Abhängigkeit von  $\gamma_i = R/r_{gi}^{mp}$  für fünf verschiedene Staubteilchenradien  $R$ . Die Parameter der Simulationen sind in Tabelle 4.2 sowie 5.1 angegeben. Die Kurven OML  $B_e$  und OML  $B$  (gestrichelte Linien) geben den Verlauf des Oberflächenpotenzials nach (2.81) bzw. (5.7) an, die Linie OML  $B_i$  mit  $eV_R/kT_e = -4,61$  nach (2.77). Die Abbildung unten zeigt einen Ausschnitt bis  $\gamma_i = 1$ . Die farbigen Linien geben dabei für den entsprechenden Radius das Oberflächenpotenzial aus Abbildung 4.10 für den Fall ohne Magnetfeld an.

der Elektronen gleich dem Radius  $R$  ist, also  $\gamma_e = 1,0$ . Unten ist jeweils ein vergrößerter Ausschnitt der oberen Abbildung bis  $\gamma_i = 1,0$  gezeigt. Die farbigen, gestrichelten Linien geben dabei für den entsprechenden Radius jeweils das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht aus den Simulationen für den Fall ohne Magnetfeld an (siehe Abbildung 4.10). Die Kurven OML  $B_e$  fallen zwischen  $\gamma_e = 1,0$  und  $\gamma_i = 1,0$  vom Betrag her unter die Kurve OML  $B = 0$ , wobei der stärkste Abfall für das größte Temperaturverhältnis auftritt. Für das Temperaturverhältnis  $\beta = 0,01$  stimmen die Gyrationradien der Elektronen und Ionen überein, weshalb  $\gamma_i = \gamma_e$  gilt. Die Oberflächenpotenziale aus den Simulationen fallen nur für das größte Temperaturverhältnis im Bereich  $\gamma_e = 1,0$  unter das Oberflächenpotenzial aus dem Fall ohne Magnetfeld, wie in den unteren Abbildungen 5.3 bis 5.5 deutlich zu erkennen ist. Mit stärker werdendem magnetischem Fluss  $\gamma_i > 1,0$  steigen die Oberflächenpotenziale jeweils schnell an, wobei der Betrag dann nahezu unabhängig vom Staubteilchenradius wird nur noch von  $\gamma_i$  selbst abhängt.

Im Bereich  $\gamma_e = 1,0$  ist der wahrscheinlichste Gyrationradius der Elektronen in der Größenordnung des Staubteilchenradius, weshalb der Elektronenstrom auf das Staubteilchen signifikant zu sinken beginnt, wodurch die Oberflächenpotenziale vom Betrag her ebenfalls sinken (im Vergleich zum Fall ohne Magnetfeld). Mit steigendem  $\gamma_e$  sinkt der Elektronenstrom immer weiter, jedoch beginnt offensichtlich ebenfalls der Ionenstrom auf das Staubteilchen bereits im Bereich ab ca.  $\gamma_i > 0,1$  signifikant zu sinken und zwar im stärkeren Maße als der Elektronenstrom, da der Betrag der Oberflächenpotenziale bereits für  $\gamma_i < 1,0$  wieder ansteigt. Daher tritt auch bei den beiden kleineren Temperaturverhältnissen kein Abfall der Oberflächenpotenziale im Vergleich zum Fall ohne Magnetfeld auf, da hier für  $\gamma_e = 1,0$  bereits  $\gamma_i = 0,3$  (für  $\beta = 0,1$ ) sowie  $\gamma_i = \gamma_e = 1,0$  (für  $\beta = 0,01$ ) gilt. In Abbildung 2.16 wurde der Gültigkeitsbereich für die Kurve  $B_e$  bereits auf  $\gamma_e/\gamma_i \geq 10$  beschränkt, siehe Abschnitt 2.4.2.

Dass der Ionenstrom auf das Staubteilchen tatsächlich schon im Bereich  $\gamma_i < 1,0$  schneller abnimmt als der Elektronenstrom, sei mit Abbildung 5.6 verdeutlicht. Aufgetragen ist der Elektronen- und Ionenstrom nach der OML-Theorie in Abhängigkeit des Oberflächenpotenzials  $\eta_R$  für  $\beta = 1,0$  und  $m_i/m_e = 100$ , wobei  $I_e^{B=0}$  und  $I_i^{B=0}$  die Ströme für den Fall ohne Magnetfeld nach Gleichung (2.18) und (2.16) sind.  $I_e^B$  ist der Elektronenstrom für ein Magnetfeld  $B_e$  sowie  $B_i$ , welcher sich zu  $I_e^B = I_e^{B=0}/2$  ergibt, siehe Abschnitt 2.4.2.  $I_i^B$  ist der Ionenstrom für ein Magnetfeld  $B_i$  nach Gleichung (2.76), welcher unabhängig vom Oberflächenpotenzial ist. Die Ströme sowie das Oberflächenpotenzial sind dabei jeweils auf den Gleichgewichtswert aus dem Fall ohne Magnetfeld normiert. Während der Ionenstrom  $I_i^{B=0}$  linear mit dem Oberflächenpotenzial ansteigt, fallen die Elektronenströme jeweils exponentiell ab. Die Schnittpunkte der Kurven markieren die Ströme sowie das Oberflächenpotenzial im Gleichgewichtszustand. Der schwarz markierte Schnittpunkt ist dabei der Fall ohne Magnetfeld, auf den jeweils normiert wurde. Der rot markierte Schnittpunkt zeigt den Fall von magnetisierten Elektronen, aber unmagnetisierten Ionen ( $\gamma_i < 1,0 < \gamma_e$ ) und der blau markierte Schnittpunkt den Fall von magnetisierten Elektronen und Ionen ( $\gamma_e, \gamma_i > 1,0$ ). Die Kreuze zeigen Oberflächenpotenziale aus Abbildung 5.3 sowie den zugehörigen gemittelten Gleichgewichtsstrom aus den Simulationen für den kleinsten Staubteilchenradius. Die jeweiligen Ströme und Oberflächenpotenziale sind dabei auf den gemittelten Gleichgewichtszustand aus den

## 5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen

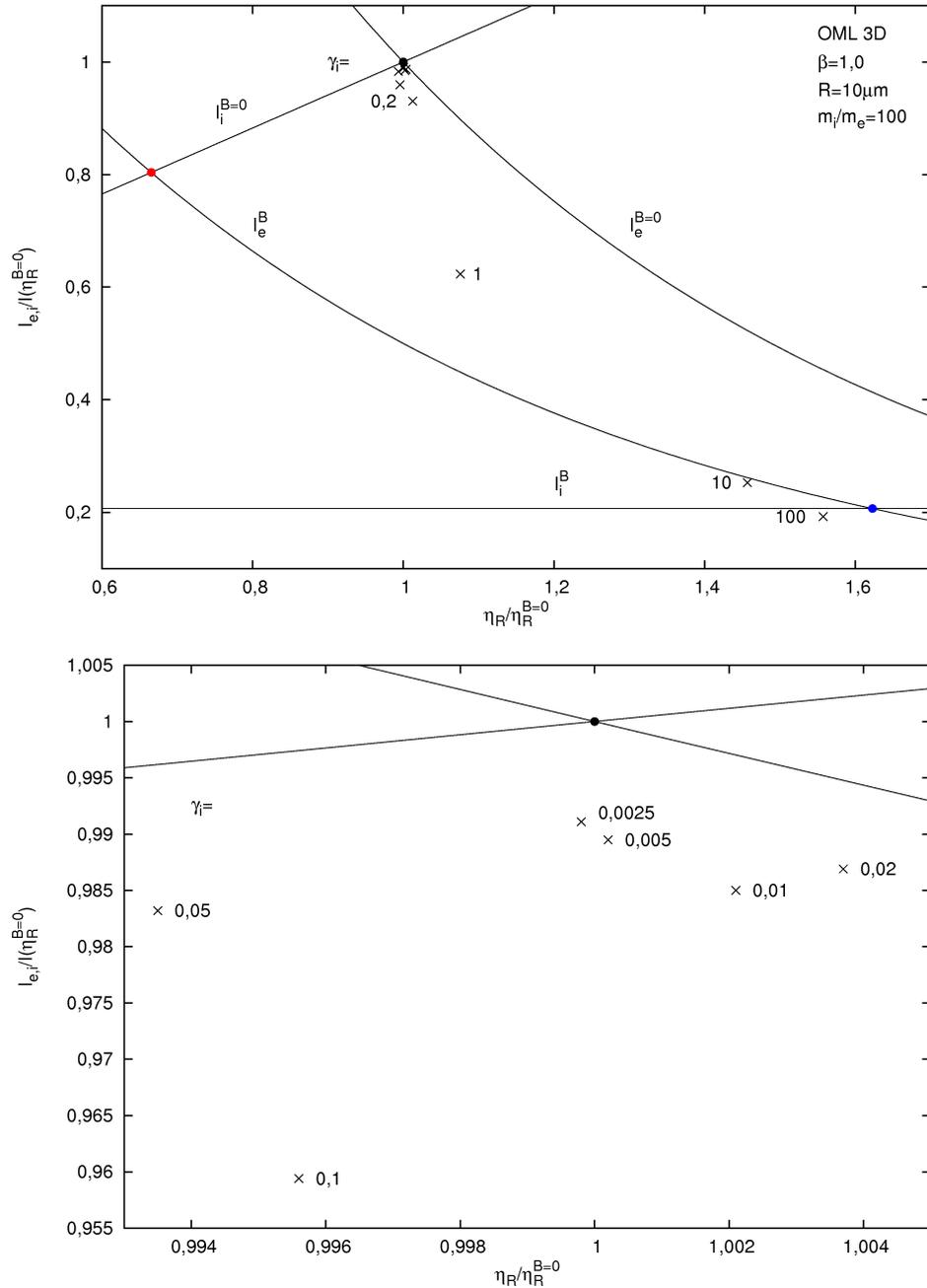


Abbildung 5.6.: Elektronen- und Ionenströme nach der OML-Theorie in Abhängigkeit des Oberflächenpotenzials  $\eta_R = eV_R/kT_e$ .  $I_e^{B=0}$  und  $I_i^{B=0}$  sind die Ströme für den Fall ohne Magnetfeld,  $I_e^B$  für ein Magnetfeld  $B_e$  sowie  $B_i$  und  $I_i^B$  für ein Magnetfeld  $B_i$ . Normiert wurde jeweils auf den Gleichgewichtswert aus dem Fall ohne Magnetfeld. Der schwarz markierte Schnittpunkt zeigt den Gleichgewichtszustand für den Fall ohne Magnetfeld, der rot markierte Schnittpunkt den Fall von magnetisierten Elektronen, aber unmagnetisierten Ionen und der blau markierte Schnittpunkt den Fall von magnetisierten Elektronen und Ionen. Die Kreuze zeigen Oberflächenpotenziale und den Gleichgewichtsstrom aus den Simulationen mit dem kleinsten Staubteilchenradius. Unten ist ein vergrößerter Ausschnitt gezeigt.

Simulationen ohne Magnetfeld normiert. Sämtliche Gleichgewichtsströme aus den Simulationen liegen unterhalb der Elektronen- und Ionenströme, welche sich aus der OML-Theorie ohne Magnetfeld für das entsprechende Oberflächenpotenzial ergeben würden. Jedoch liegen sie für  $\gamma_i \leq 0,2$  jeweils höher als nach der OML-Theorie für  $B_e$  angesetzt wurde. Der Elektronenstrom nimmt also nicht in dem erwarteten Maße ab, zudem sinkt der Ionenstrom in Bezug auf den Verlauf von  $I_i^{B=0}$ , wohingegen in der OML-Theorie für  $B_e$  ein unveränderter (unmagnetisierter) Ionenstrom angesetzt wurde. Für die Fälle  $\eta_R/\eta_R^{B=0} > 1,0$  sinkt der Ionenstrom sogar stärker als der Elektronenstrom im Vergleich zum Fall ohne Magnetfeld für das entsprechende Oberflächenpotenzial, weshalb der Betrag des Oberflächenpotenzials ansteigt. Für die Simulationen mit  $\gamma_i \gg 1,0$  ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit der OML-Theorie für ein Magnetfeld  $B_i$  (blau markierter Schnittpunkt), da hier der Ionenstrom  $I_i^B$  nur noch von der Iontemperatur abhängt und wesentlich geringer ausfällt.

In der oben und im Abschnitt 2.4.2 geführten Diskussion über die Abnahme der Elektronen- und Ionenströme wurde nicht berücksichtigt, dass die Plasmateilchen eine Energieänderung im negativen Zentralpotenzial des Staubteilchens erfahren. Da der Gyrationradius von der Geschwindigkeit des Teilchens senkrecht zu den Magnetfeldlinien abhängt (siehe (2.49)), ändert sich auch der Gyrationradius der Elektronen und Ionen während der Bewegung im Zentralpotenzial. Aufgrund des abstoßenden Oberflächenpotenzials verlieren die Elektronen kinetische Energie, wodurch der Gyrationradius abnimmt, wohingegen die Ionen im anziehenden Potenzial kinetische Energie aufnehmen und daher der Gyrationradius zunimmt. In welchem Maße die Gyrationradien tatsächlich ab- bzw. zunehmen, sei in Abbildung 5.7 anhand einer Simulation mit dem größten Staubteilchenradius  $R = 200 \mu\text{m}$  bei  $\beta = 1,0$  und  $\gamma_i = 0,2$  gezeigt. Dargestellt ist die Geschwindigkeitsverteilung der am Staubteilchen absorbierten Elektronen (schwarz) und Ionen (rot), wobei  $v_R$  die Geschwindigkeit der Teilchen auf der Oberfläche des Staubteilchens ist. Normiert wurde auf die wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v_{\text{mp}}$  nach (3.57). Die beiden Geschwindigkeitsverteilungen beinhalten jeweils ca. 270.000 Superteilchen, welche in einem Zeitraum von 60.000 Zeitschritten ( $2.400 \omega_e$ ) nach Erreichen des Gleichgewichtszustandes am Staubteilchen absorbiert und danach aus der Simulation entfernt wurden. Die normierte Geschwindigkeit  $v_R/v_{\text{mp}}$  lässt sich über

$$\frac{eV_R}{kT_e} = \frac{\frac{1}{2}mv_R^2}{kT_e} = \left( \frac{v_R}{v_{\text{mp}}} \right)^2 \quad (5.4)$$

durch die normierte Energie (Potenzial)  $eV_R/kT_e$  ausdrücken, siehe die obere Skala in Abbildung 5.7. Die vertikale gestrichelte Linie  $eV_R^{\text{av}}/kT_e$  entspricht dem gemittelten Oberflächenpotenzial des Staubteilchens im Gleichgewichtszustand. Die Verteilung der Ionen steigt in der Nähe des Oberflächenpotenzials sprunghaft an, da die Ionen mindestens die Energie des Oberflächenpotenzials in der Bewegung durch das Zentralpotenzial aufnehmen. Dagegen hat die Verteilung der Elektronen ein Maximum an dieser Stelle. Die mittlere Geschwindigkeit der beiden Verteilungen beträgt  $v_{\text{av}}^e = 1,33 v_{\text{mp}}^e$  und  $v_{\text{av}}^i = 1,67 v_{\text{mp}}^i$ , woraus ein mittlerer Gyrationradius über

$$r_g^{\text{av}} = \frac{mv_{\text{av}}}{2qB_z} \quad (5.5)$$

## 5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen

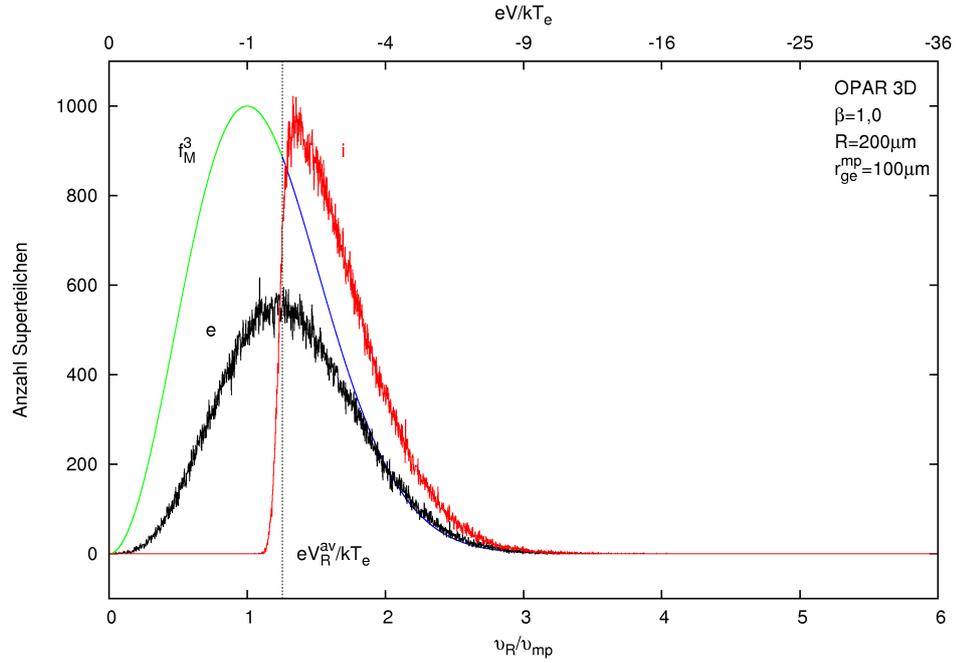


Abbildung 5.7.: Die Geschwindigkeitsverteilung von am Staubteilchen absorbierten Elektronen (schwarz) und Ionen (rot), wobei  $v_R$  die Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Staubteilchens ist und  $v_{mp}$  die wahrscheinlichste Geschwindigkeit gemäß einer Maxwellverteilung (3.57). Die Geschwindigkeitsverteilungen beinhalten jeweils ca. 270.000 Superteilchen, welche in einem Zeitraum von 60.000 Zeitschritten ( $2.400 \omega_e$ ) nach Erreichen des Gleichgewichtszustandes am Staubteilchen absorbiert wurden. Die obere Skala zeigt die zur normierten Geschwindigkeit gehörende normierte Energie. Die vertikale gestrichelte Linie entspricht dem gemittelten Oberflächenpotenzial  $eV_R^{av}/kT_e$  im Gleichgewicht. Zum Vergleich ist eine Maxwellverteilung  $f_M^3$  (grüne und blaue Linie) gezeigt.

bestimmt werden kann, siehe (2.51). In Tabelle 5.2 sind die entsprechenden Gyrationenradien angegeben, sowohl für den größten als auch für den kleinsten Staubteilchenradius bei  $\gamma_i = 0,2$  und  $\gamma_i = 1,0$ . Zum Vergleich ist der mittlere Gyrationenradius derjenigen Elektronen und Ionen aus einer ungestörten Maxwellverteilung angegeben, welche zum Strom auf das Staubteilchen beitragen. Bestimmt wurden diese aus dem Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht, denn nur die Elektronen aus der Maxwellverteilung mit mindestens der kinetischen Energie in der Größe des Oberflächenpotenzials können das Oberflächenpotenzial Überwinden und vom Staubteilchen absorbiert werden. Hieraus folgt eine mittlere Geschwindigkeit, welche aus dem blau markierten Bereich der Maxwellverteilung in Abbildung 5.7 bestimmt wird. Dagegen werden vom Staubteilchen überwiegend nur Ionen absorbiert, welche in der ungestörten Maxwellverteilung über eine kleinere kinetische Energie als das Oberflächenpotenzial verfügen. Die mittlere Geschwindigkeit der Ionen wurde daher aus dem grün markierten Bereich der ungestörten Maxwellverteilung bestimmt.

Zunächst sei die mittlere Zeile in Tabelle 5.2 diskutiert, welche die Gyrationenradien der

## 5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen

		$R/\mu\text{m} = 10$		$200$	
		$\gamma_i = 0, 2$	$1, 0$	$0, 2$	$1, 0$
<b>Elektronen</b>	$r_{\text{ge}}^{\text{mp}}/\mu\text{m} =$	5, 0	1, 0	100, 0	20, 0
	Vor Absorption $r_{\text{ge}}^{\text{av}}/\mu\text{m} =$	8, 0	1, 6	161, 7	32, 5
	Nach Absorption $r_{\text{ge}}^{\text{av}}/\mu\text{m} =$	6, 6	1, 3	131, 9	26, 4
<b>Ionen</b>	$r_{\text{gi}}^{\text{mp}}/\mu\text{m} =$	50, 0	10, 0	1000, 0	200, 0
	Vor Absorption $r_{\text{gi}}^{\text{av}}/\mu\text{m} =$	40, 7	8, 4	823, 2	166, 6
	Nach Absorption $r_{\text{gi}}^{\text{av}}/\mu\text{m} =$	83, 8	17, 9	1656, 3	351, 1

Tabelle 5.2.: Die mittleren Gyrationradien von Elektronen und Ionen aus Simulationen mit dem größten und kleinsten Staubteilchenradius bei jeweils  $\beta = 1, 0$ .  $r_{\text{ge}}^{\text{mp}}$  bzw.  $r_{\text{gi}}^{\text{mp}}$  sind die in der Simulation angesetzten wahrscheinlichsten Gyrationradien.  $r_{\text{ge}}^{\text{av}}$  bzw.  $r_{\text{gi}}^{\text{av}}$  stellen mittlere Gyrationradien dar, welche aus den Geschwindigkeitsverteilungen der Superteilchen bestimmt wurden. Zum einen ist der mittlere Gyrationradius der Teilchen aus einer ungestörten Maxwellverteilung angegeben, welche zum Strom auf das Staubteilchen im Gleichgewicht beitragen (Vor Absorption), zum anderen der mittlere Gyrationradius der Teilchen nach der Absorption am Staubteilchen (Nach Absorption).

Elektronen zusammenfasst. Die mittleren Gyrationradien der Elektronen, welche zum Strom auf das Staubteilchen beitragen (siehe Zeile Vor Absorption) sind für alle vier Simulationen stets um ca. 60% größer als die angesetzten wahrscheinlichsten Gyrationradien. Im abstoßenden Zentralpotenzial nehmen die mittleren Gyrationradien dann wie beschrieben ab (siehe Zeile Nach Absorption), jedoch jeweils nur um ca. 20% bei Absorption am Staubteilchen, womit sie immer noch um ca. 30% größer als die angesetzten wahrscheinlichsten Gyrationradien bleiben. Anders verhält es sich mit den mittleren Gyrationradien der Ionen, welche in der untersten Zeile in Tabelle 5.2 angegeben sind. Die mittleren Gyrationradien der Ionen, welche zum Strom auf das Staubteilchen beitragen, fallen um jeweils ca. 20% kleiner aus die zugehörigen wahrscheinlichsten Gyrationradien. Allerdings nimmt der mittlere Gyrationradius im anziehenden Zentralpotenzial deutlich zu und ist bei Absorption am Staubteilchen um ca. 100% angestiegen. Im Vergleich zu den angesetzten wahrscheinlichsten Gyrationradien beträgt die Steigerung ca. 70%. Zu beachten ist, dass die relative Ab- bzw. Zunahme der Gyrationradien unabhängig ist von der tatsächlichen Größe des magnetischen Flusses sowie vom Radius des Staubteilchens relativ zum wahrscheinlichsten Gyrationradius ( $\gamma_e, \gamma_i$ ) oder zu den Debyelängen des Systems. Für die Fälle mit  $\gamma_i = 0, 2$  fallen die Gyrationradien der Elektronen sowohl für den kleinsten als auch für den größten Staubteilchenradius stets kleiner aus als der entsprechende Radius, womit der (magnetisierte) Elektronenstrom durch die Energieabnahme im Zentralpotenzial kaum beeinflusst wird. Die mittleren Gyrationradien der Ionen bleiben dagegen zwar stets größer als der Staubteilchenradius, jedoch nimmt der Gyrationradius durch die Energieaufnahme um bis zu 100% zu. Dies kann dazu führen, dass einige Ionen mit einem entsprechenden Phasenwinkel die Oberfläche des Staubteilchens verfehlen und nicht absorbiert werden (siehe hierzu Abschnitt 2.4.2). Die Zunahme der kinetischen Energie und damit des Gyrationradius im Zentralpotenzial bewirkt also eine zusätzliche Abnahme des (magnetisierten) Ionenstroms, welcher in dem Ansatz der

OML-Theorie für ein Magnetfeld  $B_e$  nicht berücksichtigt wurde. Daher nimmt wie zu Beginn dieses Abschnitts gezeigt der Ionenstrom bereits für  $\gamma_i < 1,0$  stärker ab als der Elektronenstrom, wodurch der Betrag des Oberflächenpotenzial zunimmt. Für die Fälle  $\gamma_i = 1,0$  steigt der mittlere Gyrationradius der Ionen bei der Bewegung im Zentralpotenzial über den Staubteilchenradius hinaus an, was zu einer weiteren Abnahme des Ionenstroms und damit zu der weiteren Zunahme des Betrages des Oberflächenpotenzials führt. Während für  $\beta = 1,0$  noch ein leichtes Absinken des negativen Oberflächenpotenzials im Bereich  $\gamma_e = 1,0$  auftritt, zeigt sich dieser Effekt für  $\beta < 1,0$  nicht mehr, da der wahrscheinlichste Gyrationradius der Ionen aufgrund der geringeren kinetischen Energie entsprechend kleiner ausfällt und für  $\beta = 0,01$  sogar  $\gamma_i = \gamma_e$  gilt. Demnach nimmt der Ionenstrom bei  $\beta < 1,0$  und  $m_i/m_e = 100$  für alle  $\gamma_e, \gamma_i$  stets schneller ab als der Elektronenstrom.

Die Oberflächenpotenziale steigen für alle Radien und Temperaturverhältnisse bereits für  $\gamma_i < 1,0$  vom Betrag her an, also wenn der wahrscheinlichste Gyrationradius der Ionen noch größer als der Staubteilchenradius ist. Dies gilt dabei sowohl für kleine als auch für große Staubteilchenradien im Vergleich zu den Debyelängen des Plasmas. Dieses Verhalten wurde schon in Abbildung 2.18 aus Patacchini et al. [89] im Abschnitt 2.4.2 für kleine Staubteilchenradien diskutiert. Offensichtlich ist die in Gleichung (2.81) angesetzte Bedingung von magnetisierten Elektronen aber gleichzeitig unmagnetisierten Ionen in einem stationären Plasma mit einer Maxwellverteilung nicht zutreffend, selbst wenn  $\gamma_i < 1,0 < \gamma_e$  gilt. Denn aufgrund der Zunahme des Gyrationradius während der Bewegung im anziehenden Zentralpotenzial des Staubteilchens werden im Vergleich zum Fall ohne Magnetfeld entsprechend mehr Ionen reflektiert.

### 5.1.2. Modellierung des Potenzialverlaufs

Die in den Abbildungen 5.3 bis 5.5 (jeweils oben) gezeigten Kurven OML  $B$  (gestrichelte Linie) modellieren den Übergang vom OML-Fall ohne Magnetfeld (OML  $B = 0$ ) zum Fall von magnetisierten Elektronen und Ionen (OML  $B_i$ ). Hierzu wurde in den Ausdruck des Ionenstroms (2.16) die Magnetisierungsfunktion  $D(\gamma_i)$  wie folgt eingefügt:

$$I_i^B(\gamma_i) = 4\pi R^2 en_0 \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i}} \left( 1 - D(\gamma_i) \cdot \frac{eV_R}{kT_i} \right) \quad . \quad (5.6)$$

$D(\gamma_i)$  modifiziert also die Abhängigkeit des Ionenstroms vom Oberflächenpotenzial  $eV_R$ , siehe hierzu auch Abschnitt 2.4.2 und Gleichung (2.76). Das Gleichsetzen mit dem Elektronenstrom nach (2.17) ergibt:

$$\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \left( 1 - D(\gamma_i) \cdot \frac{\eta_R}{\beta} \right) e^{-\eta_R} \quad . \quad (5.7)$$

Für  $D(\gamma_i) = 1$  ist (5.7) gleich dem Ausdruck aus der OML-Theorie ohne Magnetfeld, siehe (2.19). Für  $D(\gamma_i) = 0$  ist (5.7) gleich dem Fall von magnetisierten Elektronen und Ionen, siehe (2.77). Der Übergang zwischen den beiden Fällen wird durch die Magneti-

## 5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen

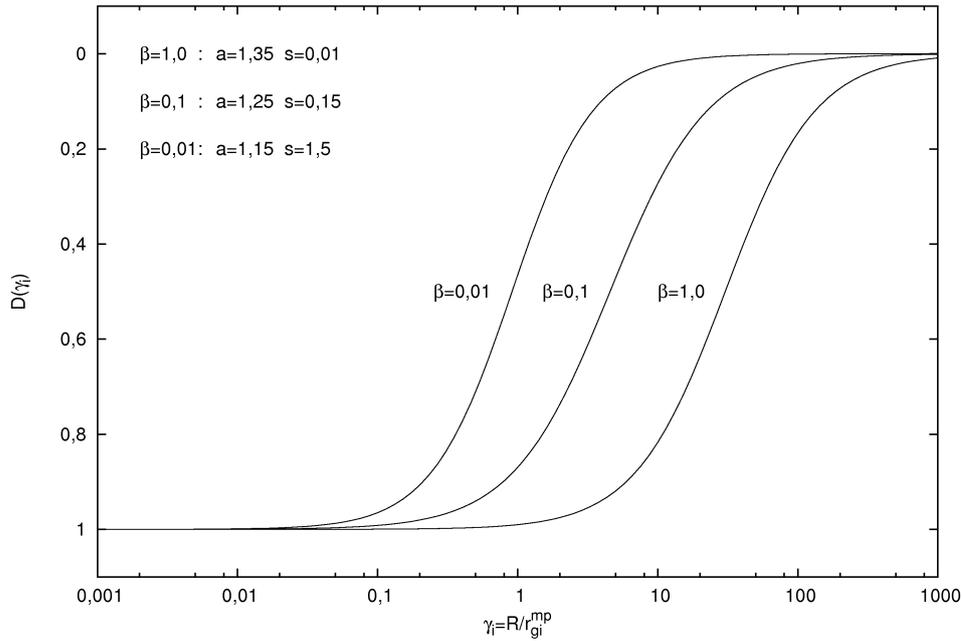


Abbildung 5.8.: Die Magnetisierungsfunktion  $D(\gamma_i)$  nach (5.8) für die drei Parameterkombinationen  $s$  und  $a$ , wie sie in den Abbildungen 5.3 bis 5.5 für die drei Temperaturverhältnisse  $\beta$  verwendet wurden. Es gilt jeweils  $D(\gamma_i \ll 1) = 1$  sowie  $D(\gamma_i \gg 1) = 0$ .

sierungsfunktion bestimmt, welche wie folgt definiert sei:

$$D(\gamma_i) = 1 - \frac{s \cdot \gamma_i^a}{1 + s \cdot \gamma_i^a} \quad , \quad (5.8)$$

wobei  $s$  und  $a$  Parameter sind. In Abbildung 5.8 ist  $D(\gamma_i)$  für die drei Parameterkombinationen gezeigt, welche in den Abbildungen 5.3 bis 5.5 für die drei Temperaturverhältnisse  $\beta$  verwendet wurden. Für die Magnetisierungsfunktion gilt  $D(\gamma_i \ll 1) = 1$  sowie  $D(\gamma_i \gg 1) = 0$ . Mit kleiner werdendem Temperaturverhältnis beginnt  $D(\gamma_i)$  entsprechend früher auf Null abzufallen, da wie oben diskutiert die Oberflächenpotenziale entsprechend früher vom Betrag her ansteigen. Es ist lediglich die Abhängigkeit des Ionenstroms vom Oberflächenpotenzial modelliert, welche im Fall von magnetisierten Ionen verschwindet, wie im Abschnitt 2.4.2 erläutert ist. Zusätzlich verringert sich der Elektronen- und Ionenstrom aufgrund der veränderten Einfallsrichtung jeweils um die Hälfte (Projektionsfläche eines Kreises anstatt einer Kugeloberfläche, siehe hierzu ebenfalls Abschnitt 2.4.2). Dieser Effekt wurde in (5.6) bzw. (5.7) nicht berücksichtigt, da die Einführung der Magnetisierungsfunktion bereits eine sehr gute Modellierung des Potenzialverlaufs zulässt. Zwar ist die Bewegung der Elektronen stets stärker an die magnetischen Feldlinien gebunden als die der Ionen, womit sich die Projektionsfläche für die Elektronen mit steigendem  $\gamma_i$  stärker als die der Ionen verändert, jedoch nimmt der Gyrationradius der Ionen aufgrund der Energieänderung stark zu (siehe Abschnitt oben), wodurch der Ionenstrom ebenfalls signifikant abnimmt.

### 5.1.3. Verlauf des Potentials und der Ladungsdichte

In Abbildung 5.9 ist das gemittelte Potential (links) und die Ladungsdichte (rechts) im gesamten Simulationsgebiet aus den Simulationen mit  $\beta = 1$  und dem kleinsten Gyrationradius  $r_{\text{ge}}^{\text{mp}} = 0,01 \mu\text{m}$  für die jeweils fünf Staubteilchenradien dargestellt. Es ist ein mittlerer Querschnitt durch das würfelförmige Simulationsgebiet in der  $x$ - $z$ -Ebene gezeigt, wobei der Abstand  $x$  und  $z$  bezüglich der Mitte des Staubteilchens und des Simulationsgebietes auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert ist, welche in allen Simulationen gleich groß ist. Das gemittelte Potential  $eV^{\text{av}}$  ist auf die Elektronentemperatur  $kT_e$  und die Ladungsdichte  $\rho^{\text{av}}$  auf eine Superteilchenladung pro Gitterzellenvolumen  $\rho_0$  nach (4.7) normiert. Die arithmetische Mittelung wurde wieder über die letzte Hälfte der Simulationsdauer während des Gleichgewichtszustandes des Staubteilchens durchgeführt. Die Farbskala ist jeweils gleich gewählt, womit die fünf Abbildungen des Potentials bzw. der Ladungsdichte direkt miteinander vergleichbar sind. Das magnetische Feld  $B_z$  verläuft in  $z$ -Richtung.

Bei allen fünf Radien ist deutlich zu erkennen, dass die Ladungsdichte nur noch eine Rotationssymmetrie in  $z$ -Richtung aufweist. Denn in Magnetfeldrichtung bildet sich entlang des Staubteilchens ein zylinderförmiges Volumen mit einer negativen Ladungsdichte aus. Dieses zylinderförmige Volumen sei im Folgenden als „magnetische Röhre“ bezeichnet. Die negative Ladungsdichte wird zum einen durch Elektronen verursacht, welche eine nicht ausreichende kinetische Energie besitzen, um das Oberflächenpotential zu überwinden und daher entlang der magnetischen Feldlinien zurück reflektiert werden. Zum anderen werden die meisten Ionen, welche sich entlang einer Magnetfeldlinie bewegen, die das Staubteilchen berührt, auch absorbiert, weshalb die Ionendichte in der magnetischen Röhre deutlich reduziert ist, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird. In der magnetischen Röhre fließt also ein Ladungsstrom von Ionen und Elektronen auf das Staubteilchen zu und ein Strom von Elektronen vom Staubteilchen weg. Die negative Ladungsdichte in der Röhre nimmt dabei mit steigendem Radius zu, obwohl das Oberflächenpotential für alle Radien aufgrund der hohen Magnetfeldstärke annähernd gleich ist, siehe Abbildung 5.3. Zwar wächst für größere Staubteilchen auch der Radius der magnetischen Röhre, allerdings werden aufgrund des annähernd gleichen Oberflächenpotentials und des sehr kleinen Gyrationradius nicht mehr Elektronen pro Volumeneinheit reflektiert als bei kleineren Radien. Ist jedoch der Radius der magnetischen Röhre im Vergleich zu den Debyelängen nicht mehr vernachlässigbar, wird die Bewegung der reflektierten Elektronen weitgehend durch das Magnetfeld bestimmt, weshalb die meisten Elektronen in der magnetischen Röhre verbleiben. Bei kleineren Staubteilchenradien im Vergleich zu den Debyelängen können entsprechend mehr Elektronen und auch Ionen aufgrund der thermischen Bewegung aus der Röhre heraus oder hinein driften. Entlang der Röhre entsteht eine positive Ladungsdichte, welche in Höhe des Staubteilchens einen Maximalwert erreicht. Der Potenzialverlauf innerhalb des magnetischen Röhre ist entsprechend der Ladungsdichte negativ, jedoch tritt erst eine signifikante Abweichung bezüglich der Rotationssymmetrie bei den größeren Radien auf, wie im Abschnitt 5.1.5 in Abbildung 5.13 erläutert wird.

Durch den konstanten, negativen Verlauf des Potentials in  $z$ -Richtung innerhalb der

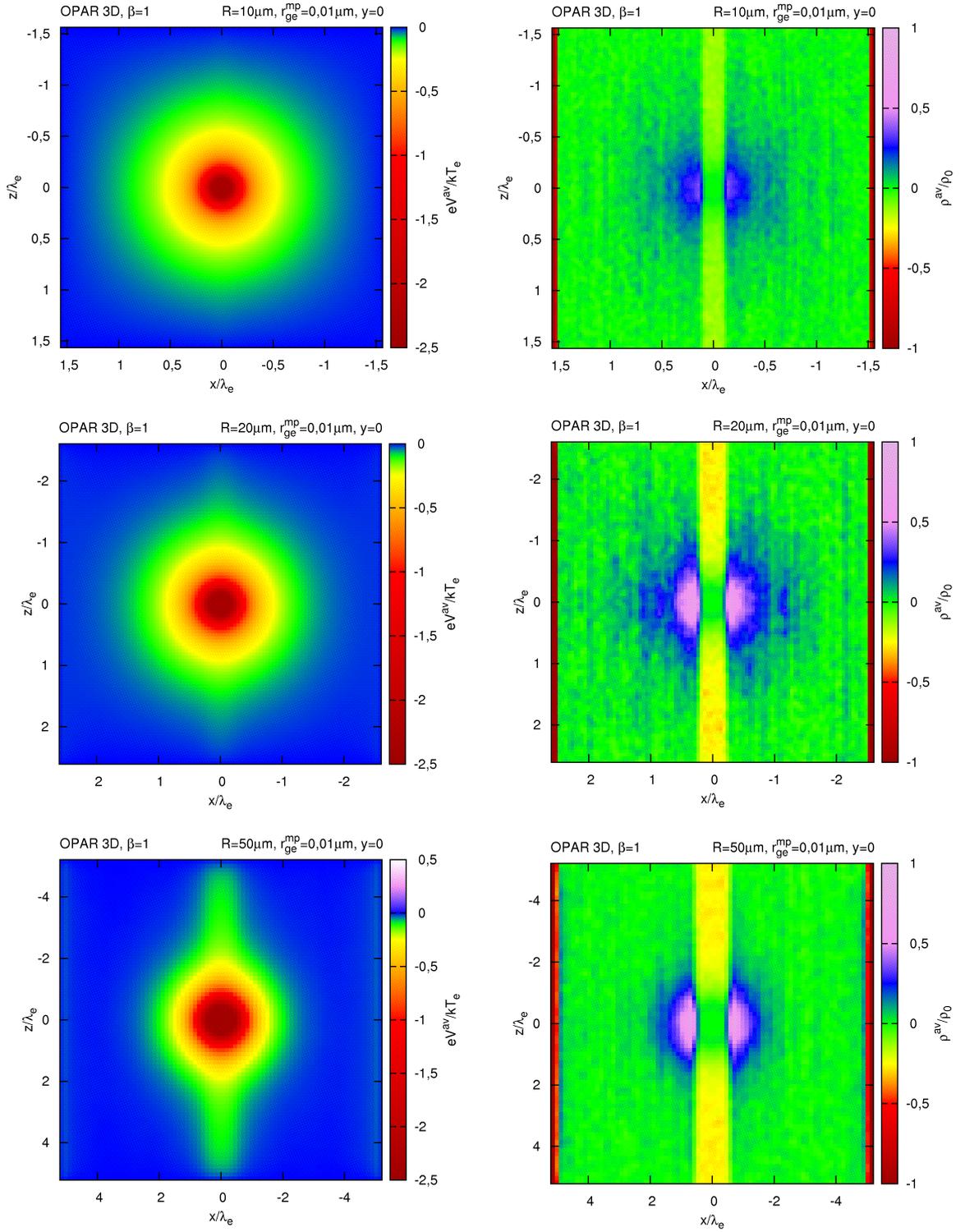
magnetischen Röhre ist nun die angesetzte Randbedingung eines verschwindenden Potentials auf den äußeren Gitterpunkten in der  $x$ - $y$ -Ebene in Höhe des Staubteilchens nicht mehr gerechtfertigt. Dennoch wurde in den Simulationen diese Randbedingung weiterhin angesetzt, da das Simulationsgebiet jeweils eine ausreichende Größe besitzt, wodurch der Potenzialverlauf in der magnetische Röhre nur im unmittelbaren Randbereich abrupt auf Null abfällt. Die am Rand eingefügten Plasmateilchen erfahren hierdurch zwar eine Energieänderung, welche allerdings im Vergleich zur Energieänderung im Potenzialfeld des Staubteilchens zu vernachlässigen ist. In Abbildung 5.9 ist zudem jeweils eine erhöhte Ladungsdichte am rechten und linken Rand zu beobachten, also in der  $y$ - $z$ -Ebene parallel zu den Magnetfeldlinien, wobei der Betrag der Ladungsdichte mit steigendem Staubteilchenradius bzw. Gitterpunktastand zunimmt. Unmittelbar im Randbereich bildet sich eine negative gefolgt von einer positiven Ladungsdichte aus, wie besonders deutlich in der Simulation mit dem größten Radius zu erkennen ist. Dieser Effekt wird von den in der  $y$ - $z$ -Ebene in jedem Zeitschritt eingefügten Plasmateilchen verursacht, welche sogleich auf eine Spiralbahn parallel zur  $y$ - $z$ -Ebene gezwungen werden. Da die Elektronen im Mittel einen hundertmal kleineren Gyrationradius aufweisen als die Ionen, verbleiben die meisten Elektronen im unmittelbaren Randbereich, während die Ionen weiter in das Simulationsgebiet eindringen und eine positive Ladungsdichte vor der negativen ausbilden. Der mit dem Gitterpunktastand zunehmende Betrag der Ladungsdichte im Randbereich ist dabei auf die gröbere räumliche Auflösung der Debyelängen zurückzuführen.

#### 5.1.4. Verlauf der Ionen- und Elektronendichte

Da der Teilchendichteverlauf wie schon in Abbildung 5.9 zu erkennen nicht mehr kugelsymmetrisch bezüglich des Staubteilchens verläuft, sind jeweils zwei räumliche Teilchendichten  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\perp})$  und  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\parallel})$  aus den Simulationen ausgegeben worden.  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\parallel})$  entspricht dabei einer Teilchendichte innerhalb eines zylinderförmigen Volumens in  $z$ -Richtung ober- und unterhalb des Staubteilchens, wie schematisch in Abbildung 5.10 durch die Rot schattierten Flächen veranschaulicht ist. Die runde Grund- und Deckfläche des Zylinders wird durch den Staubteilchenradius  $R$  gebildet.  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\perp})$  entspricht einer Teilchendichte innerhalb eines torusförmigen Volumens um das Staubteilchen herum, dargestellt durch die Blau schattierten Flächen. Die Höhe der Zylinder bzw. die Breite der Tori entsprechen immer dem Gitterpunktastand  $\Delta x$ . Die jeweiligen Teilchendichten sind dabei alle 1.000 Zeitschritte bestimmt und ausgegeben worden, wobei die arithmetische Mittelung wieder jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer während des Gleichgewichtszustandes des Staubteilchens durchgeführt wurde.

In Abbildung 5.11 bzw. 5.12 ist für den kleinsten und größten Staubteilchenradius der gemittelte radiale Verlauf der Elektronen- und Ionendichte  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\perp})$  (links) und  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\parallel})$  (rechts) für verschiedene Verhältnisse  $\gamma_e$  und den drei Temperaturverhältnissen  $\beta$  gezeigt. Zum Vergleich ist jeweils der kugelsymmetrische Verlauf der Teilchendichte ohne ein Magnetfeld (schwarze Kurven) aus Abbildung 4.11 dargestellt. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert, die Dichte jeweils auf die anfänglich angesetzte Plasmadichte  $n_0$ . Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . Der

5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen



## 5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen

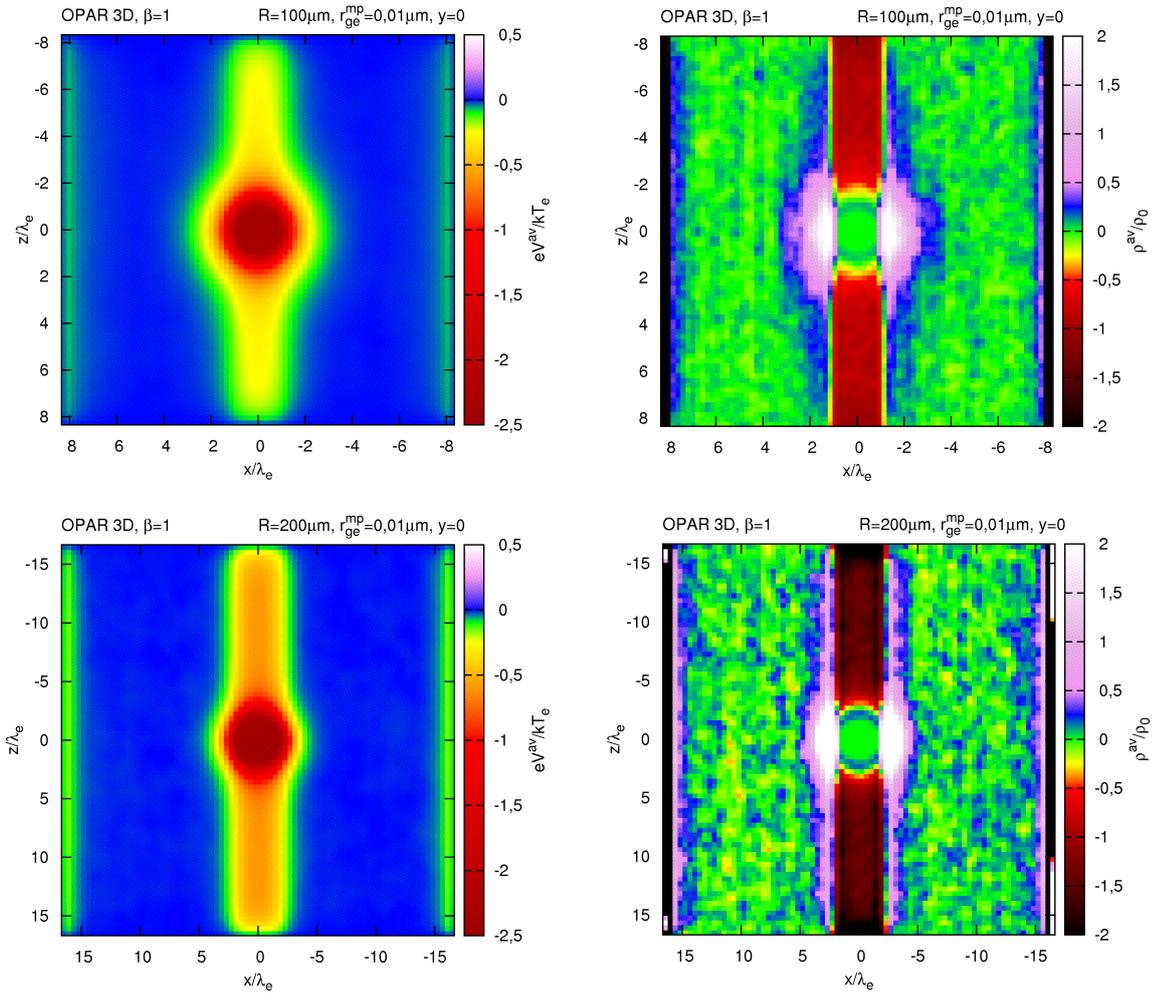


Abbildung 5.9.: Das gemittelte Potenzial  $eV^{\text{av}}/kT_e$  (links) und die Ladungsdichte  $\rho^{\text{av}}/\rho_0$  (rechts) im gesamten Simulationsgebiet aus den Simulationen mit  $\beta = 1,0$  und  $r_{\text{ge}}^{\text{mp}} = 0,01\mu\text{m}$  für die jeweils fünf Staubteilchenradien  $R$ . Die arithmetische Mittelung wurde wieder über die letzte Hälfte der Simulationsdauer während des Gleichgewichtszustandes des Staubteilchens durchgeführt. Die Ladungsdichte ist auf eine Superteilchenladung pro Gitterzellenvolumen  $\rho_0$  nach (4.7) normiert. Es ist ein mittlerer Querschnitt durch das würfelförmige Simulationsgebiet in der  $x$ - $z$ -Ebene gezeigt, wobei der Abstand  $x$  und  $z$  auf  $\lambda_e$  normiert ist. Die Farbskala ist jeweils gleich gewählt, womit die jeweils fünf Abbildungen direkt miteinander vergleichbar sind. Das magnetische Feld  $B_z$  verläuft in  $z$ -Richtung.

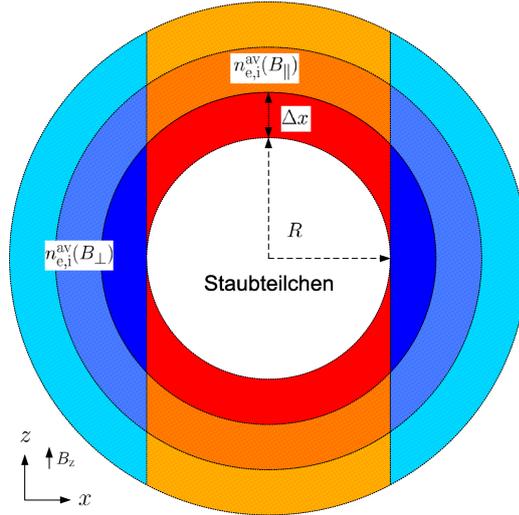


Abbildung 5.10.: Schematische Darstellung der Volumengebiete zur Bestimmung der Teilchendichten  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\parallel})$  und  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\perp})$  aus Abbildung 5.11 und 5.12.  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\parallel})$  entspricht einer Teilchendichte innerhalb eines zylinderförmigen Volumens in  $z$ -Richtung ober- und unterhalb des Staubteilchens, dargestellt durch die rot schattierten Flächen. Die runde Grund- und Deckfläche des Zylinders wird durch den Radius  $R + i \cdot \Delta x$  mit  $i = 0, 1, \dots, N_z - 1$  gebildet. Die jeweils im gleichem Rot schattierten Volumina haben untereinander keine Verbindung, weshalb die jeweilige Teilchenanzahl aufaddiert und auf das entsprechend doppelte Volumen bezogen wurde.  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\perp})$  entspricht einer Teilchendichte innerhalb eines torusförmigen Volumens um das Staubteilchen herum, dargestellt durch die Blau schattierten Flächen. Die Höhe der Zylinder bzw. die Breite der Tori entsprechen dem Gitterpunktabstand  $\Delta x$ .

Abstand  $r$  bezieht sich also auf die Mitte des Staubteilchens bzw. des Simulationsgebietes.

Zunächst sei der Verlauf der Elektronen- Ionendichte senkrecht zur Magnetfeldrichtung  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_{\perp})$  für den kleinsten Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  in Abbildung 5.11 (links) diskutiert. Für  $\beta = 1,0$  sinkt die Ionendichte (durchgezogene Linie) mit steigendem  $\gamma_e$  in der unmittelbaren Umgebung des Staubteilchens im Vergleich zum Fall ohne Magnetfeld, jedoch nur solange  $\gamma_e, \gamma_i \leq 1,0$  ist. Für  $\gamma_e, \gamma_i > 1,0$  nimmt die Ionendichte wieder zu und steigt sogar höher als im Fall ohne Magnetfeld und fällt zudem langsamer ab. Bei den beiden kleineren Temperaturverhältnissen zeigt sich ein ähnliches Verhalten, wobei die Ionendichte mit steigendem  $\gamma_e$  jeweils immer langsamer abfällt. Zudem liegt der Maximalwert der Ionendichte bei  $\beta = 0,01$  und für  $\gamma_e, \gamma_i \geq 1,0$  jeweils deutlich niedriger als im Fall ohne Magnetfeld. Das Absinken der Ionendichte bei den beiden größten Temperaturverhältnissen (z.B. für  $\gamma_e = 10$  bei  $\beta = 1,0$  bzw.  $\gamma_e = 1,0$  bei  $\beta = 0,1$ ) liegt darin begründet, dass insgesamt weniger Ionen senkrecht zur Magnetfeldrichtung zum Staubteilchen transportiert werden. Für das kleinste Temperaturverhältnis tritt dieser Effekt zwar auch auf, jedoch werden aufgrund der relativ kleinen kinetischen Energie immer noch ausreichend Ionen in Richtung des Staubteilchens beschleunigt. Die Ionendichte senkrecht zur Magnetfeldrichtung steigt dann mit zunehmenden  $\gamma_e, \gamma_i$  wieder an, da die

Bewegung der Ionen immer stärker an die Magnetfeldlinien gebunden wird und nur noch die Ionen absorbiert werden, dessen Magnetfeldlinien die Oberfläche des Staubteilchens tangieren. Es sinkt also nicht nur die Anzahl der Ionen, welche in Richtung des Staubteilchens beschleunigt werden, sondern auch der Ionenstrom auf die Oberfläche (senkrecht zu  $B_z$ ), welcher für  $\gamma_e, \gamma_i \gg 1,0$  gegen Null geht, weshalb die Ionendichte  $n_i^{\text{av}}(B_\perp)$  ansteigt. Die Elektronendichte  $n_e^{\text{av}}(B_\perp)$  (gestrichelte Linie) sinkt jeweils mit steigendem  $\gamma_e$ , da die Anzahl der zum Staubteilchen transportierten Elektronen immer weiter abnimmt und aufgrund des abstoßenden Potentials unabhängig vom Gyrationradius nur diejenigen Elektronen absorbiert werden, welche eine ausreichende kinetische Energie besitzen, um das Oberflächenpotential zu überwinden.

Der Dichteverlauf in Magnetfeldrichtung  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_\parallel)$  ist für den kleinsten Radius in Abbildung 5.11 (rechts) gezeigt. Die Ionendichte sinkt jeweils mit steigendem  $\gamma_e$ , bis diese schließlich deutlich unter die Elektronendichte abfällt. Allerdings fällt die Elektronendichte kurz vor der Oberfläche des Staubteilchens stets unter die Ionendichte, womit auch in Magnetfeldrichtung stets eine geringfügige Abschirmung des Oberflächenpotentials gegeben ist. Die Ionendichte in der magnetischen Röhre reduziert sich mit steigendem  $\gamma_e$ , da sich die Ionen für  $\gamma_i \gg 1,0$  nahezu entlang der Magnetfeldlinien bewegen und aufgrund des anziehenden Oberflächenpotentials alle Ionen absorbiert werden, dessen Magnetfeldlinie die Oberfläche des Staubteilchens tangiert bzw. durchdringt. Die Ionendichte  $n_i^{\text{av}}(B_\parallel)$  wird also für  $\gamma_i \gg 1,0$  durch den konstanten Ionenstrom ausgehend vom Simulationsrand auf das Staubteilchen erzeugt. Mit sinkendem Temperaturverhältnis nimmt auch die Ionendichte für  $\gamma_e, \gamma_i \gg 1,0$  in der Umgebung des Staubteilchens stark ab, wobei sie für  $\beta = 0,01$  fast bis auf Null absinkt.

Für den größten Radius  $R = 200 \mu\text{m}$  ist der Verlauf der Elektronen- Ionendichte senkrecht zur Magnetfeldrichtung  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_\perp)$  in Abbildung 5.12 (links) dargestellt. Ähnlich wie beim kleinsten Radius sinkt die Ionendichte zunächst mit steigendem  $\gamma_e$ , bevor sie für  $\gamma_e, \gamma_i \gg 1,0$  schließlich deutlich höher als im Fall ohne Magnetfeld und sogar größer als die ungestörte Plasmadichte  $n_0$  ausfällt, so wie es auch für das kleinste Staubteilchen der Fall ist. Es bildet sich also im Gegensatz zum Fall ohne Magnetfeld eine relativ „dicke“ Schicht (engl. thick sheath) aus Ionen um das größte Staubteilchen senkrecht zur Magnetfeldrichtung herum aus. Zudem verschwindet die quasineutrale Vorrandschicht (engl. pre-sheath), in welcher  $n_i^{\text{av}} \approx n_e^{\text{av}} < n_0$  gilt. Im Gegensatz zum kleinsten Radius steigt die Elektronendichte  $n_e^{\text{av}}(B_\perp)$  (gestrichelte Linie) für  $\gamma_e, \gamma_i \gg 1,0$  wieder leicht an, da die Ionendichte über der ungestörten Plasmadichte  $n_0$  liegt und damit entsprechend mehr Elektronen durch die positive Raumladungsdichte angezogen werden.

Der Verlauf der Elektronen- Ionendichte in Magnetfeldrichtung  $n_{e,i}^{\text{av}}(B_\parallel)$  ist für den größten Radius in Abbildung 5.12 (rechts) gezeigt. Analog zum Verlauf beim kleinsten Radius sinkt die Ionendichte jeweils mit steigendem  $\gamma_e$  bis deutlich unter die Elektronendichte  $n_e^{\text{av}}(B_\parallel)$ . Die Ionendichte verläuft für  $\gamma_e, \gamma_i \gg 1,0$  unabhängig vom Abstand zur Oberfläche des Staubteilchens jeweils nahezu konstant. Die Elektronendichte steigt auch in der magnetischen Röhre für  $\gamma_e, \gamma_i \gg 1,0$  wieder an, ähnlich wie die Dichte senkrecht zum Magnetfeld, da mit kleiner werdendem Gyrationradius entsprechend mehr Elektronen in der magnetischen Röhre verbleiben und entlang der Magnetfeldlinien zurückreflektiert werden.

## 5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen

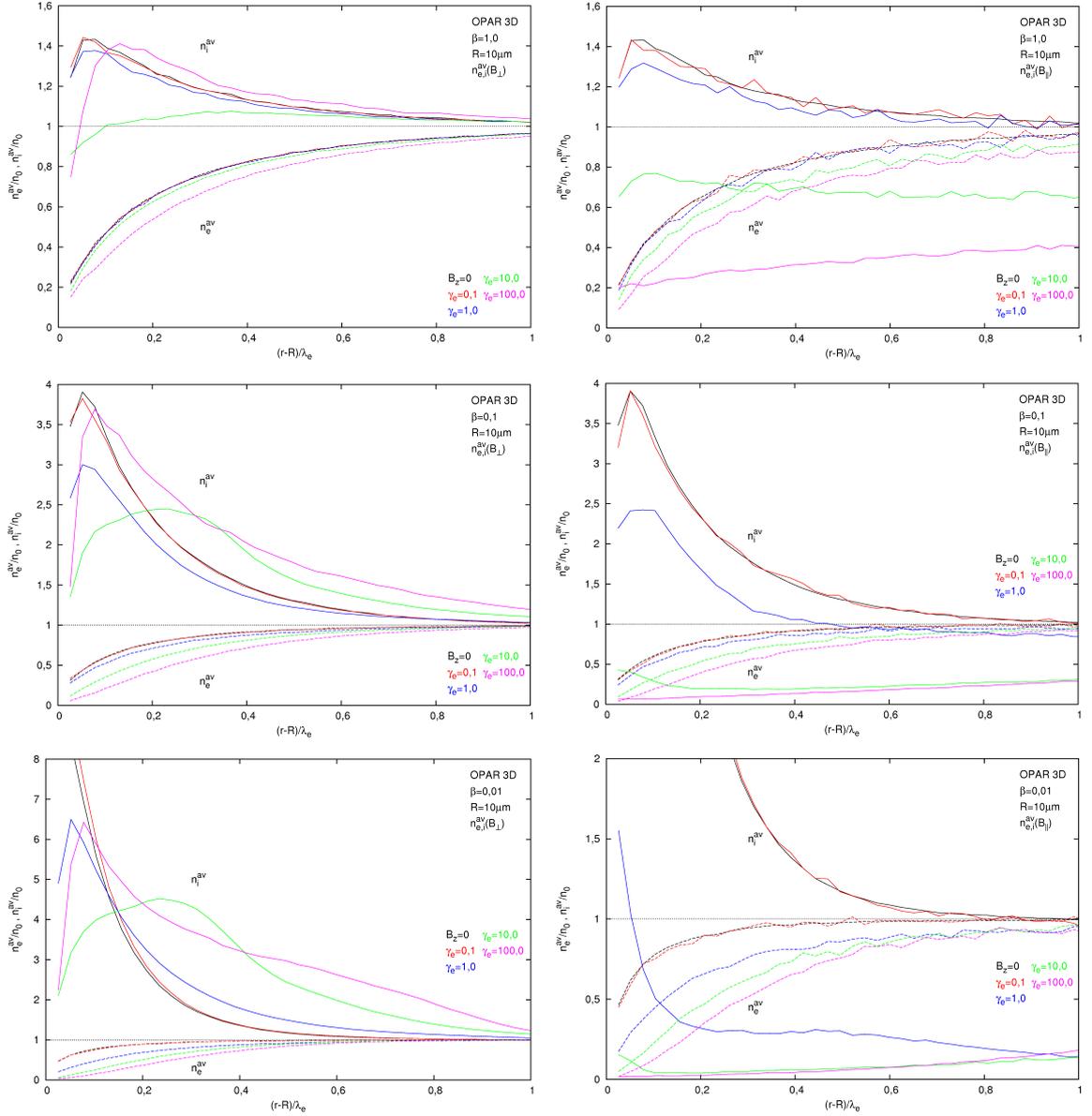


Abbildung 5.11.: Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte  $n_e^{av}$  und  $n_i^{av}$  aus den Simulationen mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  bei den drei Temperaturverhältnissen  $\beta$  sowie verschiedenen Verhältnissen  $\gamma_e$ . Es sind die räumlichen Teilchendichten  $n_{e,i}^{av}(B_\perp)$ ,  $n_{e,i}^{av}(B_\parallel)$  (farbige Kurven) und zum Vergleich der kugelsymmetrische Verlauf der Teilchendichte ohne ein Magnetfeld (schwarze Kurven) aus Abbildung 4.11 dargestellt. Die Dichten wurden alle 1.000 Zeitschritte ausgegeben und die arithmetische Mittelung wurde jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert, die jeweilige Dichte auf die anfänglich angesetzte Plasmadichte  $n_0$ . Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . Die jeweils gestrichelten und zum Staubteilchen abfallenden Kurven entsprechen der Elektronendichte, die durchgezogenen Kurven der Ionendichte.

## 5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen

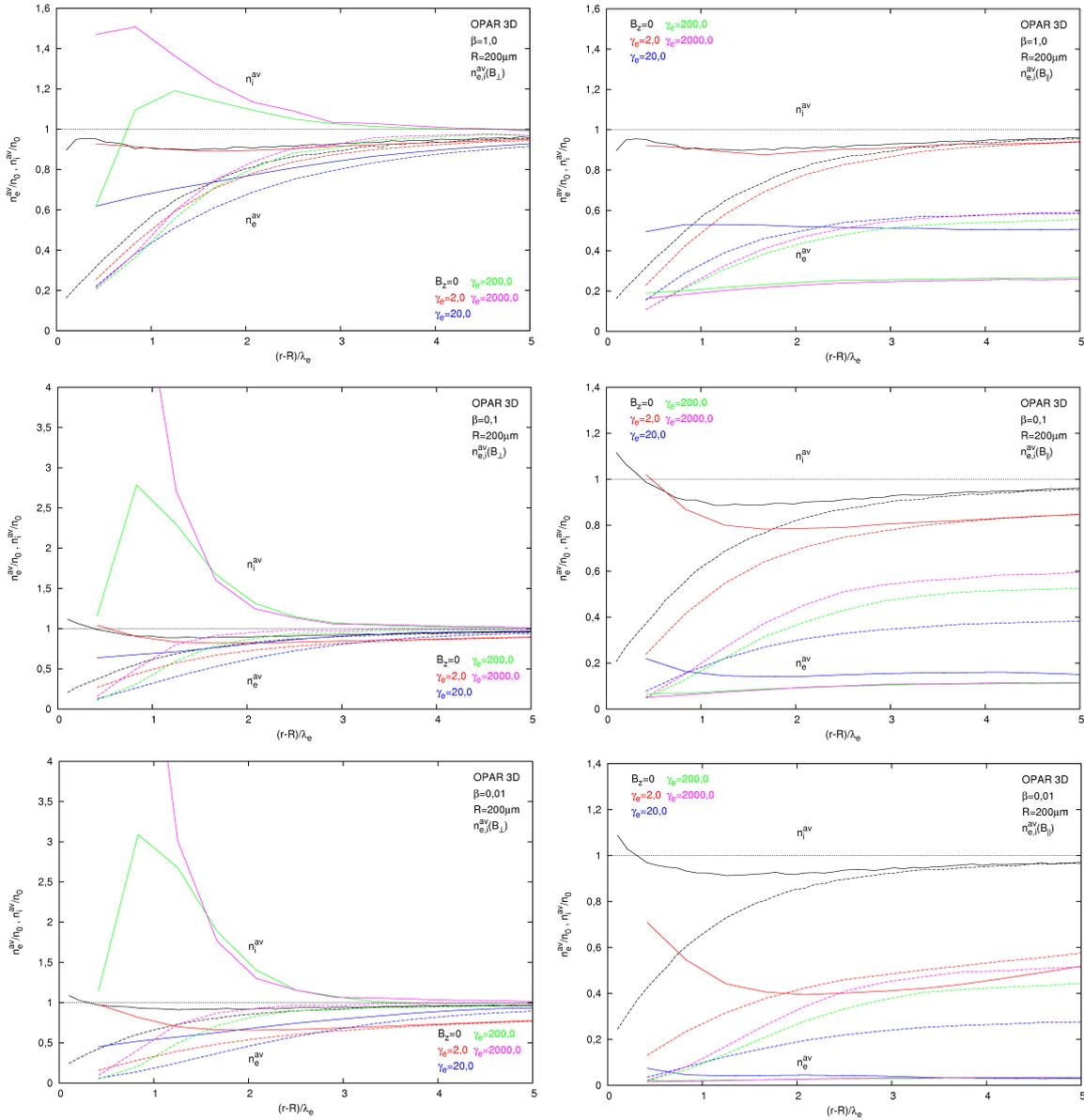


Abbildung 5.12.: Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte  $n_e^{av}$  und  $n_i^{av}$  aus den Simulationen mit dem Radius  $R = 200 \mu\text{m}$  bei den drei Temperaturverhältnissen  $\beta$  sowie verschiedenen Verhältnissen  $\gamma_e$ . Es sind die räumlichen Teilchendichten  $n_{e,i}^{av}(B_{\perp})$ ,  $n_{e,i}^{av}(B_{\parallel})$  (farbige Kurven) und zum Vergleich der kugelsymmetrische Verlauf der Teilchendichte ohne ein Magnetfeld (schwarze Kurven) aus Abbildung 4.11 dargestellt. Die Dichten wurden alle 1.000 Zeitschritte ausgegeben und die arithmetische Mittelung wurde jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  normiert, die jeweilige Dichte auf die anfänglich angesetzte Plasmadichte  $n_0$ . Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ . Die jeweils gestrichelten und zum Staubteilchen abfallenden Kurven entsprechen der Elektronendichte, die durchgezogenen Kurven der Ionendichte.

### 5.1.5. Verlauf des Potenzialprofils

In Abbildung 5.13 sind die radialen, gemittelten Potenzialprofile aus den Simulationen mit dem kleinsten und größten Staubteilchenradius bei verschiedenen Verhältnissen  $\gamma_e$  und den drei Temperaturverhältnissen  $\beta$  gezeigt. Die Mittelung der Profile wurde dabei ähnlich wie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben durchgeführt. Da allerdings der Abfall des Oberflächenpotenzials mit einem in  $z$ -Richtung überlagertem Magnetfeld nicht mehr kugelsymmetrisch bezüglich des Staubteilchens verläuft, wurden nun die vier radialen Profile in der  $x$ - $y$ -Ebene, welche senkrecht zu den magnetischen Feldlinien steht, zu einem Profil  $V^{\text{av}}(B_{\perp})$  (durchgezogene, farbige Linien) und die zwei radialen Profile  $V^{\text{av}}(B_{\parallel})$  in  $z$ -Richtung (gestrichelte, farbige Kurven) ebenfalls zu einem gemittelt. Die Profile wurden wieder jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer arithmetisch gemittelt, in welchen sich das Staubteilchen im Gleichgewichtszustand befand. Zum Vergleich ist jeweils der Verlauf des Potentials für den Fall ohne Magnetfeld aus Abbildung 4.12 gezeigt (schwarze Linie). Der Abstand  $r - R$  von der Oberfläche des Staubteilchens am linken Rand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  und das Potenzial auf das jeweilige gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht normiert.

Für den kleinsten Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  (Abbildung 5.13, links) bleibt für  $\beta = 1,0$  der rotationssymmetrische Verlauf des Potentials für alle  $\gamma_e$  fast exakt erhalten, obwohl der Verlauf der Teilchendichten wie im letzten Abschnitt diskutiert recht unterschiedlich ausfällt, wie auch in Abbildung 5.9 für  $\gamma_e = 1000$  zu erkennen ist. Die radialen Potenzialprofile  $V^{\text{av}}(B_{\perp})$  und  $V^{\text{av}}(B_{\parallel})$  verlaufen jeweils nahezu identisch zum Fall ohne Magnetfeld und damit zum Debye-Hückel-Potenzial nach (2.38) mit der linearisierten Debyelänge als Abschirmlänge, obwohl das Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht betragsmäßig viel höher ausfällt als im Fall ohne Magnetfeld. Dies ist auf den Potenzialverlauf in der Nähe des Staubteilchens zurückzuführen, welcher auch durch ein unabgeschirmtes Coulomb-Potenzial approximierbar ist und damit unabhängig von der Teilchendichte ist. Mit sinkendem Temperaturverhältnis und steigendem  $\gamma_e$  fällt das Potenzial dagegen jeweils etwas langsamer ab, insbesondere in  $z$ -Richtung, da der Verlauf nun nicht mehr durch ein unabgeschirmtes Coulomb-Potenzial approximierbar ist.

Für den größten Radius  $R = 200 \mu\text{m}$  (Abbildung 5.13, rechts) bleibt der rotationssymmetrische Verlauf des Potentials nur noch für  $\beta = 1,0$  bei  $\gamma_e = 2,0$  erhalten. Ähnlich wie beim Verlauf der Dichten fallen die Potentiale senkrecht zur Magnetfeldrichtung  $V^{\text{av}}(B_{\perp})$  mit steigendem  $\gamma_e$  zunächst langsamer im Vergleich zum Fall ohne Magnetfeld ab, bevor sie für  $\gamma_e \gg 1,0$  deutlich schneller abfallen, da hier wie im letzten Abschnitt diskutiert die Ionendichte größer als die ungestörte Plasmadichte  $n_0$  ausfällt. Mit steigendem  $\gamma_e$  fällt das Potenzial in Magnetfeldrichtung  $V^{\text{av}}(B_{\parallel})$  nicht auf Null sondern jeweils auf einen konstanten negativen Betrag ab, da sich wie diskutiert eine magnetische Röhre mit einer negativen Ladungsdichte ausbildet. Für  $\gamma_e = 20$  fällt das Potenzial senkrecht zum Magnetfeld  $V^{\text{av}}(B_{\perp})$  bei allen drei Temperaturverhältnissen zunächst langsamer und in größerer Entfernung vom Staubteilchen (bis ca.  $4 \lambda_e$ ) schneller ab als im Vergleich zum Fall ohne Magnetfeld. Dies korrespondiert mit dem Verlauf der Ionendichte in Abbildung 5.12 (links), welche jeweils deutlich geringer ausfällt und somit das negative Oberflächenpotenzial schwächer abgeschirmt wird als im Fall ohne Magnetfeld.

## 5.1. Dreidimensionale Simulationen von Magnetoplasmen mit Staubteilchen

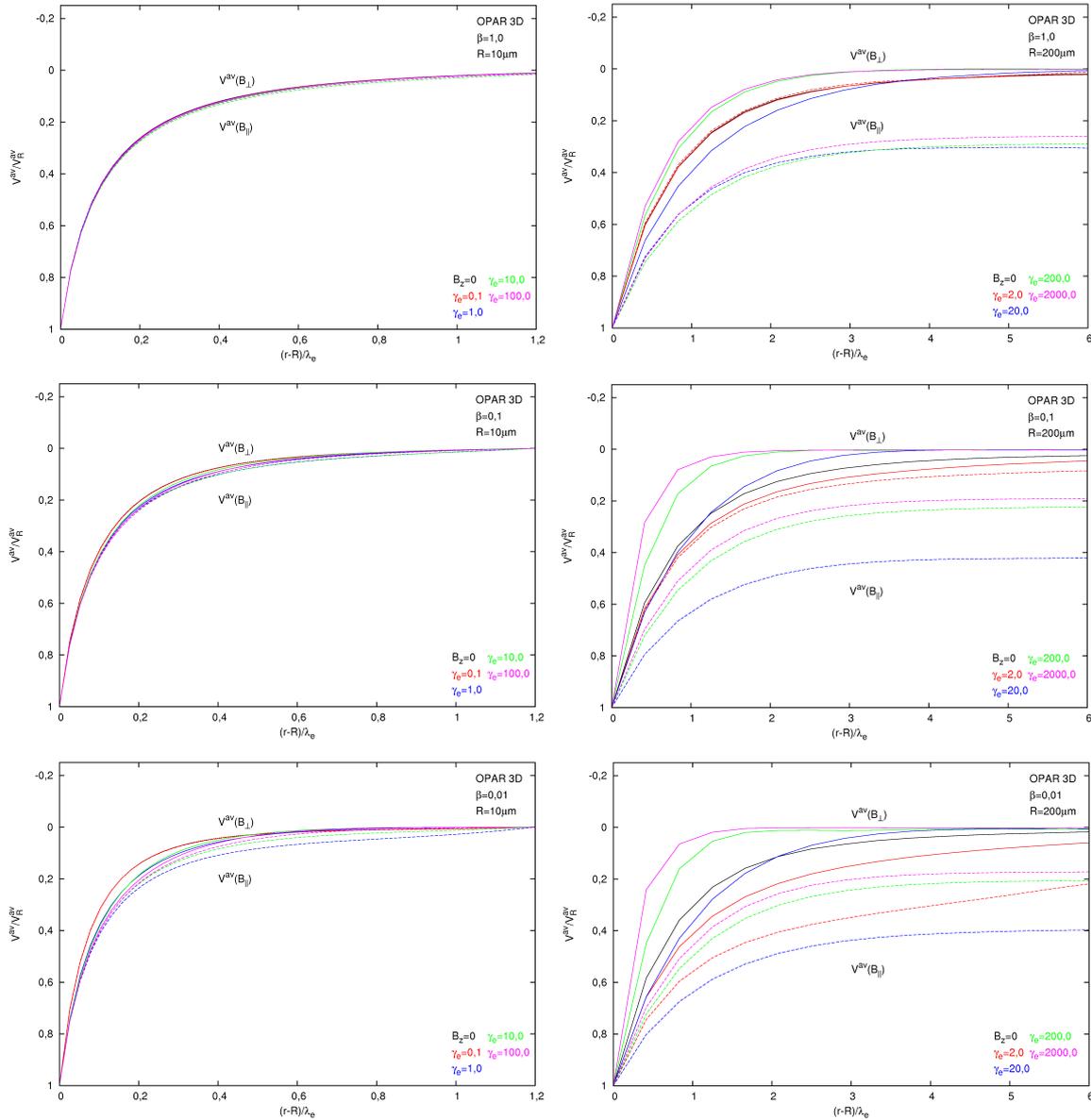


Abbildung 5.13.: Der gemittelte radiale Verlauf des Potentials  $V^{\text{av}}$  aus den Simulationen mit dem Radius  $R = 10 \mu\text{m}$  (links) und  $R = 200 \mu\text{m}$  (rechts) bei den drei Temperaturverhältnissen  $\beta$  sowie verschiedenen Verhältnissen  $\gamma_e$ . Dabei entspricht  $V^{\text{av}}(B_{\perp})$  (durchgezogene, farbige Linien) dem radialen Verlauf senkrecht zu den magnetischen Feldlinien,  $V^{\text{av}}(B_{\parallel})$  (gestrichelte, farbige Kurven) dem Verlauf in Magnetfeldrichtung. Zum Vergleich ist der rotationssymmetrische Verlauf ohne ein Magnetfeld (schwarze Kurven) aus Abbildung 4.12 dargestellt. Das Potenzial wurde alle 1.000 Zeitschritte ausgegeben und die arithmetische Mittelung wurde jeweils über die letzte Hälfte der Simulationsdauer durchgeführt. Der Abstand ist auf die Debyelänge  $\lambda_e$  und das Potenzial auf das jeweilige gemittelte Oberflächenpotential im Gleichgewicht  $V_R^{\text{av}}$  normiert. Die Oberfläche des Staubteilchens befindet sich am linken Rand bei  $r = R$ .

## 5. OPAR-Simulationen von staubigen Magnetoplasmen

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Die Wechselwirkung zwischen einem Plasma und darin enthaltenen Staubpartikeln ist im Universum allgegenwärtig und hat in den letzten zwei Dekaden sowohl in der Grundlagenforschung als auch in industriellen Anwendungen enorm an Bedeutung gewonnen. Seit der Entdeckung des aus Mikrometergroßen Partikeln bestehenden Plasmakristalls im Jahr 1994 sind dynamische Prozesse wie Phasenübergänge auf dem elementaren kinetischen Niveau direkt beobachtbar. In der Industrie werden in Beschichtungsverfahren zunehmend Plasmaprozesse eingesetzt, wobei die Kontamination mit Staubpartikeln oft unerwünscht ist und zu Ausschussware führt. Staubpartikel bestimmter Größe und Beschaffenheit können aber auch gezielt eingesetzt werden, um die Abscheidungsraten zu kontrollieren oder die Materialeigenschaften zu beeinflussen. In einem Plasma laden sich Staubteilchen durch die Wechselwirkung mit den Elektronen und Ionen im allgemeinen negativ auf und können eine Ladung von mehreren tausend Elementarladungen aufnehmen. Die Ladung fluktuiert dabei um einen Gleichgewichtszustand, welcher von der Größe des Staubteilchens und den Plasmaparametern abhängt. Die Gleichgewichtsladung bzw. das Gleichgewichtspotenzial stellt eines der wichtigsten Charakteristika eines staubigen oder komplexen Plasmas dar.

Mittels der OML-Theorie lässt sich das Gleichgewichtspotenzial in Abhängigkeit des Temperatur- und Massenverhältnisses der Ionen und Elektronen analytisch bestimmen. Allerdings werden in der OML-Theorie keine Potenzialbarrieren im effektiven Potenzial der Plasmateilchen berücksichtigt, welche jedoch insbesondere in einem abgeschirmten Potenzialverlauf wie z.B. dem Debye-Hückel-Potenzial auftreten können. Der Ionenstrom wird durch die Potenzialbarrieren verringert, wodurch der negative Betrag des Oberflächenpotenzials ansteigt. Die OML-Theorie stellt jedoch eine gute Approximation für den Fall von kleinen Staubteilchenradien im Vergleich von den Debyelängen des Plasmasystems dar ( $R < \lambda_e, \lambda_i$ ), da für diesen Fall der Potenzialverlauf in der unmittelbaren Umgebung des Staubteilchens nahezu wie ein (unabgeschirmtes) Coulomb-Potenzial ohne Potenzialbarrieren verläuft. Die OM-Theorie berücksichtigt auftretende Potenzialbarrieren und erlaubt die Bestimmung des Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht in Abhängigkeit des Staubteilchenradius. Die OM-Theorie beinhaltet jedoch implizite Abhängigkeiten, weshalb keine analytische Lösung möglich ist. Zudem ist die Bestimmung eines Potenzialprofils über die numerische Lösung der Poisson-Gleichung erforderlich.

In dieser Arbeit wurde mit Hilfe des Simulationscodes OPAR die Aufladung und das Gleichgewichtspotenzial von einzelnen, sphärischen Staubteilchen unterschiedlicher Größe untersucht. OPAR basiert auf dem „Particle-In-Cell“ Verfahren, wobei die Staubteilchen als innere und ortsfeste Randbedingungen mit einer zeitabhängigen Staubteilchenladung implementiert sind. Die Oberfläche eines Staubteilchens stellt eine vollständig absorbierende Kapazität dar, auf welcher sich die Oberflächenladung homogen verteilt.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Dynamisch simuliert wurden Elektronen und Ionen, wobei das Simulationsgebiet durch die äußeren Randbedingungen in ein „unendlich“ ausgedehntes, ungestörtes Maxwellplasma eingebettet ist. Es wurden ein-, zwei- und dreidimensionale Plasmasysteme mit insgesamt fünf verschiedenen Staubteilchenradien bei jeweils drei Temperaturverhältnissen (Ionen zu Elektronen) simuliert. Die Radien fallen dabei sowohl kleiner als auch größer als die Debyelängen des betrachteten Plasmasystems aus. Ein Staubteilchen lädt sich im Verlauf einer Simulation negativ auf bis ein Gleichgewichtszustand erreicht ist. Zunächst wurden Simulationen ohne ein überlagertes Magnetfeld betrachtet. Mit den eindimensionalen Simulationen in sphärischer Symmetrie konnte mit relativ geringem numerischen Aufwand gezeigt werden, dass die Simulationsergebnisse für kleine Staubteilchenradien eine sehr gute Übereinstimmung mit analytischen Theorien zeigen. Die gemittelten Oberflächenpotenziale im Gleichgewicht entsprechen in guter Näherung denen aus der OML-Theorie und der Potenzialverlauf wird durch ein Debye-Hückel-Potenzial approximiert. Mit steigendem Staubteilchenradius nimmt der Betrag des negativen Oberflächenpotenzials gemäß der OM-Theorie zu. In den dreidimensionalen Simulationen wurde dagegen ein größerer Gitterpunktastand angesetzt, um den numerischen Aufwand in einem akzeptablen Rahmen zu halten, wodurch die Ergebnisse aufgrund der größeren Auflösung einen systematischen Fehler von ca. +5% zeigen. Auch die zweidimensionalen Simulationen zeigen eine gute Übereinstimmung mit analytischen Theorien, wobei der Potenzialverlauf für kleine Radien durch eine Lösung der linearisierten, zylindersymmetrischen Poissongleichung approximiert wird. Die zweidimensionalen Staubteilchen stellen dabei „unendlich“ ausgedehnte „Stäbe“ dar. Die Ionendichte steigt in der Umgebung des Staubteilchens deutlich über die ungestörte Plasmadichte an, da die meisten Ionen, welche in Richtung des Staubteilchens beschleunigt werden, nicht vom Staubteilchen absorbiert, sondern reflektiert werden. Mit steigendem Radius geht der Verlauf der Teilchendichten zunehmend in den Verlauf nahe einer ebenen Plasmabegrenzung über und die Abschirmung des Oberflächenpotenzials wird durch die auftretenden Potenzialbarrieren zunehmend nichtlinear. Die OPAR-Simulationen erlauben also die realistische Untersuchung von Staubteilchen unterschiedlicher Größe über einen weiten Bereich der Plasmaparameter, wobei insbesondere der Übergang zwischen dem OML-Fall ( $R < \lambda_e, \lambda_i$ ) und dem OM-Fall ( $R \geq \lambda_e, \lambda_i$ ) darstellbar ist.

Eine vollständige Beschreibung von staubigen Plasmen muss auch den Einfluss von magnetischen Feldern berücksichtigen. In Magnetoplasmen werden geladene Teilchen entlang der Magnetfeldlinien auf Spiralbahnen gezwungen, wodurch die Elektronen- und Ionenströme auf ein sphärisches Staubteilchen nicht mehr rotationssymmetrisch verlaufen. Eine analytische Lösung des Gleichgewichtspotenzials in Abhängigkeit des Staubteilchenradius und der Größe des magnetischen Flusses ist nicht möglich. Die Bewegung der Elektronen wird aufgrund der viel kleineren Masse stärker an die Magnetfeldlinien gebunden als die der Ionen, weshalb auch der Elektronenstrom auf ein Staubteilchen stets stärker beeinflusst wird als der Ionenstrom. Auf dieser Grundlage lassen sich mit Hilfe der OML-Theorie qualitative Aussagen über das Oberflächenpotenzial treffen. Ist der wahrscheinlichste Gyrationradius der Elektronen kleiner als der Staubteilchenradius, der der Ionen aber noch größer ( $\gamma_i < 1, 0 < \gamma_e$ ), reduziert sich nur der Elektronenstrom auf das Staubteilchen aufgrund der Einfallrichtung entlang der Magnetfeldlinien um

die Hälfte. Durch diese Bedingung von magnetisierten Elektronen aber unmagnetisierten Ionen ergibt sich betragsmäßig ein kleineres Oberflächenpotenzial als im Fall ohne Magnetfeld. Sind die wahrscheinlichsten Gyrationenradien sowohl der Elektronen als auch der Ionen kleiner als der Staubteilchenradius ( $\gamma_e, \gamma_i > 1, 0$ ), reduziert sich auch der Ionenstrom um die Hälfte und wird zudem unabhängig vom Oberflächenpotenzial, da jedes Ion, welches sich entlang einer Magnetfeldlinie bewegt, die das Staubteilchen berührt, auch absorbiert wird. Aus dieser Bedingung von magnetisierten Elektronen und Ionen ergibt sich ein betragsmäßig höheres Oberflächenpotenzial als im Fall ohne Magnetfeld. In OPAR ist ein Magnetoplasma durch die Überlagerung des Simulationsgebietes mit einem homogenen und konstanten Magnetfeld erzeugt worden. Angesetzt wurden zehn verschiedene magnetische Flüsse, wobei die jeweiligen wahrscheinlichsten Gyrationenradien sowohl größer als auch kleiner als die fünf Staubteilchenradien ausfallen. Eine signifikante Zunahme des negativen Oberflächenpotenzials im Gleichgewicht tritt unabhängig vom Temperaturverhältnis erst ein, wenn der wahrscheinlichste Gyrationenradius der Elektronen deutlich kleiner als die Debyelänge  $\lambda_e$  wird. Allerdings fällt die betragsmäßige Zunahme des Oberflächenpotenzials in Abhängigkeit des Gyrationenradius bzw. des magnetischen Flusses umso größer aus, je größer der Staubteilchenradius im Vergleich zur Debyelänge  $\lambda_e$  ist. Die Oberflächenpotenziale zeigen insbesondere für kleine Gyrationenradien eine Abhängigkeit mit dem Verhältnis  $\gamma_e, \gamma_i$  und nicht direkt mit der magnetischen Flussdichte  $B$ . Für  $\gamma_e, \gamma_i \gg 1, 0$  streben die Oberflächenpotenziale unabhängig vom Staubteilchenradius einem konstanten Wert zu, welcher sich aus dem OML-Fall für magnetisierte Elektronen und Ionen ergibt. Im Bereich  $\gamma_i < 1, 0 < \gamma_e$  zeigt sich zwar ein leichtes Absinken des negativen Oberflächenpotenzials, jedoch nicht in dem Maße wie vom entsprechenden OML-Fall vorhergesagt. Der Fall von magnetisierten Elektronen aber unmagnetisierten Ionen existiert demnach in einem Maxwellplasma nicht, da der Ionenstrom auf das Staubteilchen bereits für  $\gamma_i < 1, 0 < \gamma_e$  in stärkerem Maße abnimmt als der Elektronenstrom. Die Abnahme des Ionenstroms wird durch die Zunahme des Gyrationenradius der Ionen verursacht, da diese im anziehenden Zentralpotenzial des Staubteilchens kinetische Energie aufnehmen. Wie mit den OPAR-Simulationen gezeigt werden konnte, nimmt der Gyrationenradius im Mittel um ca. 100% zu, wodurch Ionen mit einem entsprechenden Phasenwinkel die Oberfläche des Staubteilchens verfehlen können und nicht absorbiert werden. Die relative Zunahme des mittleren Gyrationenradius der Ionen ist dabei unabhängig von der Größe des magnetischen Flusses und des Staubteilchenradius. Für  $\beta < 1, 0$  tritt kein leichtes Absinken des negativen Oberflächenpotenzials mehr auf, da der wahrscheinlichste Gyrationenradius der Ionen aufgrund der geringeren kinetischen Energie entsprechend kleiner ausfällt und für  $\beta = 0, 01$  aufgrund des Massenverhältnisses von  $m_i/m_e = 100$  sogar gleich dem wahrscheinlichsten Gyrationenradius der Elektronen ist ( $\gamma_i = \gamma_e$ ). Somit nimmt der Ionenstrom in den Simulationen für alle  $\gamma_e, \gamma_i$  stets schneller ab als der Elektronenstrom.

Der Verlauf des Potenzials und der Ladungsdichte in der Umgebung des Staubteilchens zeigt nur noch bezüglich der Magnetfeldrichtung eine Rotationssymmetrie. Entlang des Staubteilchens und parallel zur Magnetfeldrichtung bildet sich ein zylinderförmiges Volumen mit einer negativen Ladungsdichte aus („magnetische Röhre“), welche bis zum Rand des Simulationsgebietes reicht. Die negative Ladungsdichte wird zum einem durch

niederenergetische Elektronen erzeugt, welche das negative Oberflächenpotenzial nicht überwinden konnten und daher entlang der Magnetfeldlinien zurück reflektiert werden. Zum anderen werden die meisten Ionen, die sich entlang einer Magnetfeldlinie bewegen welche das Staubteilchen berührt, auch absorbiert, wodurch die Ionendichte stark absinkt. Mit steigendem Staubteilchenradius im Vergleich zu den Debyelängen nimmt in der magnetischen Röhre auch der Betrag der negativen Ladungsdichte zu, da die Bewegung der reflektierten Elektronen aufgrund des steigenden Radius der Röhre zunehmend durch das Magnetfeld bestimmt wird. Bei kleineren Staubteilchen können entsprechend mehr Elektronen und Ionen aus oder in die magnetische Röhre driften.

In der Umgebung des Staubteilchens senkrecht zur Magnetfeldrichtung steigt die Ionendichte mit zunehmendem  $\gamma_e, \gamma_i$  sogar für die größten Staubteilchenradien über die ungestörte Plasmadichte hinaus an, da nur noch die Ionen vom Staubteilchen absorbiert werden, deren Magnetfeldlinien die Oberfläche des Staubteilchens tangieren. Für  $\gamma_e, \gamma_i \gg 1, 0$  geht der Ionenstrom senkrecht zur Magnetfeldrichtung gegen Null. Innerhalb der magnetischen Röhre ist die Ionendichte deutlich reduziert und kleiner als die Elektronendichte, jedoch fällt die Elektronendichte kurz vor der Oberfläche des Staubteilchens stets unter die Ionendichte, womit auch in Magnetfeldrichtung eine geringfügige Abschirmung des Potenzials stattfindet.

Für kleine Staubteilchenradien im Vergleich zu den Debyelängen bleibt der rotationsymmetrische Verlauf des Potenzials für alle  $\gamma_e, \gamma_i$  erhalten, auch wenn der Teilchendichteverlauf recht unterschiedlich ist. Zurückzuführen ist dies auf den Potenzialverlauf in der Nähe des Staubteilchens, welcher im Fall ohne Magnetfeld auch durch ein unabgeschirmtes Coulomb-Potenzial oder Debye-Hückel-Potenzial mit der linearisierten Debyelänge als Abschirmlänge approximierbar und damit unabhängig von der Teilchendichte ist.

## Ausblick

Das Forschungsgebiet der staubigen und komplexen Plasmen hat in den letzten zwei Dekaden ein enormes Wachstum erfahren. Das bessere Verständnis der Vorgänge in einem mit mikropartikeln durchsetzten Plasmas hat nicht nur wertvolle Beiträge für eine breite Grundlagenforschung geleistet, sondern auch technologisch viele neue Möglichkeiten hervorgebracht, wobei dies auch in Zukunft noch zu erwarten ist. Die erfolgreichen Plasmakristallexperimente auf der internationalen Raumstation werden ständig erweitert und auch in erdgebundenen Laboren sind einige Großprojekte geplant. Dabei rückt insbesondere die Erforschung der komplexen Magnetoplasmen in den Vordergrund, da nahezu alle Plasmen auch mit Magnetfeldern durchsetzt sind und deren Einfluss nicht immer zu vernachlässigen ist. Zudem können externe Magnetfelder als Kontrollinstrument eingesetzt werden, um beispielsweise in Plasmabeschichtungsverfahren die unerwünschten Staubpartikel herauszufiltern oder die Beschichtungsraten zu steuern.

In dieser Arbeit wurden mit dem OPAR-Code einzelne, isolierte Staubteilchen betrachtet. In einem komplexen Plasma besteht allerdings eine intensive Wechselwirkung unter den Partikeln, was zu einer starken Beeinflussung der Ladungsströme und damit des Oberflächenpotenzials im Vergleich zum isolierten Fall führt. Die Teilchendichten sind

innerhalb eines Plasmakristalls stark reduziert, wodurch die Oberflächenladung relativ klein ausfällt. Der OPAR-Code erlaubt auch die Berücksichtigung von mehreren inneren Randbedingungen nebeneinander. Hierdurch wird die Simulation eines ortsfesten Clusters von Staubteilchen möglich, wobei der Abstand zwischen den Staubteilchen einstellbar ist. Neben dem Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht könnten auch die Coulomb-Kräfte unter den einzelnen Staubteilchen in Abhängigkeit des Abstands und des Staubteilchenradius studiert werden. Mit OPAR wird also in Zukunft die Simulation eines komplexen Plasmas mit ortsfesten Partikeln möglich sein. Zusätzlich wäre auch die Implementierung von nicht-sphärischen, inneren Randbedingungen möglich. Somit könnten beispielsweise elongierte, zylinderförmige Staubteilchen untersucht werden.

## *6. Zusammenfassung und Ausblick*

# A. Andere Aufladungsprozesse von Staubteilchen

Die Wechselwirkung mit Plasmateilchen führt zu einer Aufladung von Staubteilchen in einem Plasma, wie in Kapitel 2 ausführlich diskutiert wurde. In der folgenden Übersicht sind weitere Prozesse erläutert, welche die Ladung von Staubteilchen unter bestimmten Bedingungen beeinflussen können. Eine ausführliche Behandlung dieser insbesondere für astrophysikalische Plasmen relevanten Prozesse ist in Mendis et al. [114] zu finden. Unter Laborbedingungen sind diese üblicherweise vernachlässigbar [115].

## Sekundäremission

Beim Aufprall von Elektronen, Ionen oder Neutralgasteilchen auf ein Staubteilchen können diese in die Oberfläche eindringen und durch Abgabe von kinetischer Energie eine Sekundäremission von Elektronen und Ionen auslösen. Neben den Material- und Oberflächeneigenschaften des Staubteilchens ist für diesen Effekt vor allem die Aufprallenergie entscheidend. Da Ionen und Neutralgasteilchen eine vielfach geringere kinetische Energie besitzen als Elektronen, sind Ionen- oder Neutralgasstöße in Bezug auf die Beeinflussung der Staubteilchenladung zu vernachlässigen. Eine signifikante Sekundäremission von Elektronen erfordert allerdings eine Energie bzw. Temperatur der auftreffenden Elektronen von mehr als 50 eV [97].

## Photoelektrischer Effekt

Treffen Photonen mit einer ausreichenden Energie auf die Oberfläche eines Staubteilchens, können Elektronen freigesetzt werden, falls die Photonenenergie größer als die Austrittsarbeit des Materials ist. Für die meisten Materialien liegt die Austrittsarbeit bei einigen eV, weshalb insbesondere ultraviolettes (UV) Licht den photoelektrischen Effekt auslösen kann. In der UV-Strahlung der Sonne können durch den Elektronenverlust Staubteilchen, Raumsonden und Satelliten eine positive Ladung annehmen. Sehr junge, neu entstandene Sterne erzeugen eine intensive UV-Strahlung, in welcher sich Staubteilchen positiv aufladen, was aufgrund der elektrostatischen Anziehung zu einem beschleunigtem Staubwachstum führen kann, siehe auch Kapitel 1.3. Zur Untersuchung von Staubteilchen in einem Laborplasma werden UV-Strahler eingesetzt, mit welchen eine gezielte Manipulation der Staubteilchenladung möglich ist [86].

### Thermionische Emission

Eine starke Erwärmung der Staubteilchen in einem Plasma kann zu einer thermionischen Emission von Ionen und Elektronen führen, wenn die thermische Energie größer als die Austrittsarbeit des Materials wird. Thermische Energie wird dabei zum einen durch Stöße mit Elektronen und Ionen auf das Staubteilchen übertragen, zum anderen durch die Rekombination der Elektronen und Ionen auf der Oberfläche. Wie in Shukla et al. [97] gezeigt, können Staubteilchen im Mikrometerbereich durch einen Infrarotlaser ausreichend erhitzt werden, um einen signifikanten Fluss von thermionischen Elektronen hervorzurufen.

### Feldemission

Nimmt ein Staubteilchen ein sehr hohes Oberflächenpotenzial an, können Elektronen und Ionen durch den quantenmechanischen Tunneleffekt die Potenzialbarriere überwinden und emittiert werden. Hierzu ist eine elektrische Feldstärke von  $10^8$  bis  $10^9$  V/m nötig [42]. Durch den Verlust von Ladungsträgern wird das maximal erreichbare Oberflächenpotenzial eines Staubteilchens auf  $eV_R^{\max} = 100 \cdot R \text{ eV}$  ( $R$  in  $\mu\text{m}$ ) begrenzt [42]. Üblicherweise betragen die Oberflächenpotenziale für Staubteilchen im Mikrometerbereich allerdings nur einige eV.

### Radioaktivität

Sind geladene Staubteilchen  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Strahlung ausgesetzt, kann der oben beschriebene Effekt der Sekundäremission ausgelöst werden. Staubteilchen können aber auch selbst radioaktiv werden und durch die Strahlungsemission Ladungsträger verlieren. Dieser Effekt tritt insbesondere in Fusionsreaktoren auf [6], siehe auch Kapitel 1.1. Die in Nova- und Supernova-Explosionen entstehenden Staubteilchen aus Nickel ( $\text{Ni}^{22}$ ) und Aluminium ( $\text{Al}^{26}$ ) sind möglicherweise stark radioaktive  $\beta$ -Strahler und können sich in Abhängigkeit der Größe des Staubteilchens durch den Elektronenverlust sogar positiv aufladen [97]. Jedoch ist der natürliche Anteil an radioaktivem Material für gewöhnlich zu gering, um die Ladung eines Staubteilchens signifikant beeinflussen zu können [42].

### Stoßionisation

Das Aufschlagen eines Ions oder Neutralgasteilchens mit ausreichender Energie auf die Oberfläche eines Staubteilchens kann sowohl ein Atom auf der Oberfläche als auch ein stoßendes Neutralgasteilchen selbst ionisieren. Das Staubteilchen kann hierdurch einen Ladungsträger verlieren oder gewinnen. Eine signifikante Beeinflussung der Staubteilchenladung wird durch diesen Effekt allerdings nur bei einer hohen Neutralgasdichte oder Energie erreicht [97].

## B. Geschwindigkeit des magnetischen Führungszentrums

Der Gyrationradius eines geladenen Teilchens in einem homogenen Magnetfeld lässt sich über das Gleichsetzen von Zentrifugalkraft und magnetischer Lorentzkraft vektoriell als

$$\vec{r}_g = \frac{m}{qB_z^2} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{B.1})$$

ausdrücken. Es sei ein homogenes Magnetfeld in  $z$ -Richtung angenommen:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

womit für (B.1) folgt:

$$\vec{r}_g = \frac{m}{qB_z^2} \cdot \begin{pmatrix} v_y B_z \\ -v_x B_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

und damit für den Betrag:

$$|\vec{r}_g| = r_g = \frac{m}{qB_z^2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{mv_\perp}{qB_z^2} \quad \text{siehe (2.49)} \quad (\text{B.4})$$

mit

$$\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{v}_\perp| = v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (\text{B.5})$$

Der Ort  $\vec{r}_c$  des Führungszentrums lässt sich nach Abbildung B.1 als

$$\vec{r}_c = \vec{r} + \vec{r}_g \quad (\text{B.6})$$

darstellen, wobei  $\vec{r}$  der Ort des Teilchens ist. Die zeitliche Ableitung ergibt die Geschwindigkeit des Führungszentrums:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}_g}{dt} = \vec{v} + \frac{m}{qB_z^2} \cdot \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{B} \right) \quad (\text{B.7})$$

## B. Geschwindigkeit des magnetischen Führungszentrums

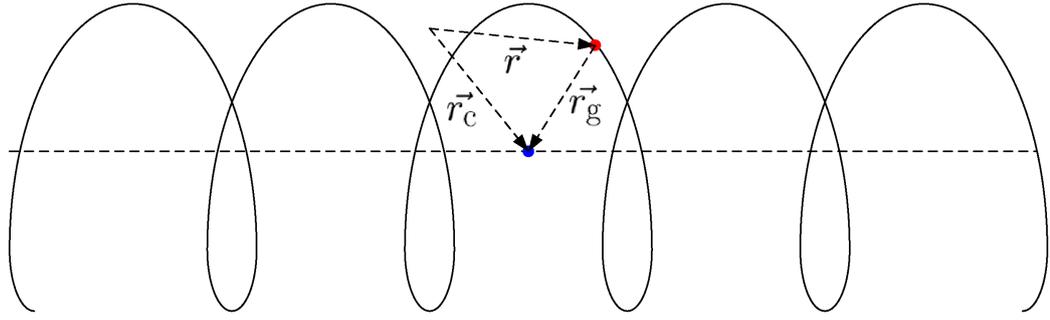


Abbildung B.1.: Geladene Teilchen führen eine Spiralbewegung oder Helixbahn (durchgezogene Linien) um Magnetfeldlinien (gestrichelte Linie) aus. Der Mittelpunkt dieser Spiralbewegung am Ort  $\vec{r}_c$  (blauer Punkt) wird Führungszentrum genannt.  $\vec{r}$  ist der Ort des Teilchens (roter Punkt),  $\vec{r}_g$  ist der Gyrationradius nach (B.1).

Setzt man in (B.7) die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (\text{B.8})$$

ein, ergibt sich

$$\vec{v}_c = \vec{v} + \frac{1}{B_z^2} \cdot \left( \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \times \vec{B} \quad . \quad (\text{B.9})$$

Mit der Vektoridentität

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{v} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{v} = -B_z^2 \vec{v}_\perp \quad (\text{B.10})$$

eingesetzt in (B.9) folgt

$$\vec{v}_c = \vec{v} + \frac{1}{B_z^2} \cdot \left( \vec{E} \times \vec{B} - B_z^2 \vec{v}_\perp \right) = \vec{v}_\parallel + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_z^2} \quad , \quad (\text{B.11})$$

mit

$$\vec{v}_\parallel = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} \quad , \quad |\vec{v}_\parallel| = v_\parallel = v_z \quad (\text{B.12})$$

Der erste Term beschreibt die Bewegung parallel zum Magnetfeld, der zweite Term die  $\vec{E} \times \vec{B}$  - Drift des Teilchens.

# C. Debye-Hückel-Theorie

Die eindimensionale Poissongleichung lautet

$$\Delta V(r) = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_e - n_i) \quad , \quad (\text{C.1})$$

wobei  $n_e$  und  $n_i$  die Elektronen- und Ionendichte ist. Für die Dichten sei folgende Boltzmannverteilung angenommen:

$$n_e(r) = n_0 e^{\frac{eV(r)}{kT_e}} \quad \text{und} \quad n_i(r) = n_0 e^{\frac{-eV(r)}{kT_i}} \quad . \quad (\text{C.2})$$

$n_0$  sei dabei eine konstante Plasmadichte in genügend großer Entfernung vom Staubteilchen. Unter der Annahme  $|eV/kT_{e,i}| \ll 1$  werden die Dichten nun linearisiert:

$$n_e(r) = n_0 \left( 1 + \frac{eV(r)}{kT_e} \right) \quad \text{und} \quad n_i(r) = n_0 \left( 1 - \frac{eV(r)}{kT_i} \right) \quad . \quad (\text{C.3})$$

Mit den linearisierten Dichten eingesetzt in (C.1) ergibt sich:

$$\Delta V(r) = V(r) \left( \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k T_e} + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k T_i} \right) \quad . \quad (\text{C.4})$$

Die Ausdrücke in der Klammer entsprechen dabei der Debyelänge der Elektronen und Ionen,

$$\frac{1}{\lambda_e^2} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k T_e} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\lambda_i^2} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k T_i} \quad , \quad (\text{C.5})$$

welche zu der linearisierten Debyelänge zusammengefasst werden:

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{\lambda_e^2} + \frac{1}{\lambda_i^2} \quad . \quad (\text{C.6})$$

Die linearisierte Poissongleichung lautet damit:

$$\Delta V(r) = \frac{V(r)}{\lambda_1^2} \quad . \quad (\text{C.7})$$

Gleichung (C.7) hat folgende analytische Lösung:

$$V(r) = V_R \frac{R}{r} e^{(R-r)/\lambda_1} \quad , \quad (\text{C.8})$$

### C. Debye-Hückel-Theorie

wobei  $V_R = V(R)$  das Oberflächenpotenzial des Staubteilchens mit dem Radius  $R$  ist. (C.8) wird auch abgeschirmtes Coulomb-Potenzial oder *Debye-Hückel-Potenzial* [12] genannt.  $\lambda_1$  ist die sogenannte Abschirmlänge, welche hier durch die linearisierte Debyelänge (C.6) gegeben ist. Die Abschirmlänge gibt die charakteristische Längenskala an, auf der die Ladung des Staubteilchens abgeschirmt wird und das Oberflächenpotenzial  $V_R$  abfällt. In der linearisierten Debyesphäre  $\lambda_1$  um das Staubteilchen herum ist damit die Ionendichte signifikant erhöht. Die Herleitung des Debye-Hückel-Potenzials (C.8) unterliegt der explizierten Annahme einer linearisierten Boltzmannverteilung. Der Gültigkeitsbereich dieses Potenzialprofils wird im Folgenden diskutiert.

Nahe dem Staubteilchen befindet sich das Plasma nicht mehr im Gleichgewicht, weshalb die Annahme einer Boltzmannverteilung insbesondere für die Ionen nicht mehr gerechtfertigt ist. Die Ionendichte lässt sich allgemein als Integral über die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit darstellen:

$$n_i(r) = \int_v f^{3D}(\vec{v}) d^3v \quad . \quad (C.9)$$

Mit (2.13) und der Annahme einer monoenergetischen Verteilungsfunktion stellt Daugherty et al. [101] die Ionendichte unter Berücksichtigung der OM-Theorie wie folgt dar:

$$n_i(r) = \frac{n_0}{2} \left( \sqrt{1 - \frac{eV(r)}{kT_i}} + \sqrt{1 - \frac{eV(r)}{kT_i} - \frac{R^2}{r^2} \left(1 - \frac{eV_R}{kT_i}\right)} \right) \quad , \quad (C.10)$$

wobei hier einem Ansatz von Bernstein & Rabinowitz [116] gefolgt wird. Der Ausdruck (C.10) berücksichtigt die ansteigende Ionendichte gegenüber dem ungestörten Plasma in der Umgebung des negativ geladenen Staubteilchens. Das Ansteigen der Ionendichte wird dabei durch die sphärische Form des Staubteilchens verursacht. Die meisten Ionen besitzen einen signifikanten Drehimpuls, wodurch die Ionen eine orbitale Bewegung um das Staubteilchen ausführen. Viele der Ionen werden aber nicht vom Staubteilchen absorbiert, sondern an Potenzialbarrieren reflektiert, was zu einer Erhöhung der Dichte um das Staubteilchen führt. Eine charakteristische Längenskala für die erhöhte Ionendichte gibt dabei die Abschirmlänge  $\lambda_L$  an. Linearisiert man (C.10) mit  $R/r \ll 1$ , ergibt sich

$$n_i(r) = n_0 \sqrt{1 - \frac{eV(r)}{kT_i}} \approx n_0 \left(1 - \frac{eV(r)}{2kT_i}\right) \quad , \quad (C.11)$$

womit sich eingesetzt in die Poissongleichung zusammen mit der linearisierten Boltzmannverteilung der Elektronen (C.2) wieder das Debye-Hückel-Potenzial ergibt, wobei die linearisierte Debyelänge in diesem Fall durch

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{\lambda_e^2} + \frac{2}{\lambda_i^2} \quad (C.12)$$

gegeben ist. Der Faktor 2 entsteht hier durch die Reihenentwicklung der Wurzeln in (C.10). Die Poissongleichung (C.1) ist mit der unlinearisierten Ionen- (C.10) und Elektronendichte (C.2) nicht mehr analytisch lösbar. In Daugherty et al. [101] wird daher

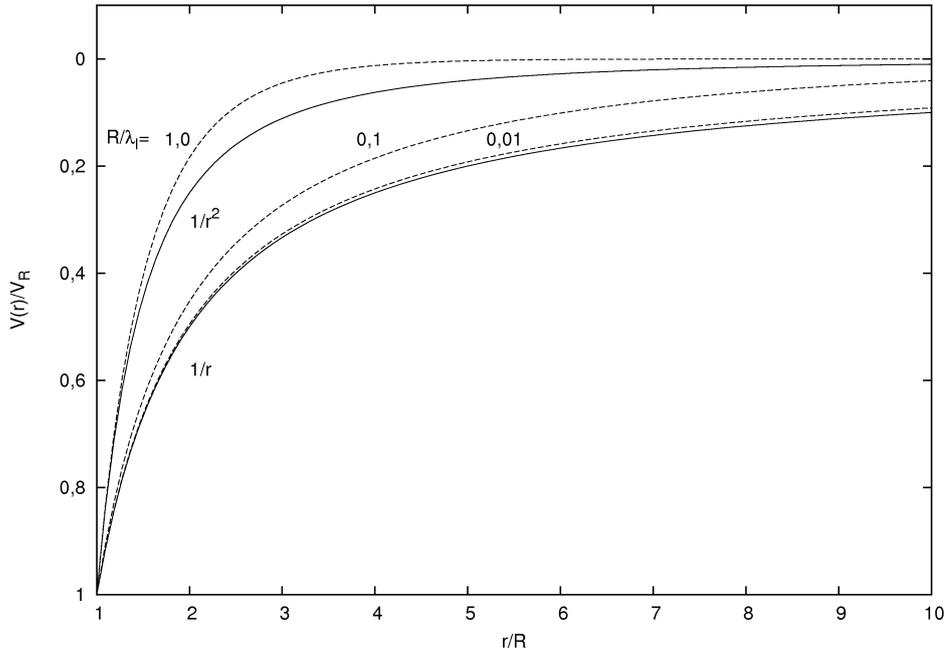


Abbildung C.1.: Das Coulomb-Potenzial  $V(r) = V_R R/r$ , das Potenzial  $V(r) = V_R R/r^2$  (durchgezogene Linien) sowie das Debye-Hückel-Potenzial nach (C.8) (gestrichelte Linien) für die Verhältnisse  $R/\lambda_1 = 1; 0,1$  und  $0,01$ . Der (dimensionslose) Abstand  $r$  ist auf den Radius  $R$ , das Potenzial  $V(r)$  auf das Oberflächenpotenzial  $V_R$  normiert. Nahe dem Staubteilchen verläuft das Debye-Hückel-Potenzial für  $R/\lambda_1 \ll 1$  nahezu wie das Coulomb-Potenzial. Während das Coulomb-Potenzial stets langsamer als  $1/r^2$  abfällt, fällt das Debye-Hückel-Potenzial im Falle von  $R/\lambda_1 < 1$  für kleine  $r$  zwar auch langsamer ab als das  $1/r^2$ -Potenzial, allerdings strebt es aufgrund des exponentiellen Abfalls bei großen Abständen  $r \gg R$  in jedem Fall schneller gegen Null als das  $1/r^2$ -Potenzial.

eine numerische Lösung der Poissongleichung vorgestellt. Für die Elektronendichte wird dazu analog zu (C.10) ein ähnlicher Ausdruck verwendet. Allerdings zeigt sich dabei kein signifikanter Unterschied im numerisch bestimmten Potenzialprofil im Vergleich zur Verwendung einer Boltzmannverteilung nach (C.2), da durch das abstoßende Oberflächenpotenzial die Dichteverteilung der Elektronen kaum beeinflusst wird. Die Ergebnisse in Daugherty et al. [101] zeigen, dass das Debye-Hückel-Potenzial für kleine Verhältnisse von  $R/\lambda_1$  eine sehr gute Approximation des numerisch bestimmten Potenzialprofils darstellt, obwohl die Linearisierung der Dichten in (C.3) mit  $|eV/kT_{e,i}| \ll 1$  nahe dem Staubteilchen in jedem Fall offensichtlich nicht zutrifft. Allerdings fällt das Potenzial in der unmittelbaren Umgebung des Staubteilchen immer nahezu mit  $1/r$  ab, d.h. wie ein Coulomb-Potenzial. Für kleine  $r$  verläuft das Debye-Hückel-Potenzial (C.8) für  $R/\lambda_1 \ll 1$  aber gerade annähernd wie ein unabgeschirmtes Coulomb-Potenzial. In größerer Entfernung vom Staubteilchen wird die Bedingung  $|eV/kT_{e,i}| \ll 1$  dann schnell erfüllt. Abbildung C.1 verdeutlicht das Verhalten des Debye-Hückel-Potenzials nach (C.8) für verschiedene Verhältnisse von  $R/\lambda_1$ . Zum Vergleich ist das Coulomb-Potenzial

### C. Debye-Hückel-Theorie

$V(r) = V_R R/r$  gezeigt. Die Einschränkung  $R/\lambda_1 \ll 1$  muss gemacht werden, da diese mit der Linearisierung  $R/r \ll 1$  in (C.11) korrespondiert. Ist der Radius  $R$  nicht mehr klein gegen die linearisierte Debyelänge  $\lambda_1$ , stellt das Debye-Hückel-Potenzial nur dann eine gute Approximation des numerisch bestimmten Potenzialprofils dar, wenn die Abschirmlänge im Debye-Hückel-Potenzial (C.8) entsprechend angepasst wird. In Daugherty et al. [101] wird diese Abschirmlänge durch anfitzen eines Debye-Hückel-Potenzials an das numerisch bestimmte Potenzialprofil für verschieden große Radien bestimmt. Dabei zeigt sich, dass die Abschirmlänge mit dem Radius bis in die Größenordnung der Debyelänge der Elektronen ansteigt.

In (2.31) wurde eine Bedingung für den Gültigkeitsbereich der OML-Theorie hergeleitet:

$$\frac{V(r)}{V_R} > \frac{R^2}{r^2} \quad . \quad (C.13)$$

Diese Bedingung ist nur dann erfüllt, wenn das Potenzial  $V(r)$  stets langsamer als  $1/r^2$  abfällt. In Abbildung C.1 ist ein Potenzial  $V(r) = V_R R/r^2$  gezeigt. Während das Coulomb-Potenzial stets langsamer als  $1/r^2$  abfällt, fällt das Debye-Hückel-Potenzial (C.8) im Falle von  $R/\lambda_1 \ll 1$  für kleine  $r$  zwar auch langsamer ab als das  $1/r^2$ -Potenzial, allerdings strebt es aufgrund des exponentiellen Abfalls bei großen Abständen  $r \gg R$  in jedem Fall schneller gegen Null als  $1/r^2$ . Die Bedingung (C.13) wird also vom Debye-Hückel-Potenzial selbst für  $R/\lambda_1 \ll 1$  nicht überall erfüllt.

## D. Abbildungsvorschrift in einem mehrdimensionalen Gitter

In einem zweidimensionalen numerischen Gitter, siehe Abbildung D.1, wird eine Ladung  $q$  am Ort  $\vec{r} = (r_x, r_y)$  durch lineare Interpolation auf vier benachbarte Gitterpunkte verteilt:

$$\begin{aligned}
 Q_{i,j} &= \frac{q}{\Delta x^2} |r_x - X_{i+1}| |r_y - X_{j+1}| \\
 Q_{i+1,j} &= \frac{q}{\Delta x^2} |r_x - X_i| |r_y - X_{j+1}| \\
 Q_{i,j+1} &= \frac{q}{\Delta x^2} |r_x - X_{i+1}| |r_y - X_j| \\
 Q_{i+1,j+1} &= \frac{q}{\Delta x^2} |r_x - X_i| |r_y - X_j| \quad , \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

wobei  $X_i$  und  $X_j$  die Koordinaten des Gitterpunktes  $\vec{X} = (X_i, X_j)$  sind, für den gilt:  $r_x \geq X_i$  und  $r_y \geq X_j$ , siehe Abbildung D.1.  $Q_{i,j}$  bezeichnet die zugewiesene Ladung auf den entsprechenden Gitterpunkt,  $\Delta x$  ist der Gitterpunkt Abstand. In einem dreidimensionalen numerischen Gitter geschieht die Verteilung einer Ladung  $q$  am Ort  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$  auf acht benachbarte Gitterpunkte (siehe Abbildung D.2):

$$\begin{aligned}
 Q_{i,j,k} &= \frac{q}{\Delta x^3} |r_x - X_{i+1}| |r_y - X_{j+1}| |r_z - X_{k+1}| \\
 Q_{i+1,j,k} &= \frac{q}{\Delta x^3} |r_x - X_i| |r_y - X_{j+1}| |r_z - X_{k+1}| \\
 Q_{i,j+1,k} &= \frac{q}{\Delta x^3} |r_x - X_{i+1}| |r_y - X_j| |r_z - X_k| \\
 Q_{i+1,j+1,k} &= \frac{q}{\Delta x^3} |r_x - X_i| |r_y - X_j| |r_z - X_{k+1}| \\
 Q_{i,j,k+1} &= \frac{q}{\Delta x^3} |r_x - X_{i+1}| |r_y - X_{j+1}| |r_z - X_k| \\
 Q_{i+1,j,k+1} &= \frac{q}{\Delta x^3} |r_x - X_i| |r_y - X_{j+1}| |r_z - X_k| \\
 Q_{i,j+1,k+1} &= \frac{q}{\Delta x^3} |r_x - X_{i+1}| |r_y - X_j| |r_z - X_k| \\
 Q_{i+1,j+1,k+1} &= \frac{q}{\Delta x^3} |r_x - X_i| |r_y - X_j| |r_z - X_k| \quad , \quad (D.2)
 \end{aligned}$$

wobei  $X_i$ ,  $X_j$  und  $X_k$  die Koordinaten des Gitterpunktes sind, für den gilt:  $r_x \geq X_i$ ,  $r_y \geq X_j$  und  $r_z \geq X_k$ , siehe Abbildung D.2.  $Q_{i,j,k}$  bezeichnet die zugewiesene Ladung auf den entsprechenden Gitterpunkt. Die Zuweisung der Ladung hängt in beiden Fällen von den Anteilen des Superteilchens in einer Gitterzelle ab, wodurch das Superteilchen eine ausgedehnte Form (im PIC Verfahren ein Dreieck) erhält.

D. Abbildungsvorschrift in einem mehrdimensionalen Gitter

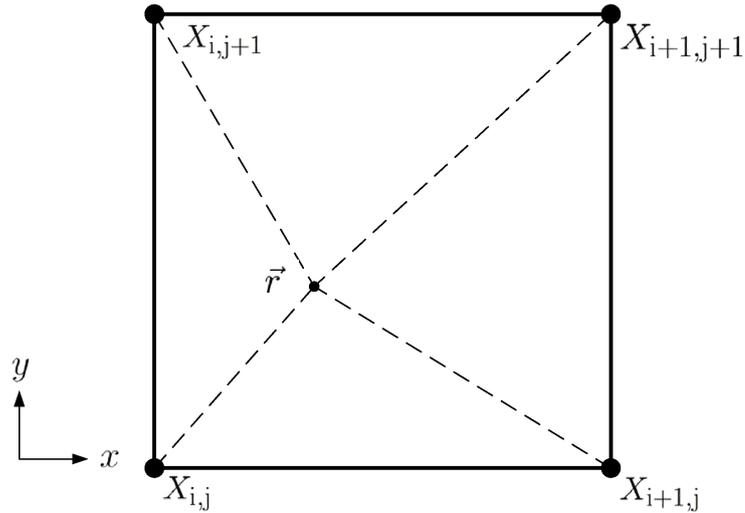


Abbildung D.1.: In einem zweidimensionalen numerischen Gitter wird eine Ladung am Ort  $\vec{r} = (r_x, r_y)$  durch lineare Interpolation auf vier benachbarte Gitterpunkte verteilt.

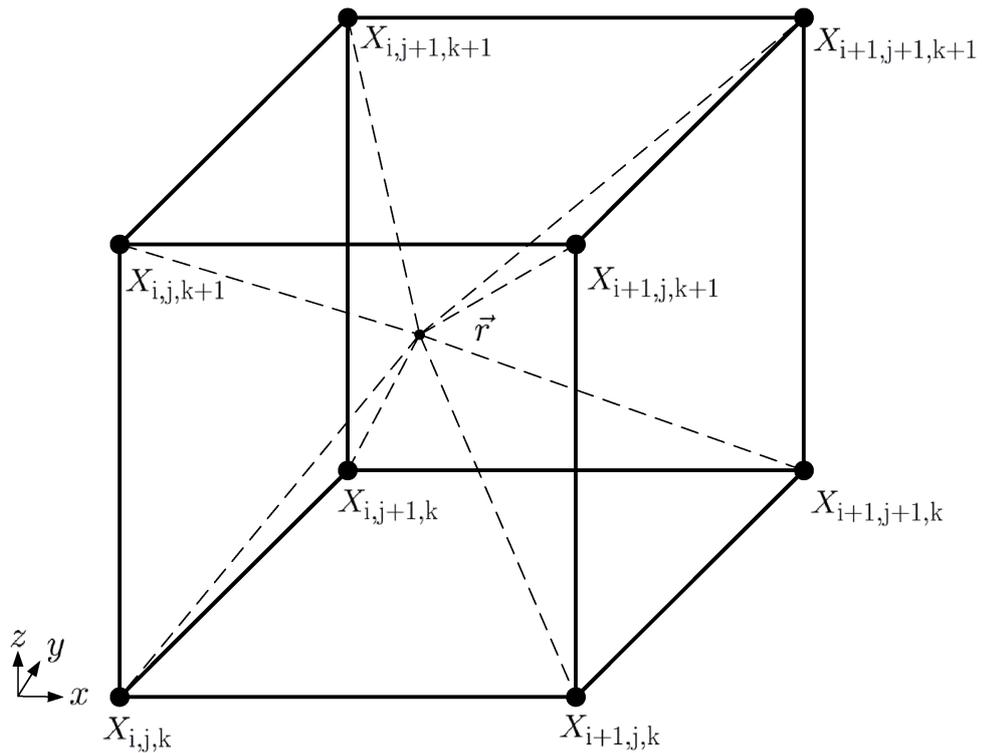


Abbildung D.2.: In einem dreidimensionalen numerischen Gitter wird eine Ladung am Ort  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$  durch lineare Interpolation auf acht benachbarte Gitterpunkte verteilt.

# E. Mathematischer Anhang

Das Integral in (2.24) lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$I = \int_c^\infty dE \sqrt{E+D} e^{-aE} \quad , \quad (\text{E.1})$$

mit  $D = \text{const.}$ ,  $a = \text{const.}$  und  $c = \text{const.}$ . Mit der Substitution:

$$z(E) = E + D \quad , \quad dz = dE \quad , \quad (\text{E.2})$$

ergibt sich (E.1) zu:

$$I = \int_{z(c)}^\infty dz \sqrt{z} e^{a(D-z)} = e^{aD} \int_{z(c)}^\infty dz \sqrt{z} e^{-az} \quad . \quad (\text{E.3})$$

Die partielle Integration von (E.3) gibt:

$$I = e^{aD} \left( \frac{\sqrt{z(c)}}{a} e^{-az(c)} + \frac{1}{2a} \int_{z(c)}^\infty dz \frac{e^{-az}}{\sqrt{z}} \right) \quad . \quad (\text{E.4})$$

Das verbleibende Integral lässt sich mit Hilfe der komplementären Fehlerfunktion darstellen:

$$\int_{z(c)}^\infty dz \frac{e^{-az}}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{az(c)} \right) \quad . \quad (\text{E.5})$$

Eingesetzt in (E.4) ergibt sich:

$$I = e^{aD} \left( \frac{\sqrt{z(c)}}{a} e^{-az(c)} + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{az(c)} \right) \right) \quad . \quad (\text{E.6})$$



# Abbildungsverzeichnis

1.1.	Der Verlauf einer Plasmaentladung in der Zündeinheit einer Hochleistungsfunkenstrecke . . . . .	3
1.2.	Aufnahmen eines Elektronenmikroskopes von Siliziumoxidteilchen . . . . .	5
1.3.	Das PKE (Plasma Kristall Experiment) . . . . .	6
1.4.	Die Saturnringe mit speichenartigen Strukturen, Der Komet <i>Hale-Bopp</i> . . . . .	8
1.5.	Der Orionnebel, Protoplanetare Staubscheiben . . . . .	9
1.6.	Schematische Darstellung eines experimentellen Aufbaus zur Messung der Oberflächenladung von Staubpartikeln (Faraday-Becher) . . . . .	11
1.7.	Schematische Darstellung eines experimentellen Aufbaus zur Messung der Oberflächenladung von Staubpartikeln (Argon-Laser), Die Oberflächenladung in Einheiten der Elementarladung . . . . .	12
1.8.	Schematische Darstellung eines experimentellen Aufbaus zur Erzeugung eines komplexen Plasmas, Vereinigungen zu größeren Agglomeraten . . . . .	15
2.1.	Ein aus dem unendlichen kommendes Ion streift die Oberfläche eines negativ geladenen Staubteilchens tangential. . . . .	18
2.2.	Das effektive Potenzial mit dem Coulomb-Potenzial . . . . .	20
2.3.	Die Teilchenbahnen nach Abbildung 2.2 . . . . .	20
2.4.	OML-Theorie (3D): Das normierte Oberflächenpotenzial in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses . . . . .	22
2.5.	OML-Theorie (2D): Das normierte Oberflächenpotenzial in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses . . . . .	24
2.6.	Schematische Darstellung des Absorptionsradius . . . . .	25
2.7.	Das effektive Potenzial mit dem Debye-Hückel-Potenzial . . . . .	30
2.8.	Die entsprechenden Teilchenbahnen nach Abbildung 2.7 . . . . .	31
2.9.	OM-Theorie: Oberflächenpotenzial in Abhängigkeit des Radius . . . . .	33
2.10.	Die Abschirmlänge in Abhängigkeit des Radius . . . . .	34
2.11.	Das Debye-Hückel-Potenzial für verschiedene Abschirmlängen . . . . .	35
2.12.	Das Potenzialprofil für den zylindersymmetrischen Fall und das Debye-Hückel-Potenzial . . . . .	37
2.13.	Der wahrscheinlichste Gyrationradius in Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte . . . . .	39
2.14.	Geladene Teilchen führen eine Spiralbewegung um Magnetfeldlinien aus, Aufsicht auf die $x$ - $y$ -Ebene mit einem Staubteilchen . . . . .	41

2.15. Der numerisch integrierte Strom auf ein ungeladenes Staubteilchen in einem homogenen Magnetfeld in Abhängigkeit des Verhältnisses des Radius $R$ zum wahrscheinlichsten Gyrationradius . . . . .	43
2.16. Das normierte Oberflächenpotenzial für ein Magnetfeld $B_e$ und $B_i$ in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses . . . . .	45
2.17. Das normierte Oberflächenpotenzial für Magnetfelder $B_e > B > 0$ in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses . . . . .	47
2.18. Das mit SCEPTIC bestimmte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht in Abhängigkeit von $\gamma_i = R/r_{gi}^{mp}$ . . . . .	49
2.19. Teilchenbahnen wie nach Abbildung 2.8 mit einem Magnetfeld $B_x$ . . . .	50
3.1. Die Abbildung von Ladungen auf ein diskretes, eindimensionales Gitter nach dem PIC Verfahren . . . . .	52
3.2. Das eindimensionale Simulationsgebiet mit $n_p$ Gitterpunkten . . . . .	55
3.3. Das Potenzial $\phi_{i,j}$ auf dem Gitterpunkt $X_{i,j}$ in einem zweidimensionalen numerischen Gitter . . . . .	56
3.4. Ein zweidimensionales numerisches Gitter mit dem Gitterpunktabstand $\Delta x$	58
3.5. Ein verkürzter Gitterpunktabstand $\Delta x_\nu$ vom Gitterpunkt $X_{i,j}$ zum Gitterpunkt auf der Oberfläche des Staubteilchens . . . . .	59
3.6. Ein zweidimensionales numerisches Gitter, aufgeteilt in zwei „Farben“: <i>Schwarz-Rot-</i> oder <i>Schachbrett-Nummerierung</i> . . . . .	61
3.7. Die Abbildungsvorschrift der Restriktion und der Prolongation des Mehrgitterverfahrens für den zweidimensionalen Fall . . . . .	63
3.8. Zwei Ebenen eines numerischen Gitters. Die schwarzen Punkte stellen das feine Ausgangsgitter dar, die großen roten Punkte das nächst gröbere Gitter	64
3.9. Das Potenzial $\phi_{i,j,k}$ auf dem Gitterpunkt $X_{i,j,k}$ in einem dreidimensionalen numerischen Gitter . . . . .	66
3.10. Die Abbildungsvorschrift der Restriktion und der Prolongation des Mehrgitterverfahrens für den dreidimensionalen Fall . . . . .	68
3.11. Geometrische Bestimmung des Superteilchenorts bei Bewegung in einem Magnetfeld . . . . .	71
4.1. Die Geschwindigkeitsverteilung von Superelektronen am Anfang der Simulation ohne Staubteilchen, 3D . . . . .	76
4.2. Die Anzahl der Superelektronen und Superionen im zeitlichen Verlauf der Simulation ohne Staubteilchen, 3D . . . . .	77
4.3. Das Potenzial der Simulation ohne Staubteilchen für den Zeitschritt $t = 10.000 \Delta t = 100/\omega_e$ , 3D . . . . .	78
4.4. Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials in den insgesamt 15 Simulationen mit fünf verschiedenen Staubteilchenradien bei jeweils drei Temperaturverhältnissen, 1D . . . . .	81
4.5. Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials in den Simulationen mit den Staubteilchenradien $R = 10 \mu\text{m}$ und $20 \mu\text{m}$ für $\beta = 0,01$ in einem Zeitausschnitt, 1D . . . . .	82

4.6.	Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht von insgesamt 15 Simulationen für fünf verschiedene Staubteilchenradien und drei Temperaturverhältnissen, 1D . . . . .	83
4.7.	Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien und jeweils drei Temperaturverhältnissen, 1D . . . . .	87
4.8.	Der gemittelte radiale Verlauf des Potenzials der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien und jeweils drei Temperaturverhältnissen, 1D . . . . .	89
4.9.	Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials in den insgesamt 15 Simulationen mit fünf verschiedenen Staubteilchenradien bei jeweils drei Temperaturverhältnissen, 3D . . . . .	92
4.10.	Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht von insgesamt 15 Simulationen für fünf verschiedene Staubteilchenradien und drei Temperaturverhältnissen, 3D . . . . .	93
4.11.	Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien und jeweils drei Temperaturverhältnissen, 3D . . . . .	97
4.12.	Der gemittelte radiale Verlauf des Potenzials der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien und jeweils drei Temperaturverhältnissen, 3D . . . . .	99
4.13.	Das gemittelte Potenzial und die Ladungsdichte aus der Simulation mit dem Staubteilchenradius $R = 10 \mu\text{m}$ und $\beta = 1$ , 3D . . . . .	99
4.14.	Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials in den insgesamt 15 Simulationen mit fünf verschiedenen Staubteilchenradien bei jeweils drei Temperaturverhältnissen, 2D . . . . .	102
4.15.	Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht von insgesamt 15 Simulationen für fünf verschiedene Staubteilchenradien und drei Temperaturverhältnissen, 2D . . . . .	103
4.16.	Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien und jeweils drei Temperaturverhältnissen, 2D . . . . .	107
4.17.	Der gemittelte radiale Verlauf des Potenzials der 15 Simulationen mit fünf Staubteilchenradien und jeweils drei Temperaturverhältnissen, 2D . . . . .	109
4.18.	Das gemittelte Potenzial und die Ladungsdichte aus der Simulation mit dem Staubteilchenradius $R = 10 \mu\text{m}$ und $\beta = 1$ , 2D . . . . .	109
5.1.	Der zeitliche Verlauf des Oberflächenpotenzials für drei Simulationen eines Magnetoplasmas mit $\beta = 1, 0$ und dem Staubteilchenradius $R = 200 \mu\text{m}$ , 3D . . . . .	113
5.2.	Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht von jeweils 25 Simulationen eines Magnetoplasmas für fünf verschiedene Staubteilchenradien und drei Temperaturverhältnissen, 3D . . . . .	114
5.3.	Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht von insgesamt 50 Simulationen eines Magnetoplasmas für $\beta = 1, 0$ in Abhängigkeit von $\gamma_i = R/r_{\text{gi}}^{\text{mp}}$ für fünf verschiedene Staubteilchenradien, 3D . . . . .	116

5.4.	Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht von insgesamt 45 Simulationen eines Magnetoplasmas für $\beta = 0,1$ in Abhängigkeit von $\gamma_i = R/r_{gi}^{mp}$ für fünf verschiedene Staubteilchenradien, 3D . . . . .	117
5.5.	Das zeitlich gemittelte Oberflächenpotenzial im Gleichgewicht von insgesamt 45 Simulationen eines Magnetoplasmas für $\beta = 0,01$ in Abhängigkeit von $\gamma_i = R/r_{gi}^{mp}$ für fünf verschiedene Staubteilchenradien, 3D . . . . .	118
5.6.	Elektronen- und Ionenströme nach der OML-Theorie in Abhängigkeit des Oberflächenpotenzials . . . . .	120
5.7.	Die Geschwindigkeitsverteilung von am Staubteilchen absorbierten Elektronen und Ionen. . . . .	122
5.8.	Die Magnetisierungsfunktion $D(\gamma_i)$ für drei Parameterkombinationen $s$ und $a$ . . . . .	125
5.9.	Das gemittelte Potenzial und die Ladungsdichte im gesamten Simulationsgebiet aus den Simulationen mit $\beta = 1,0$ und $r_{ge}^{mp} = 0,01 \mu\text{m}$ für fünf Staubteilchenradien, 3D . . . . .	129
5.10.	Schematische Darstellung der Volumengebiete zur Bestimmung der Teilchendichten aus Abbildung 5.11 und 5.12, 3D . . . . .	130
5.11.	Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte $n_e^{av}$ und $n_i^{av}$ aus den Simulationen mit dem Radius $R = 10 \mu\text{m}$ bei den drei Temperaturverhältnissen sowie verschiedenen Verhältnissen $\gamma_e$ , 3D . . . .	132
5.12.	Der gemittelte räumliche Verlauf der Elektronen- und Ionendichte $n_e^{av}$ und $n_i^{av}$ aus den Simulationen mit dem Radius $R = 200 \mu\text{m}$ bei den drei Temperaturverhältnissen sowie verschiedenen Verhältnissen $\gamma_e$ , 3D . . . .	133
5.13.	Der gemittelte radiale Verlauf des Potenzials $V^{av}$ aus den Simulationen mit dem Radius $R = 10 \mu\text{m}$ und $R = 200 \mu\text{m}$ bei den drei Temperaturverhältnissen sowie verschiedenen Verhältnissen $\gamma_e$ , 3D . . . . .	135
B.1.	Geladene Teilchen führen eine Spiralbewegung oder Helixbahn um Magnetfeldlinien aus . . . . .	146
C.1.	Das Coulomb-Potenzial $V(r) = V_R R/r$ , das Potenzial $V(r) = V_R R/r^2$ sowie das Debye-Hückel-Potenzial . . . . .	149
D.1.	In einem zweidimensionalen numerischen Gitter wird eine Ladung am Ort $\vec{r}$ durch lineare Interpolation auf vier benachbarte Gitterpunkte verteilt .	152
D.2.	In einem dreidimensionalen numerischen Gitter wird eine Ladung am Ort $\vec{r}$ durch lineare Interpolation auf acht benachbarte Gitterpunkte verteilt .	152

# Tabellenverzeichnis

4.1. Parameter zu fünf verschiedenen 1D-OPAR-Simulationen, Die Debyelängen der Ionen und die linearisierten Debyelängen . . . . .	80
4.2. Parameter zu 15 verschiedenen 3D-OPAR-Simulationen . . . . .	91
4.3. Parameter zu 15 verschiedenen 2D-OPAR-Simulationen . . . . .	101
5.1. Parameter der 3D-OPAR-Simulationen eines Magnetoplasmas . . . . .	112
5.2. Die mittleren Gyrationenradien von Elektronen und Ionen aus Simulationen mit dem größten und kleinsten Staubteilchenradius bei $\beta = 1,0$ . . .	123



# Literaturverzeichnis

- [1] Gerd Prölss. *Physik des erdnahen Weltraums: Eine Einführung*. Springer, 2003. See p. 165, 287.
- [2] H. M. Mott-Smith and I. Langmuir. The Theory of Collectors in Gaseous Discharges. *Physical Review*, 28:727–763, October 1926.
- [3] Vadim N. Tsytovich, Gregory E. Morfill, Sergey V. Vladimirov, and Hubertus Thomas. *Elementary Physics of Complex Plasmas*. Springer, 2008. See p. 47, 55, 98.
- [4] Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik Garching. Website, URL: <http://www.mpe.mpg.de/25671/PKE>.
- [5] J. P. Sharpe, D. A. Petti, and H. W. Bartels. A review of dust in fusion devices: Implications for safety and operational performance. *Fusion Engineering and Design*, 63-64:153 – 163, 2002.
- [6] J. Winter, V. Fortov, and A. Nefedov. Radioactive dust levitation and its consequences for fusion devices. *Journal of Nuclear Materials*, 290:509–512, March 2001.
- [7] V. N. Tsytovich and J. Winter. Physics of our days: On the role of dust in fusion devices. *Physics Uspekhi*, 41:815–822, August 1998.
- [8] S. I. Krasheninnikov, R. D. Smirnov, A. Y. Pigarov, T. K. Soboleva, and D. A. Mendis. Dust in fusion devices: The state of theory and modeling. *Journal of Plasma Physics*, 76:377–388, August 2010.
- [9] International Thermonuclear Experimental Reactor ITER. Website, URL: <http://www.iter.org/>.
- [10] S. Rosanvallon, C. Grisolia, P. Delaporte, J. Worms, F. Onofri, S. H. Hong, G. Counsell, and J. Winter. Dust in ITER: Diagnostics and removal techniques. *Journal of Nuclear Materials*, 386:882–883, April 2009.
- [11] M. Bonitz, N. Horing, and P. Ludwig. *Introduction to Complex Plasmas*. Springer, 2010. See p. 395.
- [12] Andre Bouchoule. *Dusty Plasmas - Physics, Chemistry and Technological Impacts in Plasma Processing*. Wiley, 1999. See p. 305, 7.

- [13] P. R. i. Cabarrocas, N. Chaâbane, A. V. Kharchenko, and S. Tchakarov. Polymorphous silicon thin films produced in dusty plasmas: application to solar cells. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 46:B235–B243, December 2004.
- [14] L. Boufendi and A. Bouchoule. Industrial developments of scientific insights in dusty plasmas. *Plasma Sources Science Technology*, 11(26):A260000–A218, August 2002. See p. A215.
- [15] H. Kersten, G. Thieme, M. Fröhlich, D. Bojic, D. H. Tung, M. Quaas, H. Wulff, and Rainer Hippler. Complex (dusty) plasmas: Examples for applications and observation of magnetron-induced phenomena. *Pure and Applied Chemistry*, 77(2):415, 2005. See p. 423.
- [16] H. Thomas, G. E. Morfill, V. Demmel, J. Goree, B. Feuerbacher, and D. Möhlmann. Plasma crystal: Coulomb crystallization in a dusty plasma. *Physical Review Letters*, 73:652–655, August 1994.
- [17] G. E. Morfill, Hubertus M. Thomas, Anatoli P. Nefedov, Vladimir E. Fortov, Alexei V. Ivlev Rothermel, Milenko Zuzic, Andrey M. Lipaev, Vladimir I. Molotkov, and Oleg F. Petrov. The Physics of Complex Plasmas and the Microgravity Programme on Plasma Crystal (PK) Research. *55th International Astronautical Congress 2004 (Vancouver, Canada)*, 2004. See p. 4, 6.
- [18] A. Melzer, D. Block, and A. Piel. Strukturen aus Staub. *Physik Journal*, 6:31–36, June 2007. See p. 32.
- [19] H. M. Thomas and G. E. Morfill. Complex Plasmas - An Introduction to a New Field of Research. *Contributions to Plasma Physics*, 41:255–258, March 2001.
- [20] A. P. Nefedov, G. E. Morfill, V. E. Fortov, H. M. Thomas, H. Rothermel, T. Hagl, A. V. Ivlev, M. Zuzic, B. A. Klumov, A. M. Lipaev, V. I. Molotkov, O. F. Petrov, Y. P. Gidzenko, S. K. Krikalev, W. Shepherd, A. I. Ivanov, M. Roth, H. Binnenbruck, J. A. Goree, and Y. P. Semenov. PKE-Nefedov\*: plasma crystal experiments on the International Space Station. *New Journal of Physics*, 5:33–+, April 2003.
- [21] H. M. Thomas, D. D. Goldbeck, T. Hagl, A. V. Ivlev, U. Konopka, G. E. Morfill, H. Rothermel, R. Sütterlin, and M. Zuzic. Complex Plasmas under Microgravity Conditions: Parabolic Flights. *Physica Scripta Volume T*, 89:16–19, 2001.
- [22] H. M. Thomas and G. E. Morfill. Plasmakristalle an Bord der ISS: Komplexe Plasmen in Schwerelosigkeit. *Physik in unserer Zeit*, 36:76–83, March 2005. See p. 81.
- [23] H. M. Thomas, G. E. Morfill, T. Hagl, A. Ivlev, U. Konopka, H. Rothermel, M. Zuzic, A. P. Nefedov, V. E. Fortov, V. I. Molotkov, O. Petrov, A. Lipaev, A. Ivanov, Y. P. Semionov, S. K. Krikalev, Y. P. Gidzenko, W. A. Shepherd, and J. A. Goree. Dusty plasmas experiments on the space station and related theory/simulations -

- overview. In J. Büchner, C. T. Dum, & M. Scholer, editor, *Space Plasma Simulation*, pages 181–+, 2001.
- [24] H. M. Thomas, G. E. Morfill, V. E. Fortov, A. V. Ivlev, V. I. Molotkov, A. M. Lipaev, T. Hagl, H. Rothermel, S. A. Khrapak, R. K. Suetterlin, M. Rubin-Zuzic, O. F. Petrov, V. I. Tokarev, and S. K. Krikalev. Complex plasma laboratory PK-3 Plus on the International Space Station. *New Journal of Physics*, 10(3):033036–+, March 2008. See p. 2.
- [25] M. H. Thoma, M. A. Fink, H. Hofner, M. Kretschmer, S. A. Khrapak, S. V. Ratynskaia, V. V. Yaroshenko, G. E. Morfill, O. F. Petrov, A. D. Usachev, A. V. Zobnin, and V. E. Fortov. PK-4: Complex Plasmas in Space The Next Generation. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 35:255–259, April 2007.
- [26] Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik Garching: The PK-4 Project. Website, URL: <http://www2011.mpe.mpg.de/theory/plasma-crystal/PK4/index.html>.
- [27] R. Seurig, G. Morfill, V. Fortov, and P. Hofmann. Complex plasma research on ISS past, present, and future facilities. *Acta Astronautica*, 61:940–953, November 2007.
- [28] A. M. Lipaev, S. A. Khrapak, V. I. Molotkov, G. E. Morfill, V. E. Fortov, A. V. Ivlev, H. M. Thomas, A. G. Khrapak, V. N. Naumkin, A. I. Ivanov, S. E. Tretschnev, and G. I. Padalka. Void Closure in Complex Plasmas under Microgravity Conditions. *Physical Review Letters*, 98(26):265006–+, June 2007.
- [29] V. N. Tsytovich, S. V. Vladimirov, G. E. Morfill, and J. Goree. Theory of collision-dominated dust voids in plasmas. *Physical Review E*, 63(5):056609–+, May 2001. See p. 0566109-2.
- [30] C.-R. Du, H. M. Thomas, A. V. Ivlev, U. Konopka, and G. E. Morfill. Agglomeration of microparticles in complex plasmas. *Physics of Plasmas*, 17(11):113710–+, November 2010.
- [31] C. Güttler, J. Blum, A. Zsom, C. W. Ormel, and C. P. Dullemond. The outcome of protoplanetary dust growth: pebbles, boulders, or planetesimals?. I. Mapping the zoo of laboratory collision experiments. *Astronomy and Astrophysics*, 513:A56+, April 2010.
- [32] T. Shimizu, B. Steffes, R. Pompl, F. Jamitzky, W. Bunk, K. Ramrath, M. Georgi, W. Stolz, H.-U. Schmidt, T. Urayama, S. Fujii, and G. E. Morfill. Characterization of Microwave Plasma Torch for Decontamination. *Plasma Processes and Polymers*, 5:577–582, August 2008.
- [33] J. Heinlin, G. Isbary, W. Stolz, G. Morfill, M. Landthaler, T. Shimizu, B. Steffes, T. Nosenko, J. Zimmermann, and S. Karrer. Plasma applications in medicine with

- a special focus on dermatology. *Journal of the European Academy of Dermatology and Venereology*, 25:1–11, May 2011.
- [34] L. Spitzer, Jr. *Physical processes in the interstellar medium*. Wiley-VCH, 1981.
- [35] U. de Angelis. The physics of dusty plasmas. *Physica Scripta*, 45:465–474, May 1992.
- [36] P. K. Shukla. A survey of dusty plasma physics. *Physics of Plasmas*, 8:1791–1803, May 2001. See p. 1791, 1800.
- [37] H. P. Gail and S. Zhukovska. Interstellarer Staub. *Sterne und Weltraum*, 5:34–44, May 2012.
- [38] A. A. Kokhanovsky. Microphysical and optical properties of noctilucent clouds. *Earth Science Reviews*, 71:127–146, June 2005.
- [39] A. F. Roddy. The role of meteoric particles in noctilucent clouds. *Irish Astronomical Journal*, 16:194–202, March 1984.
- [40] O. Havnes, U. de Angelis, R. Bingham, C. K. Goertz, and G. E. Morfill. On the role of dust in the summer mesopause. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 52:637–643, August 1990.
- [41] Internet Bildmaterial. Website, URL: <http://voyager.jpl.nasa.gov/index.html> <http://photojournal.jpl.nasa.gov/> <http://hubblesite.org/gallery/>.
- [42] E. C. Whipple. Potentials of surfaces in space. *Reports on Progress in Physics*, 44:1197–1250, November 1981. See p. 1222, 1203, 1240, 1214, 1215.
- [43] J. R. Hill and D. A. Mendis. Charged dust in the outer planetary magnetospheres. I - Physical and dynamical processes. *Moon and Planets*, 21:3–16, August 1979.
- [44] T. J. Stubbs, R. R. Vondrak, and W. M. Farrell. A dynamic fountain model for lunar dust. *Advances in Space Research*, 37:59–66, 2006.
- [45] C. K. Goertz. Dusty plasmas in the solar system. *Reviews of Geophysics*, 27:271–292, May 1989. See p. 277, 283.
- [46] C. J. Mitchell, M. Horányi, O. Havnes, and C. C. Porco. Saturn’s Spokes: Lost and Found. *Science*, 311:1587–1589, March 2006.
- [47] C. A. McGhee, R. G. French, L. Dones, J. N. Cuzzi, H. J. Salo, and R. Danos. HST observations of spokes in Saturn’s B ring. *Icarus*, 173:508–521, February 2005.
- [48] C. K. Goertz and G. Morfill. A model for the formation of spokes in Saturn’s rings. *Icarus*, 53:219–229, February 1983.

- [49] M. Horányi, T. W. Hartquist, O. Havnes, D. A. Mendis, and G. E. Morfill. Dusty plasma effects in Saturn's magnetosphere. *Reviews of Geophysics*, 42:RG4002, December 2004. See p. 4.
- [50] W. M. Farrell, M. D. Desch, M. L. Kaiser, W. S. Kurth, and D. A. Gurnett. Changing electrical nature of Saturn's rings: Implications for spoke formation. *Geophysical Research Letters*, 33:L07203, April 2006.
- [51] ESA Spacecraft ROSETTA. Website, URL: <http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=13>.
- [52] H. Alfvén. *On the origin of the solar system*. Clarendon Press, 1954.
- [53] M. Horanyi and C. K. Goertz. Coagulation of dust particles in a plasma. *Astrophysical Journal*, 361:155–161, September 1990.
- [54] R. J. Trumpler. Spectrophotometric Measures of Interstellar Light Absorption. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 42:267–+, October 1930.
- [55] K. Avinash. Theory of charged dust clouds: Equilibrium. *Physics of Plasmas*, 14(1):012904–+, January 2007.
- [56] A. Piel and A. Melzer. Dusty plasmas - the state of understanding from an experimentalist's view. *Advances in Space Research*, 29:1255–1264, 2002.
- [57] B. Walch, M. Horányi, and S. Robertson. Charging of Dust Grains in Plasma with Energetic Electrons. *Physical Review Letters*, 75:838–841, July 1995.
- [58] A. Barkan, N. D'angelo, and R. L. Merlino. Charging of dust grains in a plasma. *Physical Review Letters*, 73:3093–3096, December 1994.
- [59] B. Young, T. E. Cravens, T. P. Armstrong, and R. J. Friauf. A two-dimensional particle-in-cell model of a dusty plasma. *Journal of Geophysical Research*, 99:2255–2260, February 1994. See p. 2259.
- [60] U. Konopka, L. Ratke, and H. M. Thomas. Central Collisions of Charged Dust Particles in a Plasma. *Physical Review Letters*, 79:1269–1272, August 1997.
- [61] E. B. Tomme, D. A. Law, B. M. Annaratone, and J. E. Allen. Parabolic Plasma Sheath Potentials and their Implications for the Charge on Levitated Dust Particles. *Physical Review Letters*, 85:2518–2521, September 2000.
- [62] V. E. Fortov, A. P. Nefedov, V. I. Molotkov, M. Y. Poustylnik, and V. M. Torchinsky. Dependence of the Dust-Particle Charge on Its Size in a Glow-Discharge Plasma. *Physical Review Letters*, 87(20):205002, November 2001.
- [63] A. Melzer, T. Trottenberg, and A. Piel. Experimental determination of the charge on dust particles forming Coulomb lattices. *Physics Letters A*, 191:301–308, August 1994.

- [64] A. Homann, A. Melzer, and A. Piel. Measuring the charge on single particles by laser-excited resonances in plasma crystals. *Physical Review E*, 59:3835, April 1999.
- [65] A. Melzer, S. Nunomura, D. Samsonov, Z. W. Ma, and J. Goree. Laser-excited Mach cones in a dusty plasma crystal. *Physical Review E*, 62:4162–4176, September 2000.
- [66] P. Bartoš, J. Blažek, P. Jelínek, and P. Ā. Patenka. Hybrid computer simulations: electrical charging of dust particles in low-temperature plasma. *European Physical Journal D*, 54:319–323, August 2009.
- [67] C. T. N. Willis, M. Coppins, M. Bacharis, and J. E. Allen. The effect of dust grain size on the floating potential of dust in a collisionless plasma. *Plasma Sources Science Technology*, 19(6):065022, December 2010.
- [68] Prof. Ian H. Hutchinson. SCEPTIC: Specialized Coordinate Electrostatic Particle and Thermals in Cell Code, Website, URL: <http://silas.psfc.mit.edu/sceptic/>.
- [69] I. H. Hutchinson. Ion collection by a sphere in a flowing plasma: 3. Floating potential and drag force. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 47:71–87, January 2005. See p. 75.
- [70] N. A. Gatsonis, R. E. Erlandson, and C.-I. Meng. Simulation of dusty plasmas near surfaces in space. *Journal of Geophysical Research*, 99:8479–8489, May 1994.
- [71] G. Spivak and E. Reichrudel. Zur allgemeinen Theorie des Sondenstroms in einer Gasentladung. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, 9:655, 1936.
- [72] J. R. Sanmartin. Theory of a Probe in a Strong Magnetic Field. *Physics of Fluids*, 13:103–116, January 1970.
- [73] J. G. Laframboise and J. Rubinstein. Theory of a cylindrical probe in a collisionless magnetoplasma. *Physics of Fluids*, 19:1900–1908, December 1976.
- [74] J. Rubinstein and J. G. Laframboise. Upper-bound current to a cylindrical probe in a collisionless magnetoplasma. *Physics of Fluids*, 21:1655–1656, September 1978.
- [75] J. Rubinstein and J. G. Laframboise. Theory of axially symmetric probes in a collisionless magnetoplasma - Aligned spheroids, finite cylinders, and disks. *Physics of Fluids*, 26:3624–3627, December 1983.
- [76] J. Rubinstein and J. G. Laframboise. Theory of a spherical probe in a collisionless magnetoplasma. *Physics of Fluids*, 25:1174–1182, July 1982.
- [77] B. Bertotti. Theory of an Electrostatic Probe in a Strong Magnetic Field. *Physics of Fluids*, 4:1047–1052, August 1961.

- [78] Elden Cole Whipple. *The equilibrium electric potential of a body in the upper atmosphere and in interplanetary space*. Ph.D. Thesis, 1965. See p. 75.
- [79] N. Sato, G. Uchida, R. Ozaki, and S. Iizuka. Fine-particle Coulomb lattices formed and controlled in DC discharge plasmas. *Physics of Dusty Plasmas, Seventh Workshop*, 446:239–246, October 1998.
- [80] S. Knist, F. Greiner, and A. Piel. Dustwheel: a new experiment for magnetized dusty plasma. In *APS Meeting Abstracts*, page 1055P, October 2006.
- [81] S. Knist, F. Greiner, F. Biss, and A. Piel. Influence of Negative Ions on Drift Waves in a Low-Density Ar/O<sub>2</sub>-Plasma. *Contributions to Plasma Physics*, 51:769–784, September 2011.
- [82] Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik Garching: The Paramagnetic Laboratory. Website, [http://www2011.mpe.mpg.de/theory/plasma-crystal/ParaMag\\_e.html](http://www2011.mpe.mpg.de/theory/plasma-crystal/ParaMag_e.html).
- [83] D. Samsonov, S. Zhdanov, G. Morfill, and V. Steinberg. Levitation and agglomeration of magnetic grains in a complex (dusty) plasma with magnetic field. *New Journal of Physics*, 5:24, March 2003.
- [84] U. Konopka, D. Samsonov, A. V. Ivlev, J. Goree, V. Steinberg, and G. E. Morfill. Rigid and differential plasma crystal rotation induced by magnetic fields. *Physical Review E*, 61:1890–1898, February 2000.
- [85] E. Thomas, Jr., R. L. Merlino, and M. Rosenberg. Magnetized dusty plasmas: the next frontier for complex plasma research. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 54(12):124034, December 2012.
- [86] Victor Land. *Computing the complex dusty plasmas in the presence of magnetic fields and UV radiation*. PhD Thesis, 2007. See p. 133.
- [87] L. Patacchini and I. H. Hutchinson. Angular distribution of current to a sphere in a flowing, weakly magnetized plasma with negligible Debye length. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 49:1193–1208, August 2007.
- [88] L. Patacchini and I. H. Hutchinson. Ion-collecting sphere in a stationary, weakly magnetized plasma with finite shielding length. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 49:1719–1733, October 2007.
- [89] L. Patacchini, I. H. Hutchinson, and G. Lapenta. Electron collection by a negatively charged sphere in a collisionless magnetoplasma. *Physics of Plasmas*, 14(6):062111, June 2007. See p. 2, 7.
- [90] R. V. Kennedy and J. E. Allen. The floating potential of spherical probes and dust grains. I: Radial motion theory. *Journal of Plasma Physics*, 67:243–250, May 2002.

- [91] J. Goree. Ion trapping by a charged dust grain in a plasma. *Physical Review Letters*, 69:277–280, July 1992.
- [92] M. Lampe, R. Goswami, Z. Sternovsky, S. Robertson, V. Gavrishchaka, G. Ganguli, and G. Joyce. Trapped ion effect on shielding, current flow, and charging of a small object in a plasma. *Physics of Plasmas*, 10:1500–1513, May 2003.
- [93] S. A. Khrapak, S. V. Ratynskaia, A. V. Zobnin, A. D. Usachev, V. V. Yaroshenko, M. H. Thoma, M. Kretschmer, H. Höfner, G. E. Morfill, O. F. Petrov, and V. E. Fortov. Particle charge in the bulk of gas discharges. *Physical Review E*, 72(1):016406, July 2005.
- [94] J. E. Allen. Probe theory - The orbital motion approach. *Physica Scripta*, 45:497–503, May 1992.
- [95] J. E. Allen, B. M. Annaratone, and U. de Angelis. On the orbital motion limited theory for a small body at floating potential in a Maxwellian plasma. *Journal of Plasma Physics*, 63:299–309, May 2000.
- [96] M. Lampe, G. Joyce, G. Ganguli, and V. Gavrishchaka. Interactions between dust grains in a dusty plasma. *Physics of Plasmas*, 7:3851–3861, October 2000. See p. 3856.
- [97] P. K. Shukla and A. A. Mamun. *Introduction to dusty plasma physics*. Bristol; Philadelphia: Institute of Physics Publishing, c2002. (Series in plasma physics), 2002. See p. 37, 40, 48, 49.
- [98] V. E. Fortov, A. V. Ivlev, S. A. Khrapak, A. G. Khrapak, and G. E. Morfill. Complex (dusty) plasmas: Current status, open issues, perspectives. *Physics Reports*, 421:1–103, December 2005. See p. 12, 9.
- [99] R. V. Kennedy and J. E. Allen. The floating potential of spherical probes and dust grains. II: Orbital motion theory. *Journal of Plasma Physics*, 69:485–506, December 2003.
- [100] S. R. Seshadri. *Fundamentals of plasma physics*. New York, NY (USA): Elsevier Scientific Publishing, 1973. See p. 17, 78.
- [101] J. E. Daugherty, R. K. Porteous, M. D. Kilgore, and D. B. Graves. Sheath structure around particles in low-pressure discharges. *Journal of Applied Physics*, 72:3934–3942, November 1992. See p. 3939, 3935.
- [102] M. Lampe. Limits of validity for orbital-motion-limited theory for a small floating collector. *Journal of Plasma Physics*, 65:171–180, April 2001.
- [103] V. N. Tsytovich, N. Sato, and G. E. Morfill. Note on the charging and spinning of dust particles in complex plasmas in a strong magnetic field. *New Journal of Physics*, 5:43, May 2003. See p. 43.4.

- [104] Mierk Schwabe. *Microparticles as Probes in a Highly Magnetized Dusty Plasma*. Diploma Thesis, 2006. See p. 29.
- [105] M. Salimullah, I. Sandberg, and P. K. Shukla. Dust charge fluctuations in a magnetized dusty plasma. *Physical Review E*, 68(2):027403, August 2003.
- [106] L. J. Sonmor and J. G. Laframboise. Exact current to a spherical electrode in a collisionless, large-Debye-length magnetoplasma. *Physics of Fluids B*, 3:2472–2490, September 1991.
- [107] J. G. Laframboise and L. J. Sonmor. Current collection by probes and electrodes in space magnetoplasmas - A review. *Journal of Geophysical Research*, 98:337–357, January 1993.
- [108] L. J. Sonmor and J. G. Laframboise. Chaotic particle motion in Coulomb electric and uniform magnetic fields. *Geophysical Research Letters*, 18:1619–1622, August 1991.
- [109] OPAR Code Documentation. Website, URL: <http://homepage.ruhr-uni-bochum.de/Dennie.Lange/OPAR-Dokumentation/index.html>.
- [110] C.K. Birdsall and A. B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, 1991. See p. 21, 407.
- [111] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007. See p. 56, 1060.
- [112] Francis F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer, 1984. See p. 4.
- [113] K.-U. Riemann. The Bohm criterion and sheath formation. *Journal of Physics D Applied Physics*, 24:493–518, April 1991.
- [114] D. A. Mendis and M. Rosenberg. Cosmic Dusty Plasmas. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 32:419–463, 1994.
- [115] Mierk Schwabe. *Dynamical effects in fluid complex plasmas*. PhD Thesis, 2009. See p. 99.
- [116] I. B. Bernstein and I. N. Rabinowitz. Theory of Electrostatic Probes in a Low-Density Plasma. *Physics of Fluids*, 2:112–121, March 1959. See p. 115.

*Literaturverzeichnis*

# Lebenslauf

## Dennie Lange

Adresse Elise-Späth-Str. 3  
91058 Erlangen

E-Mail dennie.lange@ruhr-uni-bochum.de

Geboren am 14. Mai 1978

Geburtsort Marl

Nationalität deutsch

## Werdegang

seit 2008 Physiker bei der Siemens AG, Energy Sector, Power Transmission Division in Erlangen  
Projektleiter für Forschungs- und Entwicklungsprojekte im Bereich FACTS- und HVDC-Anlagen, Product Lifecycle Manager (PLM)

2005 - 2008 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik I an der Ruhr-Universität Bochum (PhD)  
Titel der Dissertation: Gleichgewichtspotenzial von sphärischen Staubteilchen in Magnetoplasmen

1999 - 2005 Physikstudium an der Ruhr-Universität Bochum (Diplom)  
Titel der Diplomarbeit: Simulation der Modulation Kosmischer Strahlung über einen solaren Zyklus

1998 - 1999 Grundwehrdienst bei der Luftwaffe in Lüdinghausen  
Technischer Systemtrupp für Fernmelde- und Richtfunkanlagen

1989 - 1998 Willy-Brandt-Gesamtschule in Marl (Abitur)

1984 - 1989 Emsland-Grundschule in Marl

## Fortbildungen

- ab 2008            Diverse interne Siemens-Schulungen zu energietechnischen Anlagen sowie Kurse zum Projektmanagement und zur Prozessabwicklung bei Produktentwicklungen, Erlangen, Nürnberg
- 2008                Post Graduate School „Computational Methods in Astrophysics“, Ruhr-Universität Bochum
- 2007                Summer School „Low Temperature Plasma Physics: Basics and Applications“, Bad Honnef
- 2001/2003         Beobachtungspraktikum am Observatorium „Hoher List“, Universitätssternwarte Bonn

## Veröffentlichungen, Konferenzbeiträge und Lehrerfahrungen

- seit 2012         Interne Produktschulungen sowie Kundenpräsentationen bei Siemens, Erlangen, Nürnberg
- 2011                Patentveröffentlichung (Anmelder: Siemens AG, Erfinder: Michael Söder, Jörg Ochs, Dennie Lange), Bezeichnung: Funkenstrecke (Spark Gap), Intern. Aktenzeichen: PCT/EP2010/055724
- 2008                „Are there Kronian electrons in the inner heliosphere?“, Astronomy and Astrophysics, Volume 482, Issue 3, Mai 2008, pp.973-979
- 2006                „Time-dependent 3D modulation of Jovian electrons. Comparison with Ulysses/KET observations“, Astronomy and Astrophysics, Volume 449, Issue 1, April 2006, pp.401-410
- 2005 - 2008       Einbindung in den universitären Lehrbetrieb
- 2005                DPG Frühjahrstagung, Vortrag „Zeitabhängige 3-D Modellierung der Ulysses/KET Beobachtungen von Jupiterelektronen“, Humboldt-Universität Berlin

Erlangen, Juli 2014

# Danksagung

Im Zusammenhang mit der Entstehung dieser Arbeit möchte ich mich bei folgenden Personen und Institutionen besonders bedanken:

- Prof. Dr. Rainer Grauer, für die Betreuung dieser Arbeit und die Möglichkeit am Lehrstuhl zu promovieren.
- Der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung des Graduiertenkolleg „Nichtgleichgewichtsphänomene in Niedertemperaturplasmen“.
- Dr. Holger Schmitz, für die Bereitstellung des OPAR-Code und die Hilfestellung bezüglich der Numerik.
- Dr. Karl-Ulrich Riemann, für die hilfreichen Diskussionen bezüglich der Plasma-physik.
- PD Dr. Horst Fichtner, für das Zweitgutachten und das Korrekturlesen.
- Der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (DPG), insbesondere für die Organisation der sehr inspirierenden Doktorandenkolloquien in Bad Honnef.
- Jürgen Möllenhoff, für die Rechnerbetreuung und die große Hilfsbereitschaft.
- Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Lehrstuhls für das sehr angenehme Arbeitsklima.
- Sascha, Michael und Ralf für das redaktionelle Korrekturlesen.
- Meinen Kollegen bei der Siemens AG: Andreas, Michael und Dominik, insbesondere für die organisatorische Unterstützung bezüglich der Urlaubsplanung.
- Meiner Mutter Brigitte und meinem Bruder Sascha für den familiären Rückhalt und die ständige große Unterstützung.