Masterarbeit an der Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik

Deligne-Tate-Morphismen

Robert Wilms

Erstgutachter: Dr. Markus Perling
Zweitgutachter: Dr. Markus Szymik

Schalksmühle, den 17. September 2011

An dieser Stelle möchte ich mich bei Dr. Markus Perling für seine Bereitschaft Erstgutachter dieser Arbeit zu werden und bei Dr. Markus Szymik für die zahlreichen und hilfreichen Sprechstunden bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Als Deligne-Tate-Morphismen bezeichnen wir Lifts des Frobenius-Endomorphismus in Charakteristik p nach Charakteristik Null, die in einem gewissen Sinne kanonisch sind. Es sei R ein kommutativer Ring mit char $R = 0$ und p eine Primzahl. Dann ist auf R/pR immer der klassische Frobenius-Endomorphismus F durch $F(r) = r^p$ gegeben. Ein Deligne-Tate-Morphismus ist nun ein kanonischer Homomorphismus φ, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & R \arrow[d, "\pi"] \\ R/pR \arrow[r, "F"] & R/pR \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wie betrachten dazu folgende Beispiele:

(a) Es sei $R = \mathbb{Z}$. In diesem Fall entspricht der Frobenius $F\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$. Da aber $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ der einzige Ringhomomorphismus auf $\mathbb{Z}$ ist, existiert in diesem Fall ein eindeutiger Frobenius-Lift.

(b) Wir betrachten den Fall der Gauß-Zahlen $R = \mathbb{Z}[i]$. Die einzigen Ringhomomorphismen auf $\mathbb{Z}[i]$ sind die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}[i]}$ und die komplexe Konjugation $conj$. Für $p = 2$ gilt für den Frobenius F auf $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ die Gleichung $F(i) \equiv i^2 \equiv -1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, so dass weder $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}[i]}$ noch $conj$ ein Lift von F ist. Folglich existiert in diesem Fall kein Lift von F nach $\mathbb{Z}[i]$.

(c) Es sei $R = \mathbb{Z}[T]$ der Polynomring in einer Variablen. Weiter sei F der Frobenius auf $\mathbb{Z}[T]/p\mathbb{Z}[T]$. Dann ist jeder Homomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[T]$ mit der Eigenschaft $\varphi(T) = T^p + p \cdot f(T)$ für ein Polynom $f(T) \in \mathbb{Z}[T]$ ein Lift des Frobenius F. Daher existieren Lifts des Frobenius F nach $\mathbb{Z}[T]$ die keineswegs eindeutig sind.

Diese Beispiele motivieren die Fragen nach der Existenz eines Frobenius-Lifts und nach einer auszeichnenden Eigenschaft für einen Frobenius-Lift, kurz die Frage nach einem Deligne-Tate-Morphismus.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Existenz von Deligne-Tate-Morphismen in einer bestimmten Situation nachzuweisen. Dazu begeben wir uns in die geometrische Situation eines Schemas Y_1 der Charakteristik $p > 2$ und betrachten den durch den Frobenius auf der Strukturgarbe induzierten absoluten Frobenius auf Y_1. Unser Anliegen ist es den folgenden Satz zu zeigen:

Satz 6.3.10. *Es sei k ein perfekter Körper der Charakteristik* char $k = p > 2$*, W der zugehörige Wittring, Y/W ein lokal noethersches, glattes Schema und X/Y eine modulare, gewöhnliche elliptische Kurve oder eine modulare, gewöhnliche K3-Fläche, so dass die Annahme 6.3.3 erfüllt ist. Dann existiert ein ausgezeichneter Lift $F_Y\colon Y \to Y$ des absoluten Frobenius $F_{Y_1}\colon Y_1 \to Y_1$ auf der Reduktion $Y_1 = Y \times_{\mathrm{Spec}\ W} \mathrm{Spec}\ W/pW$, das heißt ein Deligne-Tate-Morphismus auf Y.*

Dieser Satz ist motiviert durch [Ogus01], wo die Aussage für elliptische Kristalle gezeigt wurde (siehe [Ogus01, Prop. 2.10]). Wir möchten allerdings in dieser Arbeit, abgesehen von dem Abschnitt 6.1 über kristalline Kohomologie, auf die Sprache der Kristalle verzichten. Des Weiteren werden wir die Argumentation aus [Ogus01] auf den Fall von K3-Flächen erweitern.

Die Idee des Beweises zu dem Satz ist, eine natürliche Bijektion zwischen der Menge der Lifts eines Morphismus und der Menge der Lifts einer Geraden herzustellen, so dass sich aus einem kanonischen Lift einer Geraden der gesuchte Deligne-Tate-Morphismus ableiten lässt.

Im Folgenden möchten wir kurz den Inhalt dieser Arbeit wiedergeben und dabei zugleich den Beweis des Satzes skizzieren. In Kapitel 2 fixieren wir lediglich etwas Notation und zitieren die später mehrfach gebrauchten Sätze über Moduln, Garben und Morphismen aus der Standardliteratur. Wir erinnern in Kapitel 3 an die Definitionen von elliptischen Kurven und K3-Flächen, geben Beispiele und betrachten die für die Hodge-Zerlergung interessanten Garben $R^q p_* \Omega^p_{X/Y}$ für eine elliptische Kurve oder K3-Fläche $p\colon X \to Y$.

Den kanonischen Lift einer Geraden, aus dem wir den Deligne-Tate-Morphismus ableiten möchten, erhalten wir durch die spezielle Struktur der de-Rham-Kohomologie für elliptische Kurven und K3-Flächen. Daher widmen wir uns in Kapitel 4 der de-Rham-Kohomologie (Abschnitt 4.1) und ihrer Eigenschaften wie der Hodge-Filtrierung (Abschnitt 4.2), der Poincaré-Dualität (Abschnitt 4.3) und dem Gauß-Manin-Zusammenhang (Abschnitt 4.4). Weiter erläutern wir in Abschnitt 4.5 die Kodaira-Spencer-Abbildung κ, definieren ein Schema als *modular*, falls κ ein Isomorphismus ist, und zeigen in Abschnitt 4.6 einen Zusammenhang zwischen der Kodaira-Spencer-Abbildung und dem Gauß-Manin-Zusammenhang auf.

In Kapitel 5 befassen wir uns nun endlich mit der Problemstellung des Liftens von Morphismen. Dabei beschränken wir uns für die Betrachtungen in diesem Kapitel auf den rein algebraischen Fall eines kommutativen Ringes A, eines Ideals $J \subseteq A$ mit $J^2 = 0$ und eines Homomorphismus $g'\colon A/J \to A/J$. Nachdem wir in Abschnitt 5.1 die Menge $\Lambda(g')$ der Lifts des Homomorphismus g' und in Abschnitt 5.2 die Menge $\Lambda_H(K)$ der Lifts einer Geraden $K \subseteq H/J$ für einen A-Modul H definiert und charakterisiert haben, kommen wir im Abschnitt 5.3 zu der entscheidenden Aussage über die Beziehung zwischen den Mengen $\Lambda(g')$ und $\Lambda_{h_0^*H}(g'^*H)$ für ein fest gewählten Lift $h_0 \in \Lambda(g')$. Es existiert nämlich ein kommutatives Diagramm natürlicher Abbildungen der Gestalt (siehe Proposition 5.3.7):

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(g') \arrow[r, "\delta_{h_0}"] \arrow[d, "\cong"'] & \Lambda_{h_0^*H}(g'^*K) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Der}_R(A, A) \otimes_A g_*J \arrow[r, "\nabla' \otimes \mathrm{id}"] & \mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0) \otimes_A g_*J,
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

wobei $h_0 \in \Lambda(g')$ und $L_0 \in \Lambda_H(K)$ fest gewählte Lifts sind. Hierbei ist ∇' ein durch einen Zusammenhang ∇ induzierter Homomorphismus. Wenn speziell ∇' ein Isomorphismus ist, liefert uns das Diagramm (1.1) eine natürliche Bijektion $\delta_{h_0}\colon \Lambda(g') \to \Lambda_{h_0^*H}(g'^*K)$, so dass es äquivalent ist einen ausgezeichneten Homomorphismenlift $\hat{h} \in \Lambda(g')$ oder eine ausgezeichnete Familie von Geradenlifts $(\mathscr{L}_{h_0})_{h_0 \in \Lambda(g')}$ mit $\mathscr{L}_{h_0} = \delta_{h_0}(\hat{h}) \in \Lambda_{h_0^* H}(K)$ für alle $h_0 \in \Lambda(g')$ zu finden.

Die Resultate aus Kapitel 5 wenden wir in Kapitel 6 auf die spezielle Situation an, für die der Hauptsatz der Arbeit 6.3.10 formuliert ist. Für den Beweis des Satzes 6.3.10 genügt es, ausgezeichnete Frobenius-Lifts F_{Y_n} für jedes Pullback der Gestalt $Y_n := Y \times_{\text{Spec } W} \text{Spec } W/p^n W$ zu finden, so dass diese miteinander verträglich sind. Daher gehen wir mittels Induktion nach n vor. Durch die geforderte auszeichnende Eigenschaft der Lifts F_{Y_n} genügt es das Problem lokal zu betrachten, so dass wir $Y_n = \text{Spec } A$ als affin annehmen können. Um in die Situation von Kapitel 5 zu gelangen definieren wir J als das Ideal zu $Y_{n-1} \to Y_n$ und $g' \colon A/J \to A/J$ als den zu dem nach Induktionsvoraussetzung bereits gefundenen Frobenius-Lift $F_{Y_{n-1}}$ korrespondierenden Homomorphismus $F^{\#}_{Y_{n-1}}$. Für H wählen wir den durch die Hodge-Filtrierung auf der de-Rham-Kohomologie gegebenen Modul $F^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)(Y_n)$, wobei $d = \dim X/Y$ sei. Dann erhalten wir die kanonischen Geraden

$$K = F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1})(Y_{n-1}) \cong H^0(\Omega^d_{X_{n-1}/Y_{n-1}}),$$

$$L_0 = F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)(Y_n) \cong H^0(\Omega^d_{X_n/Y_n}).$$

Für den Zusammenhang ∇ wählen wir den Gauß-Manin-Zusammenhang. Insbesondere ist der induzierte Homomorphismus ∇' ein Isomorphismus, wenn X/Y modular ist. Daher genügt es eine wie oben beschriebene Familie von Geradenlifts $(\mathscr{L}_{h_0})_{h_0 \in \Lambda(g')}$ zu finden.

Zur Konstruktion von $\mathscr{L}_{h_0}$ konstruieren wir einen Homomorphismus $V_{h_0} \colon L_0 \to h_0^* H$ und setzen $\mathscr{L}_{h_0} = V_{h_0}(L_0)$. Dazu definieren wir zunächst den relativen Frobenius als den eindeutigen Morphismus $F_{X_1/Y_1} \colon X_1 \to F^*_{Y_1} X_1$ in das Pullback $F^*_{Y_1} X_1$:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, dashed, "F_{X_1/Y_1}"] \arrow[drr, bend left, "F_{X_1}"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\
& F^*_{Y_1} X_1 \arrow[r, "pr_{X_1}"'] \arrow[d, "pr_{Y_1}"] & X_1 \arrow[d, "p_1"] \\
& Y_1 \arrow[r, "F_{Y_1}"] & Y_1.
\end{tikzcd}$$

Die kristalline Kohomologie, die wir in Abschnitt 6.1 erläutern, induziert einen kanonischen Homomorphismus $\phi_{F_{Y_n}} \colon \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n) \to \mathscr{H}^d_{dR}(F^*_{Y_n} X_n/Y_n)$ für jedes $n \geq 1$ und jeden Frobenius-Lift F_{Y_n}. Den dazu dualen Homomorphismus können wir mittels Poincaré-Dualität als einen Homomorphismus $V_{F_{Y_n}} \colon F^*_{Y_1} \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n) \to \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$ auffassen, welcher den gesuchten Homomorphismus $V_{h_0} \colon L_0 \to h_0^* H$ induziert, wenn wir h_0 für den zu F_{Y_n} korrespondierenden Homomorphismus $F^{\#}_{Y_n}$ schreiben.

Die Bijektivität von δ_{h_0} liefert uns nun einen Lift $\hat{h} = \delta_{h_0}^{-1}(V_{h_0}(L_0)) \in \Lambda(g')$. Wir werden zeigen, dass dieser Lift von der Wahl von $h_0 \in \Lambda(g')$ unabhängig und durch die

Eigenschaft $V_{h_0}(L_0) = h_0^* L_0$ eindeutig ist. Dabei korrespondiert $\hat{h}$ zu einem geometrischen Morphismus $\hat{F}_{Y_n}\colon Y_n \to Y_n$, welcher F_{Y_1} liftet und durch die folgende Eigenschaft eindeutig ist:

$$V_{F_{Y_n}}(F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)) = F^*_{Y_n} F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n).$$

Insbesondere liefert die Folge $(F_{Y_n})_{n\geq 1}$ formal einen Lift $F_Y\colon Y \to Y$ des Frobenius F_{Y_1}, das heißt einen Deligne-Tate-Morphismus auf Y, dessen Existenz gerade die Aussage des Satzes 6.3.10 war.

Während wir den Beweis für elliptische Kurven ohne Probleme führen können, ist für K3-Flächen nicht unmittelbar klar, dass der Morphismus $V_{F_{Y_n}}$ die Gerade $F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$ in den Untermodul $F^{d-1} \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n) \subseteq \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$ abbildet. Für Kurven ist dies wegen $d-1=0$ trivial. Für K3-Flächen mussten wir daher die zusätzliche Annahme 6.3.3 machen. Dabei ist nicht klar, ob sich diese Annahme allgemein beweisen lässt, so dass wir den Satz 6.3.10 für alle gewöhnlichen, modularen K3-Flächen zeigen können. Dies gilt es noch zu untersuchen.

2 Moduln, Garben und Morphismen

In diesem Kapitel möchten wir einige Notationen definieren und einige für die folgenden Kapitel wichtige Eigenschaften über Moduln, Garben und Morphismen zusammenfassen. Dazu verweisen wir großen Teils auf die Standardliteratur [Bour74], [Mats80], [Hart77] und [Liu06]. Es sei vorausgesetzt, dass der Leser mit den allgemeinen Definitionen und der Theorie von Ringen, Moduln, Modulgarben und Schemata vertraut ist. Auch sollten ihm der Inhalt dieses Kapitels nicht neu erscheinen, das Kapitel dient vielmehr zur Fixierung der Notation und als Referenz für die folgenden Kapitel.

2.1 Moduln

Im Folgenden seien A, B und C kommutative Ringe, $\alpha\colon A \to B$ und $\beta\colon B \to C$ Ringhomomorphismen, M ein A-Modul, N ein B-Modul und P ein C-Modul. Weiter sei $J \subseteq A$ ein Ideal in A und $\pi\colon A \to A/J$ der zugehörige kanonische Epimorphismus.

Definition 2.1.1. *Wir definieren*

(i) den A-Modul α_*N als die abelsche Gruppe N zusammen mit der durch

$$a \cdot n := \alpha(a) \cdot n \text{ für } a \in A,\ n \in N$$

definierten A-Modulstruktur,

(ii) den B-Modul α^*M als die abelsche Gruppe $M \otimes_A \alpha_*B$ zusammen mit der durch

$$b_1 \cdot (m \otimes b_2) := m \otimes b_1 \cdot b_2 \text{ für } m \in M,\ b_1, b_2 \in B$$

definierten B-Modulstruktur,

(iii) den A/J-Modul M/J als den Modul π^*M.

Den ersten Fall bezeichnet man als Einschränkung der Skalare und den zweiten als Erweiterung der Skalare. Bei der Einschränkung der Skalare schreibt man häufig kurz N für den A-Modul a_*N. Allerding ist in dieser Arbeit die Notation von zentraler Bedeutung, da wir häufig Endomorphismen g über einem Ring A betrachten werden, so dass wir verschiedene A-Modulstrukturen M und g_*M für einen A-Modul M erhalten.

Proposition 2.1.2. *Es gelten folgende Eigenschaften:*

(a) Transitivität der Erweiterung der Skalare:
Die natürliche Abbildung

$$\beta^*\alpha^*M \to (\beta \circ \alpha)^*M,\ m \otimes b \otimes c \mapsto m \otimes \beta(b) \cdot c$$

ist ein Isomorphismus von C-Moduln.

(b) Projektionsformel:
Die natürliche Abbildung

$$\alpha_* N \otimes_A M \to \alpha_*(N \otimes_B \alpha^* M),\ n \otimes m \mapsto n \otimes m \otimes 1$$

ist ein Isomorphismus von A-Moduln.

(c) Adjungierte Operatoren:
Die Operatoren Erweiterung und Einschränkung der Skalare sind adjungiert zueinander. Das heißt die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(M, \alpha_* N) \to \mathrm{Hom}_B(\alpha^* M, N),\ \varphi \mapsto (m \otimes b \mapsto b \cdot \varphi(m))$$

ist ein Isomorphismus.

(d) Erhalt der Projektivität:
Falls M ein projektiver A-Modul ist, so ist auch $\alpha^* M$ ein projektiver B-Modul. Insbesondere ist M/J für einen projektiven Modul M wiederum projektiv.

(e) Falls $J^2 = 0$ gilt, so ist J auf natürliche Weise ein A/J-Modul mittels π, so dass $\pi_* J$ und J als A-Moduln isomorph sind. Des Weiteren ist die natürliche Abbildung

$$M/J \otimes_{A/J} J \to M \otimes_A J,\ m \otimes \overline{a} \otimes j \mapsto m \otimes \overline{a}.j$$

ein Isomorphismus.

Beweis. (a) Siehe [Bour74, Ch. II, §5.1 Prop. 2].

(b) Siehe [Bour74, Ch. II, §5.2 Prop. 6].

(c) Siehe [Bour74, Ch. II, §5.1 Prop. 1].

(d) Siehe [Bour74, Ch. II, §5.1 Prop. 4].

(e) Wegen $J^2 = 0$ ist $a_1 \cdot j = a_2 \cdot j$ für $j \in J$ und $a_1, a_2 \in A$ mit $\pi(a_1) = \pi(a_2)$. Daher können wir $\overline{a}.j := a \cdot j$ definieren und erhalten eine eindeutige A/J-Modulstruktur auf J. Insbesondere sind wegen $\pi(a).j = a \cdot j$ die A-Moduln $\pi_* J$ und J isomorph. Weiter gilt:

$$M/J \otimes_{A/J} J = (M \otimes_A A/J) \otimes_{A/J} J \cong M \otimes_A (A/J \otimes_{A/J} J) \cong M \otimes_A J,$$

woraus die zweite Aussage folgt.

$\square$

Es seien nun E ein A-Modul, F ein B-Modul und G sowohl ein A- als auch ein B-Modul. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(E, G)$ auf kanonische Weise wiederum ein B-Modul. Folgenden Isomorphismus werden wir häufiger benutzen:

Proposition 2.1.3. *Falls E oder F projektiv und endlich erzeugt ist, so ist die natürliche Abbildung*

$$Hom_A(E,G) \otimes_B F \to Hom_A(E, G \otimes_B F),\ \varphi \otimes f \mapsto (e \mapsto \varphi(e) \otimes f)$$

ein Isomorphismus von B-Moduln.

Beweis. Siehe [Bour74, Ch. II, §4.2 Prop. 2]. □

2.2 Differentialmodul

Es sei R ein kommutativer Ring, A eine R-Algebra und M ein A-Modul. Zunächst erinnern wir an den Begriff einer Derivation.

Definition 2.2.1. *Eine R-*Derivation *von A nach M ist eine Abbildung $D \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ mit*

$$D(a_1 \cdot a_2) = a_1 \cdot D(a_2) + a_2 \cdot D(a_1).$$

Mit $\mathrm{Der}_R(A, M)$ bezeichnen wir den A-Modul aller Derivationen von A nach M.

Wir betrachten nun die A-Algebra $A \otimes_R A$. Es sei

$$m\colon A \otimes_R A \to,\ a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 \cdot a_2$$

die Multiplikation und $I := \ker m$ deren Kern. Wir setzen $Z := (A \otimes_R A)/I^2$ und erhalten zwei kanonische Einbettungen von A in Z:

$$p_1 : A \to Z,\ a \mapsto (a \otimes 1 + I^2),$$

$$p_2 : A \to Z,\ a \mapsto (1 \otimes a + I^2).$$

Daher besitzt Z zwei verschiedene A-Modulstrukturen $p_{1*}Z$ und $p_{2*}Z$. Da das Bild der Differenz $d := (p_1 - p_2)$ bereits in dem Ideal I liegt, sind die Modulstrukturen $p_{1*}(I/I^2)$ und $p_{2*}(I/I^2)$ auf dem Ideal $I/I^2 \subseteq Z$ jedoch identisch. Daraus lässt sich folgern, dass d eine Derivation von A nach I/I^2 ist:

$$\begin{aligned} d(a_1a_2) &= a_1a_2 \otimes 1 - 1 \otimes a_1a_2 = a_1a_2 \otimes 1 - a_1 \otimes a_2 + a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1a_2 \\ &= a_1 \cdot (a_2 \otimes 1 - 1 \otimes a_2) + a_2 \cdot (a_1 \otimes 1 - 1 \otimes a_1) = a_1 \cdot d(a_2) + a_2 \cdot d(a_1) \end{aligned}$$

Daher können wir folgendes definieren:

Definition 2.2.2. *Den Differentialmodul $\Omega_{A/R}$ definieren wir als den kanonischen A-Modul I/I^2 zusammen mit der kanonischen R-Derivation $d = (p_1 - p_2)$.*

Das Bild $d(A)$ der Derivation d erzeugt bereits den Modul $\Omega_{A/R}$, denn für ein beliebiges $\omega = \sum_{k=1}^n a_k \otimes b_k \in \Omega_{A/R}$ gilt $\sum_{k=1}^n a_k b_k = 0$ und daher:

$$\omega = \sum_{k=1}^n a_k \otimes b_k = \sum_{k=1}^n a_k \otimes b_k - \sum_{k=1}^n 1 \otimes a_k b_k = \sum_{k=1}^n b_k \cdot d(a_k). \tag{2.1}$$

Der Differentialmodul besitzt folgende universelle Eigenschaft:

Proposition 2.2.3. *Für jeden A-Modul M und jede R-Derivation $d'\colon A \to M$ existiert genau ein $f\colon \Omega_{A/R} \to M$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d'"] \arrow[dr, "d"'] & & M \\ & \Omega_{A/R} \arrow[ur, dashed, "\exists! f"'] & \end{tikzcd}.$$

Insbesondere ist folgende kanonische Abbildung ein Isomorphismus:

$$Hom_A(\Omega_{A/R}, M) \to \mathrm{Der}_R(A, M),\ \ f \mapsto f \circ d.$$

Beweis. Siehe [Mats80, Ch. 10, (26.C) Prop.]. □

Folgende exakte Sequenz ist von großer Bedeutung:

Proposition 2.2.4. *Es sei B eine A-Algebra mittels eines Homomorphismus $\alpha\colon A \to B$. Folgende Sequenz natürlicher Homomorphismen von B-Moduln ist exakt:*

$$\alpha^*\Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R} \to \Omega_{B/A} \to 0.$$

Beweis. Siehe [Mats80, Ch. 10, (26.H) Th. 57] □

2.3 Garben und Morphismen

Die Grundlagen der Garbentheorie, wie man sie in [Hart77, Ch. II] nachschlagen kann, seien als bekannt vorausgesetzt. Es seien X, Y Schemata und $p\colon X \to Y$ ein Morphismus. Wie in [Hart77, Ch. II, 5] definieren wir zu einer $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathscr{F}$ die $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $p_*\mathscr{F}$ und zu einer $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $\mathscr{G}$ die $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $p^*\mathscr{G}$. Diese Notation ist mit der Notation aus Definition 2.1.1 in dem Sinne verträglich, dass für surjektives $p\colon X \to Y$ gilt:

$$(p_*\mathscr{F})(Y) \cong p'_*(\mathscr{F}(X)) \text{ und } (p^*\mathscr{G})(X) \cong p'^*(\mathscr{G}(Y)),$$

wobei $p'\colon \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ der durch p induzierte Ringhomomorphismus ist.

Analog zu dem Differentialmodul aus der Defintion 2.2.2 definieren wir die Differentialgarbe. Zu $p\colon X \to Y$ sei $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ die Diagonalabbildung. Da $\Delta(X) \subseteq X \times_Y X$ lokal abgeschlossen ist, siehe [Hart77, Ch. II. 4.2 (proof)], können wir eine offene Menge $W \subseteq X \times_Y X$ wählen, so dass $\Delta(X) \subseteq W$ ein abgeschlossenes Unterschema ist. Mit $\mathscr{I}$ bezeichnen wir die zu $\Delta(X) \subseteq W$ gehörige Idealgarbe.

Definition 2.3.1. *Als die* (relative) Differentialgarbe *von X über Y definieren wir die $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$.*

Für affine Schemata $U = \text{Spec } R$ und $V = \text{Spec } A$ und einen Morphismus $f\colon U \to V$ gilt $\Omega_{V/U}(V) \cong \Omega_{A/R}$. Daher bekommen wir insbesondere für jede offene, affine Teilmenge $U \subseteq X$ und eine offene, affine Teilmenge $V \subseteq Y$ mit $p(U) \subseteq V$ die kanonische Derivation $d\colon \mathcal{O}_V \to \Omega_{V/U}$, so dass sich diese zu einer Derivation $d\colon \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/Y}$ verkleben lässt. Für Details siehe [Hart77, Ch. II 8.9.2].

Wir möchten an dieser Stelle definieren, was wir unter Glattheit eines Morphismus $p\colon X \to Y$ verstehen.

Definition 2.3.2. *Es sei Y lokal noethersch. Wir nennen einen Morphismus $p\colon X \to Y$* glatt *bzw. X ein* glattes Y-Schema*, falls p vom endlichen Typ und flach ist und für jedes $y \in Y$ die Faser $X_y \to \text{Spec } k(y)$ glatt über $k(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$ ist. Dabei heißt ein Schema T über einem Körper K glatt, falls für den algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K der Basiswechsel $T_{\overline{K}} = T \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } \overline{K}$ regulär ist, das heißt für alle Punkte $t \in T_{\overline{K}}$ gilt $\dim \mathcal{O}_{T_{\overline{K}},t} = \dim_{k(t)} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, wobei $k(t) = \mathcal{O}_{T_{\overline{K}},t}/\mathfrak{m}_t$ ist.*

Proposition 2.3.3. *Basiswechsel, Kompositionen und Faserprodukte glatter Morphismen sind glatt.*

Beweis. Siehe [Liu06, Ch. 4.3.3, Prop. 3.38] □

Proposition 2.3.4. *Es sei Y lokal noethersch und $p\colon X \to Y$ ein glatter Morphismus. Für jedes $x \in X$ ist dann $\Omega_{X/Y}$ in einer Umgebung von x frei vom Rang $dim_x X_y$, wobei X_y die Faser von p über $y = p(x)$ ist.*

Beweis. Siehe [Liu06, Ch. 6.2.2, Prop. 2.5]. □

Als Folgerung erhalten wir für glatte Morphismen im Zusammenhang mit der relativen Differentialgarbe folgende kurze exakte Sequenz:

Proposition 2.3.5. *Es seien S ein lokal noethersches Schema, $q\colon Y \to S$ ein lokal noethersches, glattes S-Schema und $p\colon X \to Y$ ein glattes Y-Schema. Dann ist die folgende Sequenz natürlicher Homomorphismen von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben exakt:*

$$0 \to p^*\Omega_{Y/S} \to \Omega_{X/S} \to \Omega_{X/Y} \to 0.$$

Beweis. Die Aussage ist lokal für eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ nachzuweisen. Nach Proposition 2.3.4 können wir daher annehmen, dass $\Omega_{Y/S}$, $\Omega_{X/S}$ und $\Omega_{X/Y}$ frei sind mit $\text{rk } \Omega_{Y/S} = \text{rk } p^*\Omega_{Y/S} = \dim_y Y_s$, $\text{rk } \Omega_{X/S} = \dim_x X_s$ und $\text{rk } \Omega_{X/Y} = \dim_x X_y$ für $y = p(x)$ und $s = q(y)$. Die exakte Sequenz aus Proposition 2.2.4 liefert eine exakte Sequenz

$$p^*\Omega_{Y/S} \to \Omega_{X/S} \to \Omega_{X/Y} \to 0.$$

Es genügt daher, $\text{rk } p^*\Omega_{Y/S} = \text{rk } \Omega_{X/S} - \text{rk } \Omega_{X/Y}$ zu zeigen. Das folgt unmittelbar aus der Dimensionsformel $\dim_x X_s = \dim_y Y_s + \dim_x X_y$. □

Für unsere Bedürfnis ist von großer Bedeutung, dass glatte Morphismen folgendes infinitesimale Lifting-Kriterium erfüllen:

Proposition 2.3.6. *Es sei S ein lokal noethersches Schema und $p\colon X \to S$ ein glatter Morphismus. Weiter sei $Y = \operatorname{Spec} A$ ein noethersches affines S-Schema und $Y_0 \subseteq Y$ ein abgeschlossenes Unterschema, welches durch ein nilpotentes Ideal definiert wird. Dann existiert zu jedem S-Morphismus $\varphi_0\colon Y_0 \to X$ ein S-Morphismus $\varphi\colon Y \to X$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "\exists\varphi"] \arrow[dd, bend right] & \\
Y_0 \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d] & X \arrow[dl] \\
S &
\end{tikzcd}.$$

Beweis. Siehe [Liu06, Ch. 6.2.2, Prop. 2.15]. □

Einen für Garben verallgemeinerten Isomorphismus zu Proposition 2.1.2(b) liefert die folgende Projektionsformel:

Proposition 2.3.7 (Projektionsformel)**.** *Es sei $p\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe und $\mathscr{E}$ eine lokal freie $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe von endlichem Rang. Dann exisitert für alle i ein kanonischer Isomorphismus:*

$$R^i p_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\mathscr{E}) \cong R^i p_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{E}.$$

Beweis. Dies ist eine direkte Folgerung aus 2.1.2(b). Siehe auch [Hart77, Ch. III. Ex. 8.3]. □

Für die Betrachtungen der Hodge-Zerlegung werden wir auf den Satz von Grauert zurückgreifen, so dass wir ihn an dieser Stelle formulieren möchten:

Proposition 2.3.8 (Grauert)**.** *Es sei Y ein ganzes, noethersches Schema, $p\colon X \to Y$ ein projektiver Morphismus noetherscher Schemata, und $\mathscr{F}$ eine kohärente Garbe auf X, welche flach über Y ist. Weiter sei für ein i die Funktion $h^i(y, \mathscr{F}) = \dim H^i(X_y, \mathscr{F}_y)$ konstant auf Y. Dann ist $R^i p_*(\mathscr{F})$ lokal frei auf Y und für jeden Punkt $y \in Y$ ist die natürliche Abbildung*

$$R^i p_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to H^i(X_y, \mathscr{F}_y)$$

ein Isomorphismus von $k(y)$-Vektorräumen. Insbesondere ist $R^i p_*(\mathscr{F})$ lokal frei vom Rang $\operatorname{rk} R^i p_*(\mathscr{F}) = h^i(y, \mathscr{F})$.

Beweis. Siehe [Hart77, Ch. III, Cor. 12.9]. □

3 Elliptische Kurven und K3-Flächen

Da wir uns in dieser Arbeit vorwiegend für elliptische Kurven und K3-Flächen interessieren, möchten wir in diesem Abschnitt ihre Definitionen und grundlegenden Eigenschaften notieren und Beispiele aufzeigen.

3.1 Elliptische Kurven

Wir möchten an die Definition einer elliptischen Kurve erinnern. Dazu sei R ein kommutativer, noetherscher Ring und Y ein noethersches, glattes Schema über $S = \operatorname{Spec} R$.

Definition 3.1.1. *Unter einer elliptischen Kurve X über Y verstehen wir ein glattes, nothersches, projektives Y-Schema $p\colon X \to Y$ von relativer Dimension 1, so dass für jedes $y \in Y$ die Faser $X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y)$ von p eine glatte zusammenhängende Kurve über S vom Geschlecht $g := \dim H^1(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 1$ ist.*

Beispiel 3.1.2. *(a) In dem Fall $Y = S = \operatorname{Spec} k$ für einen Körper k ist eine elliptische Kurve X über Y bis auf Isomorphie durch eine homogene Gleichung*

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3$$

für Koeffizienten $a_1, \dots, a_6 \in \overline{k}$ in der projektiven Fläche $\mathbb{P}^2_{\overline{k}}$ gegeben. Eine Solche Gleichung wird Weierstrass Gleichung *genannt. Für weitere Details sei auf [Silv09, Ch. III, Prop. 3.1] verwiesen.*

(b) Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\operatorname{char} k \neq 2$ lässt sich aus dem Beispiel (a) folgern, dass jede elliptische Kurve bis auf Isomorphie durch eine Gleichung

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

für ein $\lambda \in \overline{k} \setminus \{0,1\}$ und den Punkt $(0:1:0)$ im Unendlichen in $\mathbb{P}^2_{\overline{k}}$ gegeben ist. Diese Form der Darstellung einer elliptischen Kurve wird Legendre-Form *genannt. Genaueres findet sich in [Silv09, Ch. III, Prop. 1.7]. Wir konstruieren daraus ein interessanteres Beispiel, indem wir $S = \operatorname{Spec} k$ und $Y = \operatorname{Spec} \overline{k}\left[t, \frac{1}{t(t-1)}\right]$ setzen und X über Y durch die Gleichung*

$$y^2 = x(x-1)(x-t)$$

als Kurve in $\mathbb{P}^2_Y$ definieren. Jeder Punkt in $P_0 \in Y$ korrespondiert zu einem Element $t_0 \in \overline{k} \setminus \{0,1\}$ und die Faser X_{P_0} ist eine elliptische Kurve über $\overline{k}$ gegeben durch die Gleichung $y^2 = x(x-1)(x-t_0)$. Wir nennen X auch die Legendre-Familie.

Aus der Definition einer elliptischen Kurve folgt, dass $\dim H^1(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 1$ ein konstante Funktion auf Y ist. Da Y glatt ist, lässt sich auf den Zusammenhangskomponenten von Y der Satz von Grauert aus Proposition 2.3.8 anwenden. Folglich ist $R^1p_*\mathcal{O}_X$ lokal frei vom Rang 1. Wegen der Serre-Dualität sind $R^1 p_* \mathcal{O}_X$ und $p_* \Omega_{X/Y}$ dual zueinander (siehe [Hart77, Ch. III, Cor. 7.13]), so dass auch $p_* \Omega_{X/Y}$ lokal frei vom Rang 1 ist.

Ebenso ist $\dim H^0(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 1$ konstant auf Y, da X_y immer eine projektive, glatte Kurve ist. Nach dem Satz von Grauert ist somit auch $p_* \mathcal{O}_X$ lokal frei vom Rang 1. Wegen der Serre-Dualität ist dann auch $R^1 p_* \Omega_{X/Y}$ lokal frei vom Rang 1. Insbesondere hat der Hodge-Diamant, welcher die Hodge-Zahlen $h^{pq} = \dim H^q(X_y, \Omega^p_{X_y}) = \mathrm{rk}\ R^q p_* \Omega^p_{X/Y}$ mit $\Omega^p_{X/Y} := \Lambda^p \Omega_{X/Y}$ repräsentiert, die Form

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1. \\ & 1 & \end{array} \tag{3.1}$$

3.2 K3-Flächen

K3-Flächen nehmen unter den Flächen eine ähnliche Sonderrolle ein wie elliptische Kurven unter den Kurven. Zur Definition verlangt man zunächst, dass das kanonische Vektorbündel trivial ist, und schließt anschließend die abelschen Varietäten aus. Das lässt sich auf verschieden äquivalente Weisen bewerkstelligen. Für uns ist die folgende Definition sinnvoll. Es sei wiederum R ein kommutativer, noetherscher Ring und Y ein noethersches, glattes Schema über $S = \mathrm{Spec}\ R$.

Definition 3.2.1. *Unter einer K3-Fläche X über Y verstehen wir ein glattes, noethersches, projektives Y-Schema $p\colon X \to Y$ von relativer Dimension 2, so dass zu jedem Punkt $y \in Y$ die Faser $X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}\ k(y)$ von p eine glatte Fläche über S mit trivialem kanonischen Bündel $\Omega^2_{X_y/k(y)} \cong \mathcal{O}_{X_y}$ und $H^1(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 0$ ist.*

Beispiel 3.2.2. *(a) In dem Fall $Y = S = \mathrm{Spec}\ k$ für einen Körper k ist ein typisches Beispiel für eine K3-Fläche X über Y die durch die inhomogene Gleichung*

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 0$$

gegebene Fermat-Quartik in $\mathbb{P}^3_{\overline{k}}$. Allgemeiner ist jede durch eine Gleichung vierten Grades gegebene glatte Hyperebene in $\mathbb{P}^3_{\overline{k}}$ eine K3-Fläche. Siehe dazu auch [FKKP78, V.1.2].

(b) Ein interessanteres Beispiel einer K3-Fläche ist die zu (a) korrespondierende universelle Familie *X/Y, welche durch die Gleichung*

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 + \sum_{\binom{2 \le i+j+k \le 4}{i,j,k \le 2}} t_{ijk} x^i y^j z^k = 0$$

in $\mathbb{P}^{22}_{\overline{k}}$ gegeben ist. Dabei ist $Y = \mathrm{Spec}\ \overline{k}[t_{ijk}]_{\binom{2 \le i+j+k \le 4}{i,j,k \le 2}} \cong \mathbb{A}^{19}$ zu setzen. Siehe auch [FKKP75, I.5.5].

Ebenso wie für elliptische Kurven möchten wir für K3-Flächen den Hodge-Diamanten bestimmen. Nach Definition sind $\dim H^1(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = \dim H^1(X_y, \Omega^2_{X_y/k(y)}) = 0$ auf Y

konstante Funktionen. Da X_y nach Definition für alle $y \in Y$ eine glatte, projektive Fläche ist, folgt ebenso, dass auch $\dim H^0(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = \dim H^0(X_y, \Omega^2_{X_y/k(y)}) = 1$ auf Y konstante Funktionen sind. Daher gilt nach dem Satz von Grauert $R^1 p_* \mathcal{O}_X = R^1 p_* \Omega^2_{X/Y} = 0$ und die Garben $p_* \mathcal{O}_X$ und $p_* \Omega^2_{X/Y}$ sind lokal frei vom Rang 1. Aus der Serre-Dualität erhält man alle weiteren Hodge-Zahlen bis auf $h^{11} = \dim H^1(X_y, \Omega_{X_y})$. Aus dem Satz von Riemann-Roch kann man allerdings folgern, dass $h^{11} = 20$. Für Details sei hier auf [FKKP78, V.1.3] oder auch [Deli81, Prop. 1.1] verwiesen.

Insgesamt bilden die Hodge-Zahlen $h^{pq} = \dim H^q(X_y, \Omega^p_{X_y}) = \text{rk } R^q p_* \Omega^p_{X/Y}$ den Hodge-Diamanten:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1. \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array} \tag{3.2}$$

Für die nachfolgende Betrachtungen ist es von besonderer Bedeutung, dass die Garben $R^0 p_* \Omega^2_{X/Y}$, $R^1 p_* \Omega_{X/Y}$ und $R^2 p_* \mathcal{O}_X$ lokal frei vom Rang 1, 20 bzw. 1 sind. Abschließend fassen wir zusammen:

Korollar 3.2.3. *Ist X/Y eine elliptische Kurve oder eine K3-Fläche, so sind die Garben $R^q p_* \Omega^p_{X/Y}$ für alle $p, q \geq 0$ lokal frei, und ihre Ränge werden in (3.1) bzw. (3.2) dargestellt.*

4 De-Rham-Kohomologie

In diesem Kapitel möchten wir die nötigen Grundlagen über die de-Rham-Kohomologie und die Hodge-Filtrierung eines relativen Schemas $p\colon X \to Y$ erläutern. Wir betrachten dabei die allgemeinere als später benötigte Situation eines glatten, noetherschen, projektiven Schemas $p\colon X \to Y$ über einem glatten, noetherschen Schema $Y \to S$. Den Fall von Kurven, insbesondere elliptischen Kurven, und Flächen, insbesondere K3-Flächen, werden wir dabei in Beispielen betrachten.

Daher sei im ganzen Kapitel S ein noethersches Schema, Y ein noethersches, glattes S-Schema und $p\colon X \to Y$ ein noethersches, glattes, projektives Y-Schema. Insbesondere ist $p\colon X \to Y$ nach [Hart77, Ch. II, Th. 4.9] eigentlich im Sinne der algebraischen Geometrie (siehe [Hart77, Ch. II.4, p. 100]). Wir sagen, dass X von relativer Dimension d über Y ist, kurz $\dim X/Y = d$, wenn alle Fasern X_y die Dimension $\dim_x X_y = d$ haben.

Das Schema X/Y lässt sich auch als Familie von S-Schemata $(X_y)_{y\in Y}$ interpretieren. In diesem Sinne nennen wir Y auch den Parameterraum der Familie X/Y.

4.1 De-Rham-Kohomologie

In diesem Abschnitt möchten wir die de-Rham-Kohomologie als die Hyperkohomologie des de-Rham-Komplexes definieren. Es sei $\Omega_{X/Y}$ die in 2.3.1 definierte Differentialgarbe. Wir notieren $\Omega^i_{X/Y} = \Lambda^i\Omega_{X/Y}$ für die äußeren Potenzen. Die kanonische Derivation $d\colon \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/Y}$ induziert Abbildungen:

$$d^i\colon \Omega^i_{X/Y} \to \Omega^{i+1}_{X/Y}.$$

Auf einer offenen, affinen Teilmenge $\operatorname{Spec} A = U \subseteq X$ hat ein Element $\omega \in \Omega^i_{X/Y}(U)$ wegen Gleichung (2.1) die Gestalt

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot da_{1j} \wedge da_{2j} \wedge \cdots \wedge da_{ij}$$

für gewisse $b_j, a_{kj} \in A$ für $1 \le j \le n$ und $1 \le k \le i$. Dann operiert d^i wie folgt:

$$d^i(\omega) = \sum_{j=1}^{n} db_j \wedge da_{1j} \wedge da_{2j} \wedge \cdots \wedge da_{ij}.$$

Wegen $d(1) = 0$ folgt $d^{i+1} \circ d^i = 0$, so dass wir den de-Rahm-Komplex $\Omega^\bullet_{X/Y}$ erhalten:

$$\Omega^\bullet_{X/Y}\colon \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_{X/Y} \xrightarrow{d^1} \Omega^2_{X/Y} \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{i-1}} \Omega^i_{X/Y} \xrightarrow{d^i} \dots .$$

Definition 4.1.1. *Die n-te de-Rahm-Kohomologiegruppe von X/Y ist gegeben durch die Anwendung des n-ten hyperderivierten Funktor von p_* auf den de-Rham-Komplex:*

$$\mathscr{H}^n_{dR}(X/Y) = \mathbf{R}^n p_* \Omega^\bullet_{X/Y}.$$

Um den hyperderivierten Funktor zu berechnen, lässt sich beispielsweise ein Komplex injektiver Objekte wählen, so dass es einen Quasiisomorphismus

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{X/Y} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^2_{X/Y} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

gibt. Dann gilt $\mathbf{R}p_*\Omega^\bullet_{X/Y} = H^n(p_*I^\bullet)$, wobei hier $H^n(p_*I^\bullet)$ die gewöhnliche n-te Kohomologiegruppe bezeichnet. Für den Komplex $I^\bullet$ lässt sich wiederum der zu einer Cartan-Eilenberg Auflösung $J^{\bullet,\bullet}$ von $\Omega^\bullet_{X/Y}$ assoziierte totale Komplex $\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})$ wählen, das heißt der durch $\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})^n = \bigoplus_{i+j=n} J^{i,j}$ gegebene Komplex. Für weitere Details siehe [Weib94, Ch. 5.7].

4.2 Hodge-Filtrierung

Wir betrachten in diesem Abschnitt die auf den de-Rham-Kohomologiegruppen gegebene Hodge-Filtrierung. Diese ist ein sehr gutes Werkzeug um die de-Rham-Kohomologie zu verstehen. Wir definieren zunächst die Hodge-Filtrierung und die Hodge-de-Rham Spektralsequenz, betrachten anschließend den Spezialfall einer elliptischen Kurve bzw. einer K3-Fläche und zeigen abschließend die Verträglich der de-Rham-Kohomologie und ihrer Hodge-Filtrierung mit Basiswechseln.

Definition 4.2.1. *Zu einem Komplex $L^\bullet$ ist die* Hodge-Filtrierung *durch Unterkomplexe $F^iL^\bullet$ gegeben, die wie folgt definiert sind:*

$$(F^iL^\bullet)^j := \begin{cases} 0 & \text{falls } j < i \\ L^j & \text{falls } j \geq i, \end{cases}$$

das heißt $F^iL^\bullet = (0 \to \cdots \to 0 \to L^i \to L^{i+1} \to \ldots)$. Die Hodge-Filtrierung des de-Rham-Komplexes induziert die Hodge-Filtrierung der de-Rham-Kohomologiegruppen wie folgt:

$$F^i\mathscr{H}^j_{dR}(X/Y) := \mathrm{Bild}(\mathbf{R}^jp_*F^i\Omega^\bullet_{X/Y} \to \mathbf{R}^jp_*\Omega^\bullet_{X/Y}).$$

Wegen der Faktorisierungeigenschaft der Abbildungen für $i_1 \geq i_2 \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^jp_*F^{i_1}\Omega^\bullet_{X/Y} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbf{R}^jp_*\Omega^\bullet_{X/Y} \\
& \mathbf{R}^jp_*F^{i_2}\Omega^\bullet_{X/Y}, \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ist die Hodge-Filtrierung absteigend.

Ist X von relativer Dimension d über Y, so ist $\Omega_{X/Y}$ nach Proposition 2.3.4 lokal frei von Rang $\mathrm{rk}\ \Omega_{X/Y} = d$, so dass für $i > d$ die äußeren Potenzen $\Omega^i_{X/Y}$ verschwinden.

Für $i > d$ folgt daher $F^i\Omega^\bullet_{X/Y} = 0$ und somit $F^i\mathscr{H}^j_{dR}(X/Y) = 0$. Folglich ist die Hodge-Filtrierung von der From:

$$\mathscr{H}^j_{dR}(X/Y) = F^0\mathscr{H}^j_{dR}(X/Y) \supseteq F^1\mathscr{H}^j_{dR}(X/Y) \supseteq \cdots \supseteq F^{d+1}\mathscr{H}^j_{dR}(X/Y) = 0$$

Als nächstes möchten wir die Hodge-de-Rham Spektralsequenz erläutern. Dazu sei $J^{\bullet,\bullet}$ eine Cartan-Eilenberg Auflösung von $\Omega^\bullet_{X/Y}$. Wir definieren für $i \geq 0$ eine Filtrierung $F^iJ^{\bullet,\bullet}$ auf $J^{\bullet,\bullet}$, wobei der Doppelkomplex $F^iJ^{\bullet,\bullet}$ durch

$$(F^iJ^{\bullet,\bullet})^{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{falls } m < i \\ J^{m,n} & \text{falls } m \geq i \end{cases}$$

gegeben sei. Diese Filtrierung ist mit der Hodge-Filtrierung in dem Sinne verträglich, dass $F^iJ^{\bullet,\bullet}$ eine Cartan-Eilenberg Auflösung für den Komplex $F^i\Omega^\bullet_{X/Y}$ ist. Auf dem totalen Komplex $\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})$ wird die Filtrierung $F^i_{Tot}\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet}) := \mathrm{Tot}(F^iJ^{\bullet,\bullet})$ induziert, wobei wir $\mathrm{Tot}(F^iJ^{\bullet,\bullet})$ als Unterkomplex von $\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})$ auffassen. Explizit gilt:

$$(F^i_{Tot}\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet}))^n = \bigoplus_{p+q=n,\ p\geq i} J^{p,q}.$$

Insbesondere gilt für die Quotienten

$$\mathrm{gr}^n_{Tot}(\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})) := (F^n_{Tot}\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet}))/(F^{n+1}_{Tot}\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})) = J^{n,\bullet}.$$

Dabei ist $J^{n,\bullet}$ nach Definition von Cartan-Eilenberg Auflösungen gerade eine injektive Auflösung von $\Omega^n_{X/Y}$. Da der Funktor p_* links-exakt ist, erhalten wir durch

$$F^i_{Tot}(p_*\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})) := p_*F^i_{Tot}\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})$$

eine Filtrierung auf dem Komplex $p_*\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})$.

Definition 4.2.2. *Die zu dem wie oben filtrierten Komplex* $p_*\mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet})$ *assoziierte Spektralsequenz nennen wir die* Hodge-de-Rham Spektralsequenz*.*

Für die Assoziation einer Spektralsequenz zu einem filtrierten Komplex verweisen wir auf [Weib94, 5.4]. Da $J^{\bullet,\bullet}$ ein Doppelkomplex injektiver Objekte ist, gilt insbesondere

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathrm{gr}^p_{Tot}(p_*Tot(J^{\bullet,\bullet}))) \cong H^q(p_*\mathrm{gr}^p_{Tot}(Tot(J^{\bullet,\bullet}))) \cong H^q(p_*J^{p,\bullet}) \cong R^qp_*\Omega^p_{X/Y}.$$

Daher hat die Hodge-de-Rham Spektralsequenz die Form

$$E_1^{p,q} \cong R^qp_*\Omega^p_{X/Y} \Rightarrow \mathscr{H}^{p+q}_{dR}(X/Y),$$

wobei die Filtrierung auf $\mathscr{H}^{p+q}_{dR}(X/Y)$ die Hodge-Filtrierung aus Defintion 4.2.1 ist, da die Filtrierung auf der Cartan-Eilenberg Auflösung mit der Hodge-Filtrierung verträglich ist. Daher gilt nach dem Satz für Konvergenz von Spektralsequenzen mit endlicher

Filtrierung [HS70, Ch. VIII, 3.5]:

$$E_\infty^{p,q} \cong \mathrm{gr}^p \mathscr{H}_{dR}^{p+q}(X/Y).$$

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass die Hodge-de-Rham Spektralsequenz bei E_1 entartet, das heißt $E_1^{p,q} \cong E_\infty^{p,q}$ für alle $p, q \geq 0$. In diesem Fall gilt für alle $p, q \geq 0$:

$$R^q p_* \Omega^p_{X/Y} \cong E_1^{p,q} \cong E_\infty^{p,q} \cong \mathrm{gr}^p \mathscr{H}_{dR}^{p+q}(X/Y). \tag{4.1}$$

Beispiel 4.2.3. *(a) Als erstes Beispiel betrachten wir den Fall einer elliptischen Kurve X/Y. Wegen $E_1^{p,q} \cong R^q p_* \Omega^p_{X/Y}$ zeigt der Hodge-Diamant (3.1) von X/Y den Rang von $E_1^{p,q}$ für alle p, q. Da die $\mathcal{O}_Y$-lineare Differentialabbildung*

$$d_1 \colon E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$$

kein von Null verschiedener Isomorphismus sein kann, folgt aus Dimensionsgründen bereits $d_1 = 0$, so dass $E_1^{p,q} \cong E_2^{p,q}$ für alle p, q gilt. Weiter gilt auch $d_r = 0$ für alle $r \geq 2$, da entweder Quelle oder Ziel dieser Abbildungen bereits Null sein müssen. Insgesamt folgt, dass die Hodge-de-Rham Spektralsequenz bei E_1 entartet, so dass Gleichung (4.1) gilt. Insbesondere interessieren uns die Fälle

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^1_{dR}(X/Y)/F^1\mathscr{H}^1_{dR}(X/Y) &\cong R^1 p_* \mathcal{O}_X, \\ F^1\mathscr{H}^1_{dR}(X/Y) &\cong p_* \Omega_{X/Y}. \end{aligned}$$

Folglich sind alle $F^i \mathscr{H}^1_{dR}(X/Y)$ lokal frei und für die Ränge gilt

$$\mathrm{rk}\ F^1\mathscr{H}^1_{dR}(X/Y) = 1,\ \mathrm{rk}\ \mathscr{H}^1_{dR}(X/Y) = 2.$$

(b) Als nächstes Beispiel betrachten wir den Fall einer K3-Fläche X/Y. Wiederum liefert der Hodge-Diamant (3.2) von X/Y den Rang von $E_1^{p,q}$ für alle p, q. Hier sieht man schnell ein, dass die Differentialabbildung d_1 Null ist, da entweder die Quelle $E_1^{p,q}$ oder das Ziel $E_1^{p+1,q}$ Null ist. Damit folgt $E_1^{p,q} \cong E_2^{p,q}$ für alle p, q und mit der selben Argumentation erhält man, dass $d_r = 0$ für alle $r \geq 2$ gilt, so dass auch für eine K3-Fläche X/Y die Hodge-de-Rham Spektralsequenz bei E_1 entartet und ebenso Gleichung (4.1) gilt. Bei einer K3-Fläche interessieren uns besonders die Fälle:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^2_{dR}(X/Y)/F^1\mathscr{H}^2_{dR}(X/Y) &\cong R^2 p_* \mathcal{O}_X, \\ F^1\mathscr{H}^2_{dR}(X/Y)/F^2\mathscr{H}^2_{dR}(X/Y) &\cong R^1 p_* \Omega_{X/Y}, \\ F^2\mathscr{H}^2_{dR}(X/Y) &\cong p_* \Omega^2_{X/Y}. \end{aligned}$$

Auch hier sind alle $F^i \mathscr{H}^2_{dR}(X/Y)$ lokal frei und für die Ränge erhalten wir:

$$\mathrm{rk}\ F^2\mathscr{H}^2_{dR}(X/Y) = 1,\ \mathrm{rk}\ F^1\mathscr{H}^2_{dR}(X/Y) = 21,\ \mathrm{rk}\ \mathscr{H}^1_{dR}(X/Y) = 22.$$

Eine weitere Eigenschaft der de-Rham-Kohomologiegruppe und ihrer Hodge-Filtrierung, die wir noch benötigen werden, ist ihre Verträglichkeit mit Basiswechseln. Zunächst führen wir dazu eine Notation für Basiswechsel ein.

Definition 4.2.4. *Es sei $f: Y' \to Y$ ein beliebiger Morphismus noetherscher, glatter S-Schemata. Mit f^*X/Y' bezeichnen wir den Basiswechsel $X \times_Y Y'/Y'$, das heißt, dass das folgende kommutative Diagramm ein Pullback ist:*

$$\begin{tikzcd} f^*X \arrow[r, "pr_X"] \arrow[d, "pr_{Y'}"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y' \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

Proposition 4.2.5. *Wiederum sei $f: Y' \to Y$ ein beliebiger Morphismus noetherscher, glatter S-Schemata. Unter der Voraussetzung, dass die $\mathcal{O}_Y$-Moduln*

$$R^q p_* \Omega^p_{X/Y}, \ \mathscr{H}^n_{\mathrm{dR}}(X/Y)$$

für alle $p, q, n \geq 0$ lokal frei sind, sind die kanonischen Homomorphismen

$$f^* R^q p_* \Omega^p_{X/Y} \to R^q p_* \Omega^p_{f^*X/Y'},$$

$$f^* \mathscr{H}^n_{\mathrm{dR}}(X/Y) \to \mathscr{H}^n_{\mathrm{dR}}(f^*X/Y'),$$

für alle $p, q, n \geq 0$ Isomorphismen.

Proof. Siehe [Katz70, Cor. 8.3]. □

Beispiel 4.2.6. *Für eine elliptische Kurve oder K3-Fläche X/Y sind nach Korollar 3.2.3 die $\mathcal{O}_Y$-Moduln $R^q p_* \Omega^p_{X/Y}$ lokal frei. Da in diesem Fall die Hodge-de-Rham Spektralsequenz bei E_1 entartet, sind alle Quotienten $gr^p \mathscr{H}^{p+q}_{\mathrm{dR}}(X/Y)$ lokal frei, so dass auch $\mathscr{H}^n_{\mathrm{dR}}(X/Y)$ für alle $n \geq 0$ lokal frei sind. Daher lässt sich hier insbesondere die Proposition 4.2.5 anwenden. Folglich haben X/Y und f^*X/Y' den selben Hodge-Diamanten, so dass auch die Hodge-de-Rham Spektralsequenz für f^*X/Y' bei E_1 entartet.*

Da $F^d \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \cong p_* \Omega^d_{X/Y}$ gilt und die Isomorphismen aus Proposition 4.2.5 die kanonischen sind, erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} F^d \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(f^*X/Y') \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(f^*X/Y') \arrow[d, "\cong"] \\ f^* F^d \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \arrow[r, "\subseteq"] & f^* \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y). \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Analog gilt $\mathrm{gr}^0 \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \cong R^d \mathcal{O}_X$ und die Isomorphismen aus Proposition 4.2.5 liefern *einen Morphismus kurzer exakter Sequenzen:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F^1\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(f^*X/Y') \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\cong"] & \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(f^*X/Y') \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & R^d\mathcal{O}_{f^*X} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & f^*F^1\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \arrow[r] & f^*\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \arrow[r] & f^*R^d\mathcal{O}_X \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

wobei die Exaktheit der zweiten Sequenz folgt, da $R^d\mathcal{O}_X$ lokal frei, das heißt insbesondere flach, ist, so dass nach [Liu06, Ch. 1.2.1, Prop 2.6] die kurze exakte Sequenz

$$0 \to F^1\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \to \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \to R^d\mathcal{O}_X \to 0$$

nach Anwenden von f^* exakt bleibt.

Da es für eine Kurve oder Fläche X/Y außer

$$\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y),\ F^1\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y),\ F^d\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y)$$

keine Moduln der Hodge-Filtrierung ungleich Null gibt, ist in dem Fall einer elliptischen Kurve oder K3-Fläche X/Y die Hodge-Filtrierung von $\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y)$ somit vollständig mit Basiswechseln verträglich.

4.3 Poincaré-Dualität

In diesem Abschnitt möchten wir an die Poincaré-Dualität für die de-Rham-Kohomologiegruppen erinnern. Zunächst machen wir für den gesamten Abschnitt die Annahme, dass die Hodge-de-Rham Spektralsequenz für X/Y bei E_1 entartet. Weiter sei X/Y immer von relativer Dimension d.

Wegen $gr^i\mathscr{H}^{2d}_{\mathrm{dR}}(X/Y) \cong R^{2d-i}p_*\Omega^i_{X/Y}$ ist der einzige von Null verschiedene Hodge-Quotient von $\mathscr{H}^{2d}_{\mathrm{dR}}(X/Y)$ der d-te Quotient $gr^d\mathscr{H}^{2d}_{\mathrm{dR}}(X/Y) \cong R^dp_*\Omega^d_{X/Y}$, so dass wir einen Isomorphismus $\mathscr{H}^{2d}_{\mathrm{dR}}(X/Y) \cong R^dp_*\Omega^d_{X/Y}$ erhalten. Mittels der Spurabbildung (siehe [Hart75, Ch. II, Prop. 2.1]) bekommen wir einen Isomorphismus

$$\mathscr{H}^{2d}_{\mathrm{dR}}(X/Y) \xrightarrow{\cong} R^dp_*\Omega^d_{X/Y} \xrightarrow[\cong]{\mathrm{tr}} \mathcal{O}_Y.$$

Proposition 4.3.1 (Poincaré-Dualität)**.** *Zusammen mit der Spurabbildung ist das Cup-Produkt der Kohomologiegruppen*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_P\colon \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \to \mathscr{H}^2_{\mathrm{dR}}(X/Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_Y \tag{4.3}$$

eine perfekte Paarung. Insbesondere erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus:

$$\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y) \cong \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{H}^d_{\mathrm{dR}}(X/Y), \mathcal{O}_Y).$$

Beweis. Siehe [Hart75, Ch. II., Cor. 5.3]. □

Ist X'/Y ein weiteres glattes Schema der relativen Dimension d, für das die Hodge-de-Rham Spektralsequenz bei E_1 entartet, und $\phi\colon \mathscr{H}^d_{dR}(X'/Y) \to \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y)$ ein $\mathcal{O}_Y$-linearer Homomorphismus, so können wir den zugehörigen dualen Homomorphismus mittels Poincaré-Dualität als einen Homomorphismus

$$\hat{\phi}\colon \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \to \mathscr{H}^d_{dR}(X'/Y) \tag{4.4}$$

auffassen.

Die assoziierten graduierten Paarungen der Hodge-Filtrierung

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}^i \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \otimes \mathrm{gr}^{d-i} \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{gr}^d \mathscr{H}^{2d}_{dR}(X/Y) \arrow[d, "\cong"] & \\
R^{d-i} p_* \Omega^i_{X/Y} \otimes R^i \Omega^{d-i}_{X/Y} \arrow[r] & R^d p_* \Omega^d_{X/Y} \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & \mathcal{O}_Y
\end{tikzcd}$$

stimmen mit den perfekten Paarungen der Serre-Dualität überein (siehe auch [Katz72, 2.3.5.1]). Insbesondere stimmt der zur kanonischen Projektion

$$\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \to \mathrm{gr}^0 \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y)$$

duale Homomorphismus bis auf Isomorphismen mit der Einbettung

$$\begin{tikzcd}
F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\cong"] & \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathrm{gr}^0 \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y), \mathcal{O}_Y) \arrow[r] & \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y), \mathcal{O}_Y)
\end{tikzcd}$$

überein. Ist nun $g\colon X \to X'$ ein Morphismus über Y, so induziert dieser sowohl einen Homomorphismus:

$$\phi\colon \mathscr{H}^d_{dR}(X'/Y) \to \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y)$$

als auch einen Homomorphismus

$$\psi\colon R^d p_* \mathcal{O}_{X'} \to R^d p_* \mathcal{O}_X.$$

Da $\mathrm{gr}^0 \mathscr{H}_{dR}(X/Y) \cong R^d p_* \mathcal{O}_X$ gilt und die Hodge-Filtrierung funktoriell ist, erhalten wir folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^d_{dR}(X'/Y) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathrm{gr}^0 \mathscr{H}_{dR}(X'/Y) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \arrow[r] & \mathrm{gr}^0 \mathscr{H}_{dR}(X/Y).
\end{tikzcd}$$

Dualisieren ergibt bis auf kanonische Isomorphismen das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\hat{\psi}"] & \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \arrow[d, "\hat{\phi}"] \\ F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X'/Y) \arrow[r, "\subseteq"] & \mathscr{H}^d_{dR}(X'/Y). \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Das heißt insbesondere $\hat{\phi}(F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y)) = \hat{\psi}(F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y)) \subseteq F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X'/Y)$. Ist nun speziell $f\colon Y \to Y$ ein Endomorphismus, $X'/Y = f^*X/Y$ der zugehörige Basiswechsel und $g = pr_X\colon f^*X \to X$ die Projektion des Faserprodukts, so können wir die Diagramme (4.2) und (4.5) wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{tikzcd} F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\hat{\psi}"] & \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \arrow[d, "\hat{\phi}"] \\ F^d\mathscr{H}^d_{dR}(f^*X/Y) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\cong"] & \mathscr{H}^d_{dR}(f^*X/Y) \arrow[d, "\cong"] \\ f^*F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \arrow[r, "\subseteq"] & f^*\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y). \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

4.4 Gauß-Manin-Zusammenhang

Auf der de-Rham-Kohomologiegruppe $\mathscr{H}^q_{dR}(X/Y)$ existiert immer ein kanonischer Zusammenhang, der auch Gauß-Manin-Zusammenhang genannt wird. Wir konstruieren in diesem Abschnitt zunächst den Gauß-Manin-Zusammenhang. Anschließend untersuchen wir seine Verträglichkeit mit der Hodge-Filtrierung, was uns zur Griffiths Transversalität führt, und mit der Poincaré-Dualität. Für Details zu diesem Abschnitt verweisen wir insbesondere auf [Katz72, Ch. 1].

Wir erinnern zunächst an die Definitionen eines Zusammenhangs:

Definition 4.4.1. *Es sei $\mathscr{E}$ eine quasikohärente Garbe von $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Dann ist ein* Zusammenhang *auf $\mathscr{E}$ ein Garbenhomomorphismus:*

$$\rho\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S},$$

so dass für alle offenen Mengen $U \subseteq Y$ und alle $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, $e \in \mathscr{E}(U)$

$$\rho(f \cdot e) = f \cdot \rho(e) + e \otimes df$$

gilt, wobei $d\colon \mathcal{O}_Y \to \Omega_{Y/S}$ die kanonische Derivation ist.

Um den Gauß-Manin-Zusammenhang herzuleiten, benötigen wir zunächst den Begriff der Koszul-Filtrierung. Dazu sei

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz lokal freier $\mathcal{O}_X$-Moduln von endlichem Rang.

Definition 4.4.2. *Die* Koszul-Filtrierung *der äußeren Algebra $\Lambda^\bullet \mathscr{G}$ ist gegeben durch*

$$K^i := K^i(\Lambda^\bullet \mathscr{G}) := \mathrm{Bild}(\Lambda^i \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{\bullet - i} \mathscr{G} \to \Lambda^\bullet \mathscr{G}),$$

wobei wir $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G}$ als Untermodul auffassen und $\Lambda^i \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{\bullet - i} \mathscr{G} \to \Lambda^\bullet \mathscr{G}$ die kanonische Abbildung ist. Dabei ist K^i wie folgt auf kanonische Weise graduiert:

$$(K^i)_k = \begin{cases} 0 & \textit{falls } k < i \\ \mathrm{Bild}(\Lambda^i \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{k-i} \mathscr{G} \to \Lambda^k \mathscr{G}) & \textit{falls } k \geq i. \end{cases}$$

Aus der Definition folgt sofort, dass $\Lambda^\bullet \mathscr{G} = K^0 \supseteq K^1 \supseteq K^2 \supseteq \dots$ gilt. Daher erhalten wir stets die folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \to K^1/K^2 \to K^0/K^2 \to K^0/K^1 \to 0. \tag{4.7}$$

Um diese kurze exakte Sequenz besser zu verstehen, rechnen wir K^i/K^{i+1} aus:

Lemma 4.4.3. *Der Homomorphismus β induziert einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{gr}^i(K) = K^i/K^{i+1} \cong \Lambda^i \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{\bullet - i} \mathscr{H},$$

wobei dies wiederum so zu lesen ist, dass $(\mathrm{gr}^i(K))_k = 0$ für $k < i$ gilt.

Beweis. Durch $\beta \colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ wird für $k \geq i$ ein Homomorphismus

$$(\Lambda^i \mathrm{id}_{\mathscr{F}} \otimes \Lambda^{k-i} \beta) \colon \Lambda^i \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{k-i} \mathscr{G} \to \Lambda^i \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{k-i} \mathscr{H}$$

induziert. Da für ein $g \in \ker(\Lambda^i \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{k-i} \mathscr{G} \to \Lambda^k \mathscr{G})$ einer der Faktoren aus $\Lambda^{k-i} \mathscr{G}$ bereits in $\mathscr{F}$ liegen muss, folgt wegen $\beta(\mathscr{F}) = 0$ auch $g \in \ker(\Lambda^i \mathrm{id}_{\mathscr{F}} \otimes \Lambda^{k-i} \beta)$. Folglich Faktorisiert $(\Lambda^i \mathrm{id}_{\mathscr{F}} \otimes \Lambda^{k-i} \beta)$ über $(K^i)_k$, so dass wir einen Homomorphismus

$$\tilde{\beta} \colon (K^i)_k \to \Lambda^i \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{k-i} \mathscr{H}$$

erhalten. Für ein $g \in \ker \tilde{\beta}$ müssen mindestens $(i+1)$ der Faktoren $\Lambda^k \mathscr{G}$ bereits aus $\mathscr{F}$ stammen. Folglich gilt $\ker \tilde{\beta} = (K^{i+1})_k$ und somit $(K^i)_k/(K^{i+1})_k \cong \Lambda^i \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{k-i} \mathscr{H}$. Wegen $(K^i)_k = 0$ für $k < i$ folgt das Lemma. □

Die kurze exakte Sequenz (4.7) hat damit die Gestalt:

$$0 \to \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{\bullet - 1} \mathscr{H} \to K^0/K^2 \to \Lambda^\bullet \mathscr{H} \to 0. \tag{4.8}$$

Wir möchten dies nun auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \to p^* \Omega_{Y/S} \to \Omega_{X/S} \to \Omega_{X/Y} \to 0$$

aus Proposition 2.3.5 anwenden. In diesem Fall ist (4.8) die kurze exakte Sequenz:

$$0 \to p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet-1}_{X/Y} \to K^0/K^2(\Omega^\bullet_{X/S}) \to \Omega^\bullet_{X/Y} \to 0. \tag{4.9}$$

Durch Anwendung des hyperderivierten Funktors $\mathbf{R}^q p_*$ ergibt sich daraus folgende lange exakte Sequenz:

$$\cdots \to \mathbf{R}^q p_*(K^0/K^2(\Omega^\bullet_{X/S})) \to \mathbf{R}^q p_*(\Omega^\bullet_{X/Y}) \xrightarrow{\nabla} \mathbf{R}^{q+1} p_*(p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet-1}_{X/Y}) \to \cdots .$$

Da $\Omega_{Y/S}$ lokal frei von endlichem Rang ist, gilt nach der Projektionsformel aus Proposition 2.3.7:

$$\mathbf{R}^{q+1} p_*(p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet-1}_{X/Y}) \cong \Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{R}^{q+1} p_*(\Omega^{\bullet-1}_{X/Y}) \cong \mathbf{R}^q p_*(\Omega^\bullet_{X/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}.$$

Proposition und Definition 4.4.4. *Die Randabbildung der langen exakten Sequenz*

$$\cdots \to \mathbf{R}^q p_*(\Omega^\bullet_{X/Y}) \xrightarrow{\nabla} \mathbf{R}^q p_*(\Omega^\bullet_{X/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S} \cong \mathbf{R}^{q+1} p_*(p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet-1}_{X/Y}) \to \ldots$$

ist ein Zusammenhang auf $\mathscr{H}^q_{dR}(X/Y) = \mathbf{R}^q p_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$ *und bezeichnen wir auch als den* Gauß-Manin-Zusammenhang $\nabla = \nabla_{GM}$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass ∇ die Rechenregel eines Zusammenhangs erfüllt. Dafür verweisen wir auf den zweiten Abschnitt in [KO68]. □

Es ist eine für unsere Zwecke wichtige Eigenschaft des Gauß-Manin-Zusammenhangs, dass er die Hodge-Filtrierung respektiert. Diese Tatsache wird Griffiths Transversalität genannt.

Proposition 4.4.5 (Griffiths Transversalität)**.** *Der Gauß-Manin-Zusammenhang respektiert die Hodge-Filtrierung wie folgt:*

$$\nabla_{GM}(F^i \mathscr{H}^q_{dR}(X/Y)) \subseteq F^{i-1} \mathscr{H}^q_{dR}(X/Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S} \textit{ für } i \geq 1.$$

Beweis. Für einen beliebigen Komplex $L^\bullet$ definieren wir die Notation $(L^\bullet)[n] := L^{\bullet+n}$. Aus der Definition der Hodge-Filtrierung für beliebige Komplexe folgt sofort die Identität $F^i(L^{\bullet+n}) = (F^{i+n}(L^\bullet))[n]$. Wenden wir dies auf den Komplex $p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet-1}_{X/Y}$ an, so erhalten wir:

$$F^i(p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet-1}_{X/Y}) = p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} (F^{i-1}(\Omega^\bullet_{X/Y}))[-1].$$

Anwenden von F^i auf die kurze exakte Sequenz (4.9) ergibt unter Benutzung der obigen Gleichung folgenden Morphismus von kurzen exakten Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet-1}_{X/Y} \arrow[r] & K^0/K^2(\Omega^\bullet_{X/S}) \arrow[r] & \Omega^\bullet_{X/Y} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} (F^{i-1}(\Omega^\bullet_{X/Y}))[-1] \arrow[r] \arrow[u, "\subseteq"'] & F^i(K^0/K^2(\Omega^\bullet_{X/S})) \arrow[r] \arrow[u, "\subseteq"'] & F^i(\Omega^\bullet_{X/Y}) \arrow[r] \arrow[u, "\subseteq"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Wie bei der Konstruktion des Gauß-Manin-Zusammenhangs, liefert $\mathbf{R}^q p_*$ lange exakte Sequenzen. Wegen der Funktorialität von $\mathbf{R}^q p_*$ bilden die Randabbildungen folgendes kommutierende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^q p_*(\Omega^\bullet_{X/Y}) \arrow[r, "\nabla_{GM}"] & \mathbf{R}^q p_*(\Omega^\bullet_{X/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S} \\
\mathbf{R}^q p_*(F^i(\Omega^\bullet_{X/Y})) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u] & \mathbf{R}^q p_*(F^{i-1}(\Omega^\bullet_{X/Y})) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}, \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

wobei wir hier wiederum die durch die Projektionsformel gewonnene Isomorphie

$$\mathbf{R}^{q+1} p_*(p^*\Omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} (F^{i-1}(\Omega^\bullet_{X/Y}))[-1]) \cong \mathbf{R}^q p_*(F^{i-1}(\Omega^\bullet_{X/Y})) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}$$

genutzt haben. Nach der Definition der Hodge-Filtrierung für die de-Rham-Kohomologiegruppen bedeutet das gerade $\nabla_{GM}(F^i \mathscr{H}^q_{dR}(X/Y)) \subseteq F^{i-1}\mathscr{H}^q_{dR}(X/Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}$. $\square$

Beispiel 4.4.6. *(a) Für $i = 1$ ist die Aussage der Griffiths Transversalität trivial, denn*

$$\nabla_{GM}(F^1\mathscr{H}^q_{dR}(X/Y)) \subseteq \nabla_{GM}(\mathscr{H}^q_{dR}(X/Y)) \subseteq \mathscr{H}^q_{dR}(X/Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}.$$

Da für eine Kurve X/Y, das heißt $\dim X/Y = 1$, aber bereits $F^i\mathscr{H}^q_{dR}(X/Y) = 0$ für $i \geq 2$ gilt, ist Griffiths Transversalität für Kurven trivial.

(b) Für eine Fläche X/Y, das heißt $\dim X/Y = 2$, erhalten wir aus Griffiths Transversalität eine nicht-triviale Inklusion:

$$\nabla_{GM}(F^2\mathscr{H}^q_{dR}(X/Y)) \subseteq F^1\mathscr{H}^q_{dR}(X/Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}.$$

Im Folgenden möchten wir noch einen Zusammenhang zwischen dem Gauss-Manin-Zusammenhang und der Poincaré-Dualität darstellen. Der Gauß-Manin-Zusammenhang ist nach Konstruktion mit dem Cup-Produkt von Kohomologieklassen

$$\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \otimes \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y) \to \mathscr{H}^{2d}_{dR}(X/Y),\ s_1 \otimes s_2 \mapsto s_1 \cup s_2$$

verträglich, das heißt es gilt

$$\nabla_{GM}(D)(s_1 \cup s_2) = \nabla_{GM}(D)(s_1) \cup s_2 + s_1 \cup \nabla_{GM}(D)(s_2),$$

wenn wir $\nabla_{GM}(D)$ für eine Derivation $D \in \mathscr{D}er_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) \cong \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_{Y/S}, \mathcal{O}_Y)$ als eine Abbildung $\nabla_{GM}(D)\colon \mathscr{H}^n_{dR}(X/Y) \to \mathscr{H}^n_{dR}(X/Y)$ auffassen. Da die Spurabbildung $\mathrm{tr}\colon \mathscr{H}^{2d}_{dR}(X/Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_Y$ den Gauß-Manin-Zusammenhang auf den trivialen Zusammenhang d auf $\mathcal{O}_Y$ abbildet (siehe [Katz72, 2.3.5.1]), erhalten wir für die Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ die Eigenschaft

$$D(\langle s_1, s_2\rangle_P) = \langle \nabla(D)(s_1), s_2\rangle_P + \langle s_1, \nabla(D)(s_2)\rangle_P \tag{4.10}$$

für ein beliebiges $D \in \mathscr{D}er_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y)$ und Schnitte $s_1, s_2 \in \mathscr{H}^d_{dR}(X/Y)$.

4.5 Kodaira-Spencer-Abbildung

In diesem Abschnitt möchten wir die Kodaira-Spencer-Abbildung erklären, um anschließend die Eigenschaft *Modular* für ein Schema X/Y definieren zu können. Anschließend werden wir den Begriff Modular für die Beispiele 3.1.2(b) und 3.2.2(b) diskutieren. Als wichtigste Referenz zu diesem Abschnitt sei [FKKP75] genannt.

Im Folgenden schreiben wir abkürzend

$$T_{X/S} = \mathscr{D}er_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X),\ T_{Y/S} = \mathscr{D}er_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y),\ T_{X/Y} = \mathscr{D}er_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X).$$

Nach Proposition 2.3.5 ist

$$0 \to p^*\Omega_{Y/S} \to \Omega_{X/S} \to \Omega_{X/Y} \to 0 \tag{4.11}$$

eine kurze exakte Sequenz. Das zu dieser kurzen exakten Sequenz korrespondierende Element $\tilde{\xi} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}, p^*\Omega_{Y/S})$ wird *Kodaira-Spencer-Klasse* genannt. Wegen der Definition von Ext gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}, p^*\Omega_{Y/S}) &\cong H^1(X, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}, p^*\Omega_{Y/S}))\\ &\cong H^1(X, \mathscr{D}er_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S}),\end{aligned}$$

so dass wir die Kodaira-Spencer-Klasse als $\tilde{\xi} \in H^1(X, T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S})$ auffassen können. Wir erhalten eine zu $\tilde{\xi}$ korrespondierende lokale Version der Kodaira-Spencer-Klasse

$$\xi \in R^1p_*(T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S}).$$

Zu ξ assoziieren wir wie folgt eine Abbildung $\kappa\colon T_{Y/S} \to R^1p_*(T_{X/Y})$:
Durch die Projektionsformel aus Proposition 2.3.7 ist kanonisch ein Isomorphismus

$$R^1p_*(T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S}) \cong R^1p_*(T_{X/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}$$

gegeben. Dieser Isomorphismus induziert eine Paarung:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1\colon R^1p_*(T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} T_{Y/S} \to R^1p_*(T_{X/Y}),\ s \otimes D \mapsto \langle s, D\rangle_1. \tag{4.12}$$

Die Abbildung κ definieren wir nun durch:

$$\kappa\colon T_{Y/S} \to R^1p_*(T_{X/Y}),\ D \mapsto \langle \xi, D\rangle_1.$$

Definition 4.5.1. *Wir nennen $\kappa\colon T_{Y/S} \to R^1p_*(T_{X/Y})$ die* Kodaira-Spencer-Abbildung.

Etwas formloser ausgedrückt können wir die Kodaira-Spencer-Abbildung auch als eine Art Ableitung der Abbildung

$$Y \to \{X_y \mid y \in Y\},\ y \mapsto X_y,$$

die jedem Punkt $y \in Y$ seine Faser in X zuordnet, auffassen. In denen für uns interessanten Fällen ist X/Y eine relative elliptische Kurve oder eine relative K3-Fläche. Dann sind die Fasern gerade elliptische Kurven bzw. K3-Flächen über der Basis S und Y ein S-Schema, deren Punkte eben diese elliptische Kurven bzw. K3-Flächen repräsentieren. Die Kodaira-Spencer-Abbildung misst in einem gewissen Sinne die Abweichung der Familie X/Y von der universellen Familie. Siehe dazu auch [FKKP75, I.3.3]. Das motiviert folgende Definition:

Definition 4.5.2. *Wir nennen X/Y* modular *oder auch eine* modulare Familie*, falls κ ein Isomorphismus ist.*

Beispiel 4.5.3. *Im Folgenden möchten wir Beispiele für eine modulare elliptische Kurve und für eine modulare K3-Fläche geben. Zunächst können wir wegen der notwendigen Gleichheit*

$$\dim Y/S = \operatorname{rk}\, T_{Y/S} = \operatorname{rk}\, R^1 p_*(T_{X/Y}) = \operatorname{rk}\, R^1 p_*(\Omega_{X/Y}) \tag{4.13}$$

für eine modulare Familie X/Y die Dimension von Y/S ableiten.

(a) Für eine modulare elliptische Kurve X/Y muss nach Gleichung (4.13) $\dim Y/S = 1$ gelten. Die Legendre-Familie X/Y aus Beispiel 3.1.2(b) ist nach [FKKP75, I.4.3.A] in jedem Punkt universell, so dass die Kodaira-Spencer-Abbildung nach [FKKP75, I.3.3, Kor. 2] für X/Y ein Isomorphismus ist. Das heißt, dass die Legendre-Familie X/Y modular ist.

(b) Ist X/Y hingegen eine modulare K3-Fläche, so erhalten wir nach Gleichung (4.13) zunächst $\dim Y/S = 20$. Für jede Wahl einer Polarisierung erhalten wir allerdings eine Gleichung auf dem Parameterraum Y/S, so dass für den Parameterraum der semiuniversellen Familie $\dim Y/S = 19$ gilt. Insbesondere ist für die universelle Familie zur Fermat-Quartik aus Beispiel 3.2.2(b) die Kodaira-Spencer-Abbildung wiederum nach [FKKP75, I.3.3, Kor. 2] ein Isomorphismus. Für Details verweisen wir auf [FKKP75, I.5.5].

4.6 Gauß-Manin-Zusammenhang und Kodaira-Spencer-Abbildung

Im Folgenden möchten wir den Zusammenhang zwischen dem Gauß-Manin-Zusammenhang und der Kodaira-Spencer-Abbildung erläutern. Dabei ist für den Rest der Arbeit von entscheidener Bedeutung, dass eine bestimmte vom Gauß-Manin-Zusammenhang induzierte Abbildung ein Isomorphismus ist, falls X/Y eine modulare elliptische Kurve oder eine modulare K3-Fläche ist. Es sei X/Y nun immer von der relativen Dimension $d = \dim X/Y$.

Wir betrachten zunächst den wegen Griffiths Transversalität vom Gauß-Manin-Zusammenhang induzierten Homomorphismus:

$$\overline{\nabla}_{GM} \colon F^d \xrightarrow{\nabla_{GM}} F^{d-1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S} \xrightarrow{pr_{F^{d-1}/F^d} \otimes \mathrm{id}} F^{d-1}/F^d \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}, \tag{4.14}$$

wobei $pr_{F^{d-1}/F^d}\colon F^{d-1} \to F^{d-1}/F^d$ die Projektion ist und wir kurz $F^i := F^i\mathscr{H}^d_{dR}(X/Y)$ für alle i schreiben. Dabei ist $\overline{\nabla}_{GM}$ bereits $\mathcal{O}_Y$-linear, denn für einen Schnitt $s \in F^d(U)$ und einen Schnitt $a \in \mathcal{O}_Y(U)$ für eine offene Menge $U \subseteq Y$ gilt:

$$\overline{\nabla}_{GM}(a \cdot s) = a \cdot \overline{\nabla}_{GM}(s) + (s \bmod F^d) \otimes da = a \cdot \overline{\nabla}_{GM}(s).$$

Wie in den Propositionen 2.1.3 und 2.2.3 beschrieben, existieren folgende natürliche Isomorphismen:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(T_{Y/S}, \mathcal{O}_Y)) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(T_{Y/S}, \mathcal{O}_Y) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(T_{Y/S}, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d)).
\end{aligned}$$

Mit $\nabla'_{GM}\colon T_{Y/S} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d)$ bezeichnen wir das Bild von $\overline{\nabla}_{GM}$ unter diesen Isomorphismen.

Wir wollen nun zeigen, in welcher Beziehung die Abbildung ∇'_{GM} zur Kodaira-Spencer-Abbildung steht. Zunächst benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.6.1. *Es existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$\Omega^{d-1}_{X/Y} \cong \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_x}(\Omega_{X/Y}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^d_{X/Y}.$$

Beweis. Siehe [KM97, Ch. 4, 6.20]. □

Aus dem Cup-Produkt der Kohomologiegruppen

$$R^1p_*T_{X/Y} \otimes p_*\Omega^d_{X/Y} \to R^1p_*(T_{X/Y} \otimes \Omega^d_{X/Y}) \tag{4.15}$$

erhalten wir durch Dualisieren von $p_*\Omega^d_{X/Y}$ einen Homomorphismus:

$$\varrho\colon R^1p_*T_{X/Y} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(p_*\Omega^d_{X/Y}, R^1p_*(T_{X/Y} \otimes \Omega^d_{X/Y})).$$

Unter der Annahme, dass die Hodge-de-Rham Spektralsequenz bei E_1 entartet, können wir nun $F^d \cong p_*\Omega^d_{X/Y}$ und mit dem obigen Lemma

$$(F^{d-1}/F^d) \cong R^1p_*\Omega^{d-1}_{X/Y} \cong R^1p_*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}, \mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^d_{X/Y}) \cong R^1p_*(T_{X/Y}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^d_{X/Y})$$

schreiben, so dass $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(p_*\Omega^d_{X/Y}, R^1p_*(T_{X/Y} \otimes \Omega^d_{X/Y})) \cong \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d)$ gilt und wir ϱ als den Homomorphismus

$$\varrho\colon R^1p_*T_{X/Y} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d)$$

auffassen. Den Zusammenhang der Kodaira-Spencer-Abbildung mit dem Gauß-Manin-Zusammenhang stellt nun die folgende Proposition dar:

Proposition 4.6.2. *Unter der Annahme, dass die Hodge-de-Rham Spektralsequenz bei E_1 entartet, kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
T_{Y/S} \arrow[rr, "\nabla'_{GM}"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d) \\
& R^1 p_* T_{X/Y}. \arrow[ur, "\varrho"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Für den Beweis untersuchen wir zwei verschiedene Paarungen. Zum Einen haben wir die Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ aus (4.12). Zum Anderen nutzen wir das folgende Cup-Produkt von Kohomologie-Gruppen:

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_2\colon R^1p_*(T_{X/Y}\otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S})\otimes_{\mathcal{O}_Y} p_*\Omega^d_{X/Y} &\to R^1p_*(T_{X/Y}\otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^d_{X/Y})\\ s\otimes t &\mapsto \langle s,t\rangle_2.\end{aligned}$$

Durch Anwendung von Lemma 4.6.1 und der Projektionsformel aus Proposition 2.3.7 erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\alpha\colon R^1p_*(T_{X/Y}\otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^d_{X/Y})\cong R^1p_*\Omega^{d-1}_{X/Y}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\Omega_{Y/S}.$$

Da die Hodge-de-Rham Spektralsequenz bei E_1 entartet, induziert der Gauß-Manin-Zusammenhang eine Abbildung (siehe (4.14)):

$$\overline{\nabla}_{GM}\colon p_*\Omega^d_{X/Y}\to R^1p_*\Omega^{d-1}_{X/Y}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\Omega_{Y/S},$$

da $F^d\cong p_*\Omega^d_{X/Y}$ und $F^{d-1}/F^d\cong R^1p_*\Omega^{d-1}_{X/Y}$ gilt. Die Proposition ist im Prinzip eine Folgerung aus der Tatsache, dass sich der Gauß-Manin-Zusammenhang als Cup-Produkt mit der Kodaira-Spencer-Klasse darstellen lässt, das heißt es gilt

$$\overline{\nabla}_{GM} = (s\mapsto \alpha(\langle\xi,s\rangle_2)),$$

wobei s ein beliebiger Schnitt von F^d und $\xi\in R^1p_*(T_{X/Y}\otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S})$ die Kodaira-Spencer-Klasse ist. Diese Tatsache folgt aus [Katz72, Prop. (1.4.1.7)]. Die Proposition folgt nun, da das durch die Kohomologiegruppe $p_*\Omega^d_{X/Y}$ induzierte Cup-Produkt und die durch die Projektionsformel induzierte Paarung mit T_Y in dem Sinne miteinander kommutieren, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
R^1p_*(T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} T_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} p_*\Omega^d_{X/Y} \arrow[d, "\langle\cdot,\cdot\rangle_1 \otimes \mathrm{id}_{p_*\Omega^d_{X/Y}}"'] \arrow[dr, "\langle\cdot,\cdot\rangle_2 \otimes \mathrm{id}_{T_Y}"] & \\
R^1p_*T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} p_*\Omega^d_{X/Y} \arrow[d, "\langle\cdot,\cdot\rangle_3"] & R^1p_*(T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^d_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} T_Y \arrow[dl, "\langle\cdot,\cdot\rangle_4"] \\
R^1p_*(T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^d_{X/Y}) \arrow[d, "\cong"'] & \\
R^1(\Omega^{d-1}_{X/Y}) &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ das Cup-Produkt von Kohomologiegruppen aus (4.15) und die Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle_4$ ist ebenso wie $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ durch die Projektionsformel induziert. Wenn wir $p_*\Omega^d_{X/Y}$ im Diagramm dualisieren und die Kodaira-Spencer-Klasse $\xi \in R^1p_*(T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} p^*\Omega_{Y/S})$ festhalten, so erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
T_Y \arrow[d, "\kappa"'] \arrow[ddd, bend left=60, "\nabla'_{GM}"] \\
R^1p_*T_{X/Y} \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\varrho"'] \\
R^1p_*(T_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^d_{X/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(p_*\Omega^d_{X/Y}, \mathcal{O}_Y) \arrow[d, "\cong"'] \\
\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d)
\end{tikzcd}$$

Das entspricht gerade dem Diagramm der Proposition. $\square$

Korollar 4.6.3. *Ist X/Y eine modulare elliptische Kurve oder eine modulare K3-Fläche, so ist $\nabla'_{GM}\colon T_{Y/S} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F^d, F^{d-1}/F^d)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Proposition 4.6.2 genügt es zu zeigen, dass κ und ϱ Isomorphismen sind. Dabei ist κ nach Voraussetzung ein Isomorphismus. Da für eine elliptische Kurve bzw. für eine K3-Fläche $p_*\Omega^d_{X/Y}$ lokal trivial ist, ist die Abbildung des Cup-Produkts in (4.15) ein Isomorphismus. Ebenso folgt aus der lokalen Trivialität von $p_*\Omega^d_{X/Y}$, dass die durch (4.15) induzierte Abbildung ϱ ein Isomorphismus ist. $\square$

5 Lifts

In diesem Kapitel möchten wir die Menge der Lifts von Morphismen und von Geraden definieren, untersuchen und miteinanader vergleichen. Dies geschieht in einer sehr allgemeinen, allerdings rein algebraischen Situation. Später werden wir die Resultate in einer geometrischen Situation verwenden, indem wir unseren Parameterraum Y als das Spektrum des Ringes A annehmen, den wir hier betrachten.

Im Folgenden sei R immer ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Weiter sei $J \subseteq A$ ein Ideal mit $J^2 = 0$ und H ein projektiver A-Modul.

5.1 Lifts von Morphismen

Zunächst untersuchen wir die Menge der Lifts eines Morphismus. Gegeben sei dazu ein R-Endomorphismus $g' \colon A/J \to A/J$. Unter einem Lift von g' verstehen wir einen R-Endomorphismus $h \colon A \to A$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\ A/J \arrow[r, "g'"] & A/J. \end{tikzcd}$$

Mit $\Lambda(g')$ bezeichnen wir die Menge der Lifts von g'. In manchen Fällen ist es einfacher den R-Homomorphismus $g = g' \circ \pi$ zu betrachten. Dann verstehen wir unter einem Lift von g das gleiche wie unter einem Lift von g' und setzen:

$$\Lambda(g) := \Lambda(g') = \{h \in \mathrm{Hom}_R(A, A) \mid \pi \circ h = g' \circ \pi (= g)\}.$$

Nach Proposition 2.1.2(e) ist J auf natürliche Weise ein A/J-Modul. Folglich erhält J mittels g eine A-Modulstruktur g_*J. Insbesondere gilt:

$$h(x) \cdot j = \pi(h(x)).j = g(x).j \text{ für alle } x \in A \text{ und } h \in \Lambda(g).$$

Somit erhalten wir Gleichheit der Modulstrukturen $h_*J = g_*J$. Die Charakterisierung der Menge $\Lambda(g)$ ist nun durch das folgende Lemma gegeben:

Lemma 5.1.1. *Für jeden fest gewählten Lift $h_0 \in \Lambda(g)$ ist folgende Abbildung eine Bijektion*

$$\alpha_{h_0} \colon \mathrm{Der}_R(A, g_*J) \to \Lambda(g), \;\; D \mapsto (h_0 + D).$$

Beweis. Es ist erstens zu zeigen, dass $h_0 + D$ für einen Lift $h_0 \in \Lambda(g)$ und eine Derivation $D \in \mathrm{Der}_R(A, g_*J)$ wiederum ein Lift ist. Wegen $\pi \circ D = 0$, gilt:

$$\pi \circ (h_0 + D) = \pi \circ h_0 + \pi \circ D = g,$$

so dass in der Tat $(h_0 + D) \in \Lambda(g)$ ist.

Zweitens zeigen wir die Bijektivität, indem wir zeigen, dass die folgende Abbildung die zugehörige Umkehrabbildung ist:

$$\tilde{\alpha}_{h_0} \colon \Lambda(g) \to \mathrm{Der}_R(A, g_*J), \; h \mapsto (h - h_0).$$

Dazu sei neben h_0 auch $h \in \Lambda(g)$ ein Lift von g. Wir möchten im Folgenden zeigen, dass $(h - h_0) \in \mathrm{Der}(A, g_*J)$:

(i) Es gilt $(h - h_0)(x) \in \ker \pi = J$ für alle $x \in A$:

$$\pi((h - h_0)(x)) = \pi(h)(x) - \pi(h_0)(x) = g(x) - g(x) = 0.$$

(ii) Der R-Homomorphismus $(h - h_0)$ ist eine Derivation, wenn wir J als den Modul g_*J auffassen:

$$\begin{aligned}(h - h_0)(x \cdot y) &= h(x) \cdot h(y) - h_0(x) \cdot h_0(y) \\ &= h(x) \cdot h(y) - h(x) \cdot h_0(y) + h(x) \cdot h_0(y) - h_0(x) \cdot h_0(y) \\ &= h(x) \cdot (h(y) - h_0(y)) + (h(x) - h_0(x)) \cdot h_0(y) \\ &= g(x).(h - h_0)(y) + g(y).(h - h_0)(x).\end{aligned}$$

Folglich ist die Abbildung $\tilde{\alpha}_{h_0}$ wohldefiniert. Wegen

$$\tilde{\alpha}_{h_0}(\alpha_{h_0}(D)) = \tilde{\alpha_{h_0}}(h_0 + D) = (h_0 + D) - h_0 = D$$

$$\alpha_{h_0}(\tilde{\alpha}_{h_0}(h)) = \alpha_{h_0}(h - h_0) = h_0 + (h - h_0) = h$$

ist es die Umkehrabbildung zu α_{h_0}, so dass α_{h_0} bijektiv ist. □

In diesem Zusammenhang erläutern wir noch den folgenden Isomorphismus:

Lemma 5.1.2. *Die folgende natürliche Abbildung ist für jeden Lift $h \in \Lambda(g)$ ein von der Wahl von $h \in \Lambda(g)$ unabhängiger Isomorphismus:*

$$\begin{aligned}\gamma_1 \colon \mathrm{Der}_R(A, A) \otimes_A g_*J &\to \mathrm{Der}_R(A, g_*J), \\ D \otimes j &\mapsto (a \mapsto j \cdot h(D(a))).\end{aligned}$$

Beweis. Nach Proposition 2.1.3 und Proposition 2.2.3 sind folgende natürliche Abbildungen Isomorphismen:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Der}_R(A,A)\otimes_A g_*J & & D\otimes j \\
\Big\downarrow{\cong}\ \text{Prop. 2.2.3} & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R},A)\otimes_A g_*J & & (da\mapsto D(a))\otimes j \\
\Big\downarrow{\cong}\ \text{Prop. 2.1.3} & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R},A\otimes_A g_*J) & & (da\mapsto D(a)\otimes j) \\
\Big\downarrow{\cong} & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R},g_*J) & & (da\mapsto g(D(a)).j) \\
\Big\downarrow{\cong}\ \text{Prop. 2.2.3} & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Der}_R(A,g_*J) & & (a\mapsto g(D(a)).j).
\end{array}$$

Wegen $g(D(a)).j = h(D(a))\cdot j$ folgt die Aussage. □

Daraus lässt sich noch das folgende Korollar schließen.

Korollar 5.1.3. *Für jedes Paar $h_1, h_2 \in \Lambda(g)$ von Lifts von g existieren eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$, $D_k \in \mathrm{Der}_R(A,A)$ und $j_k \in J$ für $1 \leq k \leq m$, so dass folgendes gilt:*

$$(h_1 - h_2) = \sum_{k=1}^{m} j_k \cdot (h_2 \circ D_k).$$

Beweis. Nach dem Beweis von Lemma 5.1.1 ist $(h_1 - h_2) \in \mathrm{Der}_R(A, g_*J)$. Nach Lemma 5.1.2 gibt es daher genau ein $\sum_k^m D_k \otimes j_k \in \mathrm{Der}_R(A,A) \otimes g_*J$, so dass gilt:

$$(h_1 - h_2) = \gamma_1\left(\sum_k^m D_k \otimes j_k\right) = \sum_k^m j_k \cdot (h_2 \circ D_k).$$

□

5.2 Lifts von Geraden

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Lifts von Geraden in dem projektiven A/J-Modul H/J zu Geraden in H. Dazu geben wir zuerst die genaue Definition einer Gerade in diesem Zusammenhang.

Definition 5.2.1. *Es sei S ein kommutativer Ring und M ein projektiver S-Modul. Einen S-Untermodul $L \subseteq M$ mit* $\mathrm{rk}\, L = 1$ *nennen wir eine* Gerade (über S)*, falls er direkter Summand von M ist, das heißt es gibt einen Modul $Q_L \subseteq M$ mit $M \cong L \oplus Q_L$.*

Folgende Eigenschaft, die wir später brauchen werden, folgt aus der Definition:

Proposition 5.2.2. *Es sei $\varphi\colon S \to T$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe, M ein projektiver S-Modul und $L \subseteq M$ eine Gerade. Dann ist auch $\varphi^*L \subseteq \varphi^*M$ eine Gerade.*

Beweis. Wegen Proposition 2.1.2(d) ist mit M auch φ^*M ein projektiver Modul. Nach Definition von φ^*L gilt rk $L =$ rk $\varphi^*L = 1$. Aus der Verträglichkeit des Tensorproduktes mit direkten Summen folgt $\varphi^*M \cong \varphi^*(L \oplus Q_L) \cong \varphi^*L \oplus \varphi^*Q_L$. Daher ist $\varphi^*L \subseteq \varphi^*M$ eine Gerade. □

Da ein Modul genau dann projektiv ist, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist [Bour74, Ch. II, §2.2 Prop. 4], sind insbesondere L und $Q_L \cong M/L$ als direkte Summanden eines projektiven Moduls wieder projektiv. Nach Proposition 2.1.2(d) ist auch H/J projektiv.

Gegeben sei nun eine Gerade $K \subseteq H/J$ über A/J. Unter einem Lift von K verstehen wir eine Gerade $L \subseteq H$ über A, so dass $\pi_H(L) = K$ gilt, wobei $\pi_H : H \to H/J$ der kanonische Epimorphismus ist. Mit $\Lambda_H(K)$ bezeichnen wir die Menge der Lifts der Geraden $K \subseteq H$, das heißt:

$$\Lambda_H(K) = \{L \subseteq H \mid L \text{ Gerade}, \pi_H(L) = K\}.$$

Die Charakterisierung der Menge $\Lambda_H(K)$ beschreibt das folgende Lemma:

Lemma 5.2.3. *Zu jedem fest gewählten Lift $L_0 \in \Lambda_H(K)$ der Geraden K erhalten wir eine Bijektion:*

$$\beta_{L_0}\colon \Lambda_H(K) \to \mathrm{Hom}_{A/J}(K, H/L_0 \otimes_A J),\ L \mapsto \beta_{L_0}(L),$$

wobei $\beta_{L_0}(L)$ für jedes $L \in \Lambda_H(K)$ durch die Eigenschaft

$$(\iota_3 \circ \beta_{L_0}(L) \circ \pi_H)(s) = pr_{H/L_0}(s) \text{ für alle } s \in L$$

eindeutig bestimmt ist. Dabei ist $\iota_3\colon H/L_0 \otimes_A J \to H/L_0$ durch die Multiplikation gegeben und $pr_{H/L_0}\colon H \to H/L_0$ ist die Projektion auf den Quotienten H/L_0.

Beweis. Es sei $L_0 \in \Lambda_H(K)$ der fest gewählte und $L \in \Lambda_H(K)$ ein weiterer Lift der Geraden $K \subseteq H/J$. Da L_0 eine Gerade ist, können wir $Q_{L_0} \subseteq H$ mit $H \cong L_0 \oplus Q_{L_0}$ wählen. Aus der Verträglichkeit des Tensorprodukts mit direkten Summen folgt:

$$H \otimes_A J \cong (L_0 \otimes_A J) \oplus (Q_{L_0} \otimes_A J)$$

$$H/J \cong (L_0/J) \oplus (Q_{L_0}/J) \cong K \oplus (Q_{L_0}/J)$$

Insbesondere können wir $Q_K := \pi_H(Q_{L_0}) \subseteq H/J$ als Repräsentanten für den Quotienten $Q_K \cong (H/J)/K$ wählen, so dass $H/J \cong K \oplus Q_K$ mit $K, Q_K \subseteq H/J$ gilt.

Im Weiteren bezeichnen wir mit π_H je nach Situation einen der drei Epimorphismen $H \to H/J$, $L \to K$ oder $Q_{L_0} \to Q_K$, wobei nicht die Gefahr eines Missverständnisses besteht.

Wir erhalten das folgende kommutative, aber im Allgemeinen nicht exakte Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & L \otimes_A J \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\iota_1"'] & (L_0 \otimes_A J) \oplus (Q_{L_0} \otimes_A J) \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "\iota_2"] & Q_{L_0} \otimes_A J \arrow[d, "\iota_3"] & \\
 & L \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "\pi_H"'] & L_0 \oplus Q_{L_0} \arrow[r, "pr_{Q_{L_0}}"] \arrow[d, "\pi_H"'] & Q_{L_0} \arrow[d, "\pi_H"] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i_3"] \arrow[d] & K \oplus Q_K \arrow[r, "pr_{Q_K}"] \arrow[d] & Q_K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0, &
\end{tikzcd}
\tag{5.1}
$$

wobei $\iota_1,\ \iota_2,\ \iota_3$ die durch die Multiplikation gegebenen Einbettungen, $i_1,\ i_2,\ i_3$ die kanonischen Einbettungen und $pr_1 = pr_{Q_{L_0} \otimes_A J},\ pr_{Q_{L_0}},\ pr_{Q_K}$ die jeweiligen Projektionen sind. Die untere Zeile des Diagramms ist nach Konstruktions exakt. Da L, L_0 und Q_{L_0} projektiv sind, sind sie insbesondere flach, so dass jede Spalte des Diagramms exakt ist.

Gesucht ist nun die Abbildung $\beta_{L_0}(L)\colon K \to Q_L \otimes_A J$, die mit dem obigen Diagramm kommutiert. Da die untere Zeile exakt ist, gilt:

$$\pi_H \circ pr_{Q_{L_0}} \circ i_2 = pr_{Q_K} \circ i_3 \circ \pi_H = 0.$$

Da die rechte Spalte exakt ist, faktorisiert $pr_{Q_{L_0}} \circ i_2$ über $Q_{L_0} \otimes_A J \cong \ker(Q_{L_0} \to Q_K)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & Q_{L_0} \otimes_A J \arrow[d, "\iota_3"] \\
L \arrow[r, "i_2"'] \arrow[urr, dashed, "\exists! \tilde{f}_L"] & L_0 \oplus Q_{L_0} \arrow[r, "pr_{Q_{L_0}}"'] & Q_{L_0}.
\end{tikzcd}
$$

Weiter benötigen wir die Eigenschaft, dass $pr_1 \circ i_1 = 0$ gilt. Dazu sei $s \otimes j \in L \otimes_A J$ mit $i_2(s) = (s_1, s_2) \in L_0 \oplus Q_{L_0}$ Da L ein Lift von K ist, gilt

$$\pi_H((s_1, s_2)) = (\pi_H(s_1), \pi_H(s_2)) \in K,$$

das bedeutet $\pi_H(s_2) = 0$ und somit $s_2 = j' s_2'$ für ein $j' \in J$ und ein $s_2' \in Q_{L_0}$. Folglich gilt wegen $J^2 = 0$:

$$pr_1 \circ i_1(s \otimes j) = pr_1((s_1 \otimes j, j' s_2' \otimes j)) = j' s_2 \otimes j = s_2 \otimes j' j = 0,$$

wodurch wir $pr_1 \circ i_1 = 0$ gezeigt haben. Folglich ist auch $\tilde{f}_L \circ \iota_1 = pr_1 \circ i_1 = 0$. Wegen der Exaktheit der linken Spalte faktorisiert somit $\tilde{f}_L$ eindeutig über K:

$$\begin{tikzcd}
& & Q_{L_0} \otimes_A J \arrow[d, "\iota_3"] \\
L \arrow[r, "i_2"'] \arrow[urr, dashed, "\exists!\tilde{f}_L"] \arrow[d, "\pi_H"'] & L_0 \oplus Q_{L_0} \arrow[r, "pr_{Q_{L_0}}"'] & Q_{L_0} \\
K \arrow[uurr, dashed, "\exists! f_L"'] & & .
\end{tikzcd}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\beta_{L_0} \colon \Lambda_H(K) \to Hom_{A/J}(K, Q_{L_0} \otimes_A J),\ L \mapsto f_L$$

die geforderten Eigenschaften erfüllt:

(i) Nach Konstruktion gilt $(\iota_3 \circ f_L \circ \pi_H)(s) = pr_{Q_{L_0}} \circ i_2(s)$ für alle $s \in L$. Insbesondere folgt aus der Konstruktion, dass f_L mit dieser Eigenschaft eindeutig ist.

(ii) In der Tat ist $\beta_{L_0}(L)$ A/J-linear, denn $(pr_{Q_{L_0}} \circ i_2)$ ist A-linear, folglich ist auch $\tilde{f}_L$ A-linear, so dass nach Konstruktion f_L A/J-linear ist, wenn wir $Q_{L_0} \otimes_A J$ mit der von dem A/J-Modul J induzierten A/J-Modulstruktur versehen.

(iii) Um zu zeigen, dass β_{L_0} bijektiv ist, konstruieren wir eine Umkehrabbildung:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{L_0} \colon & \mathrm{Hom}_{A/J}(K, Q_{L_0} \otimes_A J) \to \Lambda_H(K), \\ & f \mapsto L_f := \{(s_1, s_2) \in L_0 \oplus Q_{L_0} \mid (\iota_3 \circ f \circ \pi_H)(s_1) = s_2\}. \end{aligned}$$

Da $f \in \mathrm{Hom}_{A/J}(K, Q_{L_0} \otimes_A J)$ A/J-linear ist und da $\pi_* J$ und J nach Proposition 2.1.2(e) die gleiche A-Modulstruktur besitzen, ist $(\iota_3 \circ f \circ \pi_H)$ A-linear, so dass L_f ein A-Modul ist. Weiter ist der Homomorphismus

$$L_0 \to L_f,\ s \mapsto (s, (\iota_3 \circ f \circ \pi_H)(s))$$

offensichtlich injektiv, surjektiv und A-linear, folglich ein Isomorphismus von A-Moduln, so dass L_f projektiv und vom Rang $\mathrm{rk}\ L_f = 1$ ist, da dies für L_0 gilt. Daher ist L_f eine Gerade. Da die rechte Spalte in (5.1) exakt ist, gilt $\pi_H \circ \iota_3 = 0$ und wir erhalten die Gleichung:

$$\begin{aligned} \pi_H(L_f) &= \pi_H(L_0, (\iota_3 \circ f \circ \pi_H)(L_0)) \\ &= (\pi_H(L_0), \pi_H((\iota_3 \circ f \circ \pi_H)(L_0))) = (\pi_H(L_0), 0) = K, \end{aligned}$$

so dass in der Tat L_f ein Lift der Geraden K ist ($L_f \in \Lambda_H(K)$).

Ist $L \in \Lambda_H(K)$, so gilt $(\tilde{\beta}_{L_0} \circ \beta_{L_0})(L) = L$, denn aus (i) folgt unmittelbar:

$$L_{f_L} = \{(s_1, s_2) \in L_0 \oplus Q_{L_0} \mid (\iota_3 \circ f_L \circ \pi_H)(s_1) = s_2\} = L.$$

Ist umgekehrt $f \in \mathrm{Hom}_{A/J}(K, Q_{L_0} \otimes_A J)$, so ist f_{L_f} die eindeutige Abbildung mit der Eigenschaft (i), wenn wir $L = L_f$ in (i) setzen. Nach Definition von L_f gilt aber bereits $(\iota_3 \circ f \circ \pi_H)(s_1, s_2) = s_2 = (pr_{Q_{L_0}} \circ i_2)(s_1, s_2)$ für alle $(s_1, s_2) \in L_f$, so dass f diese Eigenschaft erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit folgt $f = f_{L_f}$. Das heißt gerade $(\beta_{L_0} \circ \tilde{\beta}_{L_0})(f) = f$. Damit ist auch die Bijektivität von β_{L_0} gezeigt.

□

5.3 Zusammenhang zwischen den Lifts von Morphismen und von Geraden

In diesem letzten Abschnitt des Kapitels möchten wir eine Abbildung δ von der Menge $\Lambda(g')$ der Lifts des Homomorphismus $g'\colon A/J \to A/J$ auf die Menge der Lifts der Geraden $g'^*K \subseteq g'^*(H/J)$ für eine Gerade $K \subseteq H/J$ konstruieren und ein Kriterium für die Bijektivität von δ geben.

Nach Proposition 5.2.2 ist $g'^*K \subseteq g'^*(H/J)$ wieder eine Gerade. Allerding hängt die Definition von $\Lambda_H(K)$ in Abschnitt 5.2 von H ab, so dass sich zunächst die Frage stellt, in welchem Modul ein Lift der Geraden $g'^*K \subseteq g'^*(H/J)$ leben soll. Dafür kommt zunächst jeder A-Modul M mit $M/J \cong g'^*(H/J)$ in Frage. Dies erfüllt insbesondere h^*H für jeden Lift $h \in \Lambda(g')$, denn es gilt nach Proposition 2.1.2(a):

$$\begin{array}{ccccc} (h^*H)/J = \pi^*h^*H & \xrightarrow{\cong} & (\pi \circ h)^*H = (g' \circ \pi)^*H & \xrightarrow{\cong} & g'^*\pi^*H = g'^*(H/J) \\ s \otimes a_1 \otimes \overline{a_2} & \longmapsto & s \otimes \overline{a_1 a_2} & \longmapsto & s \otimes \overline{1} \otimes \overline{a_1 a_2} = \pi_H(s) \otimes \overline{a_1 a_2}, \end{array} \tag{5.2}$$

wobei wir kurz $\overline{a}(= \pi(a))$ für die Nebenklasse von a in A/J schreiben. Somit fassen wir nach Wahl eines $h \in \Lambda(g')$ die Menge der Lifts der Geraden $g'^*K \subseteq g'^*(H/J)$ als $\Lambda_{h^*H}(g'^*K)$ auf.

Es wäre wünschenswert, dass die Menge $\Lambda_{h^*H}(g'^*K)$ in einem gewissen Sinne unabhängig von der Wahl des Lifts $h \in \Lambda(g')$ ist. Beispielsweise werden wir zeigen, dass ein Zusammenhang auf H zu je zwei Lifts $h_1, h_2 \in \Lambda(g')$ einen ausgezeichneten Isomorphismus $\epsilon_{(h_1,h_2)}\colon h_1^*H \to h_2^*H$ induziert, so dass h^*H bis auf ausgezeichnete Isomorphie nicht von der Wahl von $h \in \Lambda(g')$ abhängt. Allerdings werden wir in unserer Anwendung im Allgemeinen keinen Zusammenhang auf H haben, jedoch einen Zusammenhang auf einem Modul M mit $H \subseteq M$, so dass wir Isomorphismen $\epsilon_{(h_1,h_2)}\colon h_1^*M \to h_2^*M$ erhalten. Unter der Voraussetzung $\epsilon_{(h_1,h_2)}(\mathscr{L}) \subseteq h_2^*H$ für einen Geradenlift $\mathscr{L} \in \Lambda_{h_1^*H}(g'^*K)$ ist dann aber $\epsilon_{(h_1,h_2)}(\mathscr{L}) \in \Lambda_{h_2^*H}(g'^*K)$ ebenso ein Geradenlift, so dass wir auch hier eine gewisse Unabhängigkeit von der Wahl des Lifts $h \in \Lambda(g')$ erhalten. Daher möchten wir im Folgenden die Isomorphismen $\epsilon_{(h_1,h_2)}$ konstruieren.

In der Notation von Abschnitt 2.2 notieren wir das folgende Lemma, welches sehr nützlich ist, um zwei Lifts zu vergleichen:

Lemma 5.3.1. *Zu jedem Paar $h_1, h_2 \in \Lambda(g)$ zweier Lifts von g existiert genau ein Homomorphismus $f_{(h_1,h_2)}\colon Z \to A$, so dass für jedes $i = 1, 2$ das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\pi"'] & A \arrow[l, "h_i"'] \arrow[r, "p_i"] \arrow[dl, "g"] & Z \arrow[ll, dashed, bend right, "\exists! f_{(h_1,h_2)}"'] \\
A/J & & .
\end{tikzcd}$$

Beweis. Damit das Diagramm für $i = 1, 2$ kommutiert, muss $f_{(h_1,h_2)}(a \otimes 1) = h_1(a)$ und $f_{(h_1,h_2)}(1 \otimes a) = h_2(a)$ gelten. Daher folgen Existenz und Eindeutigkeit von f_{h_1,h_2} aus der Gleichung:

$$f_{(h_1,h_2)}(a_1 \otimes a_2) = f_{(h_1,h_2)}(a_1 \otimes 1) \cdot f_{(h_1,h_2)}(1 \otimes a_2) = h_1(a_1) \cdot h_2(a_2).$$

□

Es sei $\Omega_{A/R}$ der in Definition 2.2.2 definierte Differentialmodul. Wir benötigen den in Definition 4.4.1 definierten Begriff eines Zusammenhangs. Da wir uns in diesem Kapitel jedoch auf die algebraische Betrachtung beschränken, nehmen wir uns die Freiheit für die folgende Definition:

Definition 5.3.2. *Unter einem* Zusammenhang auf einem A-Modul M *verstehen wir eine Abbildung $\nabla\colon M \to M \otimes_A \Omega_{A/R}$, so dass für alle $a \in A$ und $m \in M$*

$$\nabla(a \cdot m) = a \cdot \nabla(m) + m \otimes da$$

gilt, wobei $d\colon A \to \Omega_{A/R}$ die kanonische Derivation ist.

Insbesondere erhalten wir einen Zusammenhang in diesem Sinne, wenn wir einen Zusammenhang auf einer quasi-köharenten Garbe im Sinne von Definition 4.4.1 haben und dort die auf dem Modul der Schnitte über einer offenen Menge induzierte Abbildung betrachten. Ein Zusammenhang liefert die folgende für uns sehr wichtige Eigenschaft:

Proposition 5.3.3. *Ist M ein A-Modul und $\nabla\colon M \to M \otimes_A \Omega_{A/R}$ ein Zusammenhang auf M, so ist*

$$\theta\colon p_1^*M \to p_2^*M,\ (m \otimes z) \mapsto (m \otimes z + z \cdot \nabla(m))$$

ein Isomorphismus von Z-Moduln.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung θ wohldefiniert ist. Das folgt aus der Rechnung:

$$\begin{aligned}
\theta(a \cdot m \otimes z) &= z \cdot \nabla(a \cdot m) + (a \cdot m) \otimes z = z \cdot (a \cdot \nabla(m) + m \otimes da) + m \otimes p_2(a) \cdot z \\
&= z \cdot (a \cdot \nabla(m)) + m \otimes (p_1 - p_2)(a) \cdot z + m \otimes p_2(a) \cdot z \\
&= z \cdot p_1(a) \cdot \nabla(m) + m \otimes p_1(a) \cdot z = \theta(m \otimes p_1(a) \cdot z).
\end{aligned}$$

Die Rechnung zeigt insbesondere, dass die Eigenschaft eines Zusammenhangs ∇ für die Konstruktion eines solchen Isomorphismus von entscheidender Bedeutung ist. Die Z-Linearität von θ ist offensichtlich. Um die Bijektivität von θ zu zeigen, konstruieren wir analog zu θ die Abbildung:

$$\tilde{\theta}\colon p_2^*M \to p_1^*M, \ (m \otimes z) \mapsto (m \otimes z - z \cdot \nabla(m))$$

und zeigen, dass $\tilde{\theta}$ die Umkehrabbildung zu θ ist.

Dass $\tilde{\theta}$ wohldefiniert ist, zeigt man analog wie für θ. Ebenso folgt aus der Konstruktion, dass $\tilde{\theta}$ Z-linear ist. Zu einem $m \in M$ können wir $n \in \mathbb{N}$ und $m_i \in M$, $\omega_i \in \Omega_{A/R}$ für $1 \leq i \leq n$ so wählen, dass $\nabla(m) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes \omega_i$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}(\tilde{\theta} \circ \theta)(m \otimes z) = \tilde{\theta}(z \cdot \nabla(m) + m \otimes z) &= \tilde{\theta}\left(z \cdot \sum_i^n m_i \otimes \omega_i + m \otimes z\right) \\ &= z \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}(m_i \otimes \omega_i) + \tilde{\theta}(m \otimes z) \\ &= z \cdot \sum_i^n (-\omega_i \cdot \nabla(m_i) + m_i \otimes \omega_i) - z \cdot \nabla(m) + m \otimes z \\ &= z \cdot \sum_i^n m_i \otimes \omega_i - z \cdot \nabla(m) + m \otimes z = m \otimes z,\end{aligned}$$

wobei $\omega_i \cdot \nabla(m_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, da $\Omega_{A/R} \cong I/I^2$ ein Ideal in Z ist, dessen Quadrat verschwindet: $(I/I^2)^2 = 0$. Das zeigt $(\tilde{\theta} \circ \theta) = \mathrm{id}$. Mit einer sehr ähnlichen Rechnung zeigt man $(\theta \circ \tilde{\theta}) = \mathrm{id}$. $\square$

Für die folgenden Betrachtungen machen wir zunächst die folgenden Annahmen:

Annahme 5.3.4. *(1) Die Menge $\Lambda(g)$ der Lifts von g ist nicht leer. Insbesondere wählen wir fest einen Lift $h_0 \in \Lambda(g)$.*

(2) Die Menge $\Lambda_H(K)$ der Lifts der Geraden K ist nicht leer. Insbesondere wählen wir fest einen Lift $L_0 \in \Lambda_H(K)$.

(3) Es existiert ein A-Modul M, so dass $H \subseteq M$ ein Untermodul mit projektivem Quotienten M/H ist und ein Zusammenhang $\nabla\colon M \to M \otimes_A \Omega_{A/R}$ mit der Eigenschaft $\nabla(L_0) \subseteq H \otimes_A \Omega_{A/R}$ existiert.

Proposition 5.3.5. *Zu jedem Paar $h_1, h_2 \in \Lambda(g)$ zweier Lifts existiert ein Isomorphismus $\epsilon_{(h_1,h_2)}\colon h_1^*M \to h_2^*M$ von A-Moduln, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} h_1^*M \arrow[r, "\epsilon_{(h_1,h_2)}"] & h_2^*M \\ f_{(h_1,h_2)}^* p_1^*M \arrow[u, "\nu_1", "\cong"'] \arrow[r, "\theta \otimes \mathrm{id}"] & f_{(h_1,h_2)}^* p_2^*M, \arrow[u, "\cong", "\nu_2"'] \end{tikzcd}$$

wobei die Abbildungen ν_1, ν_2 die natürlichen Isomorphismen aus Proposition 2.1.2(a) sind. Mit der Notation aus Korollar 5.1.3 gilt:

$$\epsilon_{(h_1,h_2)}(s \otimes a) = s \otimes a + \sum_{k=1}^{m} \nabla(D_k)(s) \otimes j_k \cdot a, \tag{5.3}$$

für ein beliebiges $s \otimes a \in h_1^* M$. Insbesondere gilt $\epsilon_{(h_1,h_2)}(h_1^* L_0) \subseteq h_2^* H$. Weiter erfüllen die Isomorphismen die Rechenregeln $\epsilon_{(h_1,h_1)} = \mathrm{id}$ und $\epsilon_{(h_2,h_3)} \circ \epsilon_{(h_1,h_2)} = \epsilon_{(h_1,h_3)}$ für drei Lifts $h_1, h_2, h_3 \in \Lambda(g')$.

Beweis. Nach Proposition 5.3.3 ist θ ein Isomorphismus. Daher ist auch $\theta \otimes \mathrm{id}$ ein Isomorphismus, der insbesondere A-linear ist. Nun folgt sofort die Existenz eines A-linearen Isomorphismus $\epsilon_{(h_1,h_2)}$, so dass das Diagramm kommutiert.

Um die zweite Aussage zu zeigen, sei zunächst bemerkt, dass wir $\nabla(s) = \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes da_i$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und gewisse $s_i \in M$ und $a_i \in A$ schreiben können, da $\nabla(s) \in M \otimes \Omega_{A/R}$ ist und $\Omega_{A/R}$ von Elementen da, $a \in A$ erzeugt wird (siehe (2.1)). Damit gilt in $f_{(h_1,h_2)}^* p_2^* M$:

$$\begin{aligned}
\nabla(s) \otimes a &= \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes da_i \otimes a = \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes 1 \otimes f_{(h_1,h_2)}(d(a_i)) \cdot a \\
&= \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes 1 \otimes f_{(h_1,h_2)}((p_1 - p_2)(a_i)) \cdot a \\
&\overset{5.3.1}{=} \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes 1 \otimes (h_1 - h_2)(a_i) \cdot a \\
&\overset{5.1.3}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} s_i \otimes 1 \otimes j_k \cdot h_2(D_k(a_i)) \cdot a
\end{aligned}$$

Nun führen wir folgende Rechnung durch:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{(h_1,h_2)}(s \otimes a) &= (\nu_2 \circ (\theta \otimes id) \circ \nu_1^{-1})(s \otimes a) = (\nu_2 \circ (\theta \otimes \mathrm{id}))(s \otimes 1 \otimes a) \\
&= \nu_2(s \otimes 1 \otimes a + \nabla(s) \otimes a) \\
&= \nu_2(s \otimes 1 \otimes a + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} s_i \otimes 1 \otimes j_k \cdot h_2(D_k(a_i)) \cdot a) \\
&= s \otimes a + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} s_i \otimes j_k \cdot h_2(D_k(a_i)) \cdot a \\
&= s \otimes a + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} s_i \cdot D_k(a_i) \otimes j_k \cdot a \\
&= s \otimes a + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot da_i(D_k) \otimes j_k \cdot a = s \otimes a + \sum_{k=1}^{m} \nabla(D_k)(s) \otimes j_k \cdot a,
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichung sowohl $da_i \in \Omega_{A/R} \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}_R(A,A),A)$ als auch $\nabla(s) \in M \otimes \Omega_{A/R} \cong \mathrm{Hom}_A(Der_R(A,A),M)$ als Abbildungen auffassen. Aus Annahme 5.3.4 (3) folgt sofort $\epsilon_{(h_1,h_2)}(h_1^* L_0) \subseteq h_2^* H$, wobei wir $h_2^* H$ als Untermodul von $h_2^* M$ auffassen können, da M/H projektiv ist und somit die folgende Sequenz nach [Liu06, Ch. 1.2.1, Prop 2.6] exakt ist:

$$0 \to h_2^* H \to h_2^* M \to h_2^*(M/H) \to 0.$$

Die Rechenregeln $\epsilon_{(h_1,h_1)} = \mathrm{id}$ und $\epsilon_{(h_2,h_3)} \circ \epsilon_{(h_1,h_2)} = \epsilon_{(h_1,h_3)}$ für drei Lifts $h_1, h_2, h_3 \in \Lambda(g')$ lassen sich leicht mit Hilfe der Gleichung (5.3) nachrechnen. $\square$

Nun können wir die zu Beginn des Abschnittes erwähnte Abbildung δ definieren:

$$\delta_{h_0} \colon \Lambda(g) \to \Lambda_{h_0^* H}(g'^* K),\ h \mapsto \epsilon_{(h,h_0)}(h^* L_0).$$

Insbesondere hängt δ von der Wahl von ∇ und L_0 ab, was wir in der Notation allerdings vernachlässigen. Aus der Definition folgt insbesondere $\delta_{h_0}(h_0) = h_0^* L_0$.

Wenn wir den Zusammenhang ∇ auf L_0 einschränken und ihn mit der Projektion $pr_{H/L_0} \colon H \otimes_A \Omega_{A/R} \to H/L_0 \otimes_A \Omega_{A/R}$ auf den Quotienten verknüpfen, so erhalten wir eine Abbildung:

$$\overline{\nabla} \colon L_0 \to H/L_0 \otimes_A \Omega_{A/R}.$$

Nun gilt aber $\overline{\nabla}(a \cdot s) = a \cdot \overline{\nabla}(s) + (s \bmod L_0) \otimes da = a \cdot \overline{\nabla}(s)$ für alle $s \in L_0$ und $a \in A$, so dass $\overline{\nabla}$ bereits A-linear ist.

Nach 2.2.3 gilt $\Omega_{A/R} \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}_R(A,A),A)$ und nach Proposition 2.1.3 gibt es natürliche Isomorphismen, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0 \otimes_A \Omega_{A/R}) &\cong \mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0 \otimes_A \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}_R(A,A),A)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}_R(A,A),A) \\
&\cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}_R(A,A), \mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0)).
\end{aligned}$$

Mit $\nabla' \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}_R(A,A), \mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0))$ bezeichnen wir das Bild von $\overline{\nabla}$ unter diesen Isomorphismen.

Um die wichtigste Proposition dieses Abschnitts zeigen zu können, führen wir noch den folgenden natürlichen Isomorphismus ein:

Lemma 5.3.6. *Die folgende natürliche Abbildung ist ein Isomorphismen:*

$$\begin{aligned}
\gamma_2 \colon \mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0) \otimes_A g_* J &\to \mathrm{Hom}_{A/J}(g'^* K, h_0^*(H/L_0) \otimes_A J), \\
\varphi \otimes j &\mapsto (\pi_H(s) \otimes \overline{a} \mapsto \varphi(s) \otimes a \otimes j).
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Proposition 2.1.2 und Proposition 2.1.3 sind folgende natürliche Abbildungen Isomorphismen:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0) \otimes_A g_*J & & \varphi \otimes j \\
\downarrow \cong \text{ Prop. 2.1.3} & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0 \otimes_A g_*J) & & (s \mapsto \varphi(s) \otimes j) \\
\downarrow \cong \text{ Prop. 2.1.2(b)} & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_A(L_0, g_*(g^*(H/L_0) \otimes_A J)) & & (s \mapsto \varphi(s) \otimes 1 \otimes j) \\
\downarrow \cong \text{ Prop. 2.1.2(c)} & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{A/J}(g^*L_0, g^*(H/L_0) \otimes_{A/J} J) & & (s \otimes \overline{a} \mapsto \varphi(s) \otimes \overline{a} \otimes j) \\
\downarrow \cong \text{ Prop 2.1.2(a)} & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{A/J}(g'^*\pi^*L_0, \pi^*h_0^*(H/L) \otimes_{A/J} J) & & (s \otimes \overline{a_1} \otimes \overline{a_2} \mapsto \varphi(s) \otimes a_1 \otimes \overline{a_2} \otimes j) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{A/J}(g'^*K, h_0(H/L_0) \otimes_A \pi_*A/J \otimes_{A/J} J) & & (\pi_H(s) \otimes \overline{a} \mapsto \varphi(s) \otimes 1 \otimes \overline{a} \cdot j) \\
\downarrow \cong \text{ Prop 2.1.2(e)} & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{A/J}(g'^*K, h_0^*(H/L_0) \otimes_A J) & & (\pi_H(s) \otimes \overline{a} \mapsto \varphi(s) \otimes a \otimes j).
\end{array}
$$

□

Folgende Proposition ist von entscheidender Bedeutung für die Beziehung zwischen Lifts von Morphismen und Lifts von Geraden:

Proposition 5.3.7. *Das folgende Diagramm kommutiert:*

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda(g) \arrow[r, "\delta_{h_0}"] & \Lambda_{h_0^*H}(g'^*K) \arrow[d, "\beta_{\delta_{h_0}(h_0)}", "\cong"'] \\
\mathrm{Der}_R(A, g_*J) \arrow[u, "\alpha_{h_0}"', "\cong"] & \mathrm{Hom}_{A/J}(g'^*K, h_0^*(H/L_0) \otimes_A J) \\
\mathrm{Der}_R(A, A) \otimes_A g_*J \arrow[u, "\gamma_1", "\cong"'] \arrow[r, "\nabla' \otimes \mathrm{id}"] & \mathrm{Hom}_A(L_0, H/L_0) \otimes_A g_*J. \arrow[u, "\gamma_2"', "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

Beweis. Zuerst sei bemerkt, dass das Bild von $\beta_{\delta_{h_0}(h_0)}$ streng genommen nach Lemma 5.2.3 in $\mathrm{Hom}_{A/J}(g'^*K, h_0^*H/h_0^*L_0 \otimes_A J)$ liegt. Nun ist aber H/L_0 ein projektiver, insbesondere ein flacher Modul. Daher ist nach [Liu06, Ch. 1.2.1, Prop. 2.6]

$$0 \to h_0^*L_0 \to h_0^*H \to h_0^*(H/L_0) \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz, so dass $h_0^*H/h_0^*L \cong h_0^*(H/L_0)$ gilt. Folglich muss ein Homomorphismus im Bild von $\beta_{\delta_{h_0}(h_0)}$ noch um diesen Isomorphismus ergänzt werden. Das unterschlagen wir aber ohne die Gefahr von Missverständnissen in der Notation.

Es genügt, $\beta_{\delta_{h_0}(h_0)} \circ \delta_{h_0} \circ \alpha_{h_0} \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ (\nabla' \otimes \mathrm{id})$ zu zeigen. Dies zeigen wir nur für einen beliebigen elementaren Tensor $D \otimes j \in \mathrm{Der}_R(A, A) \otimes_A g_* J$, für allgemeine Tensoren verläuft die Rechnung völlig analog. Nach Lemma 5.1.2 gilt $\gamma_1(D \otimes j) = j \cdot (h_0 \circ D)$. Aus Lemma 5.1.1 erhalten wir daher:

$$h := (\alpha_{h_0} \circ \gamma_1)(D \otimes j) = h_0 + j \cdot (h_0 \circ D),$$

so dass $\delta_{h_0} \circ \alpha_{h_0} \circ \gamma_1(D \otimes j)$ die Gerade $\epsilon_{(h,h_0)}(h^* L)$ ist. Folglich genügt es die eindeutige Eigenschaft aus Lemma 5.2.3,

$$\iota_3 \circ (\gamma_2(\nabla'(D) \otimes j)) \circ \pi_{h_0^* H}|_{\epsilon_{(h,h_0)}(h^* L)} = pr|_{\epsilon_{(h,h_0)}(h^* L)}, \tag{5.4}$$

für $(\gamma_2(\nabla'(D) \otimes j)$ nachzuweisen, wobei $\iota_3 \colon h_0^*(H/L_0) \otimes_A J \to h_0^*(H/L_0)$ die durch die Multiplikation gegebene Einbettung und $pr \colon h_0^* H \to h_0^*(H/L_0)$ die Projektion auf $h_0^*(H/L_0)$ ist. Weiter ist $\pi_{h_0^* H} \colon h_0^* H \to g'^*(H/J)$ die Komposition des Isomorphismus $(h_0^* H)/J \cong g'^*(H/J)$ aus Gleichung (5.2) mit dem kanonischen Epimorphismus $h_0^* H \to (h_0^* H)/J$, das heißt:

$$\pi_{h_0^* H} \colon h_0^* H \to g'^*(H/J), \ s \otimes a \mapsto \pi_H(s) \otimes \overline{a} \tag{5.5}$$

Um 5.4 zu zeigen, wählen wir beliebig ein $(s \otimes a) \in h^* L_0$ und setzen $\psi := \gamma_2(\nabla'(D) \otimes j)$. Wir führen die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
(\iota_3 \circ \psi \circ \pi_{h_0^* H})(\epsilon_{(h,h_0)}(s \otimes a)) &\overset{5.3.5}{=} (\iota_3 \circ \psi \circ \pi_{h_0^* H})(s \otimes a + \nabla(s)(D) \otimes j \cdot a) \\
&\overset{(5.5)}{=} (\iota_3 \circ \psi)(\pi_H(s) \otimes \overline{a} + \pi_H(\nabla(D)(s)) \otimes \overline{j \cdot a}) \\
&\overset{5.3.6}{=} \iota_3(\nabla'(D)(s) \otimes a \otimes j + \nabla'(D)(\nabla(D)(s)) \otimes j \cdot a \otimes j) \\
&= \nabla'(D)(s) \otimes j \cdot a + \nabla'(D)(\nabla(D)(s)) \otimes j^2 \cdot a \\
&\overset{J^2=0}{=} \nabla'(D)(s) \otimes j \cdot a.
\end{aligned}$$

Andererseits ist $pr(s \otimes a) = 0$ wegen $s \in L_0$. Weiter gilt $pr = (pr_{H/L_0} \otimes \mathrm{id})$ und nach Definition von ∇' gilt gerade $pr_{H/L_0}(\nabla(D)(s)) = \nabla'(D)(s)$ für $s \in L_0$. Somit folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
pr(\epsilon_{(h,h_0)}(s \otimes a)) &\overset{5.3.5}{=} pr(s \otimes a + \nabla(D)(s) \otimes j \cdot a) \\
&= \nabla'(D)(s) \otimes j \cdot a = (\iota_3 \circ \psi \circ \pi_{h_0^* H})(\epsilon_{(h,h_0)}(s \otimes a)).
\end{aligned}$$

Das zeigt die Gleichung (5.4) und somit die Behauptung der Proposition. □

Insbesondere bekommen wir nun als Korollar ein Kriterium für die Bijektivität von δ_{h_0}. Das bedeutet, dass unser Problem, einen ausgezeichneten Lift zu finden, äquivalent zu dem Problem ist, eine ausgezeichnete Gerade zu finden.

Korollar 5.3.8. *Falls Abbildung ∇' ein Isomorphismus ist, so ist $\delta_{h_0}\colon \Lambda(g) \to \Lambda_{h_0^* H}(g'^* K)$ für alle Lifts $h_0 \in \Lambda(g')$ eine Bijektion. Ist weiter $(\mathscr{L}_h)_{h\in\Lambda(g)}$ eine Familie von Geradenlifts $\mathscr{L}_h \in \Lambda_{h^*H}(g'^*K)$ für jeden Lift $h \in \Lambda(g)$, wobei $\epsilon_{(h_1,h_2)}(\mathscr{L}_{h_1}) = \mathscr{L}_{h_2}$ für jedes Paar $h_1, h_2 \in \Lambda(g)$ gelten soll, so existiert genau ein Lift $\hat{h} \in \Lambda(g)$ mit $\mathscr{L}_{\hat{h}} = \hat{h}^* L_0$.*

Beweis. Ist ∇' ein Isomorphismus, so sind im Diagramm von Proposition 5.3.7 alle Abbildungen bis auf δ_{h_0} Bijektionen, so dass auch δ_{h_0} eine Bijektion sein muss. Für einen Geradenlift $\mathscr{L}_{h_0} \in \Lambda_{h_0^*H}(g'^*K)$ erhalten wir daher genau einen Lift $\hat{h}_0 \in \Lambda(g')$ mit

$$\epsilon_{(\hat{h}_0,h_0)}(\hat{h}_0^* L_0) = \delta_{h_0}(\hat{h}_0) = \mathscr{L}_{h_0}. \tag{5.6}$$

Ist $h_1 \in \Lambda(g')$ ein weiterer Lift, so erhalten wir analog einen Lift $\hat{h}_1 \in \Lambda(g')$ mit

$$\epsilon_{(\hat{h}_1,h_1)}(\hat{h}_1^* L_0) = \delta_{h_1}(\hat{h}_1) = \mathscr{L}_{h_1}. \tag{5.7}$$

Wegen $\epsilon_{(h_1,h_0)}(\mathscr{L}_{h_1}) = \mathscr{L}_{h_0}$ erhalten wir aus den Gleichungen (5.6) und (5.7):

$$\delta_{h_0}(\hat{h}_1) = \epsilon_{(\hat{h}_1,h_0)}(\hat{h}_1^* L_0) = \epsilon_{(h_1,h_0)}(\epsilon_{(\hat{h}_1,h_1)}(\hat{h}_1^* L_0)) = \epsilon_{(h_1,h_0)}(\mathscr{L}_{h_1}) = \mathscr{L}_{h_0} = \delta_{h_0}(\hat{h}_0).$$

Wegen der Bijektivität von δ_{h_0} bedeutet dies, dass $\hat{h}_0 \in \Lambda(g')$ nicht von der Wahl von $h_0 \in \Lambda(g')$ abhängt, so dass wir vereinfacht $\hat{h} = \hat{h}_0$ schreiben. Analog zu den Gleichungen (5.6) und (5.7) erhalten wir:

$$\hat{h}^* L_0 = \epsilon_{(\hat{h},\hat{h})}(\hat{h}^* L_0) = \delta_{\hat{h}}(\hat{h}) = \mathscr{L}_{\hat{h}}.$$

Wegen der Bijektivität von $\delta_{\hat{h}}$ ist $\hat{h}$ durch diese Eigenschaft insbesondere eindeutig. □

6 Frobenius-Lifts

In diesem Kapitel möchten wir endlich den Hauptsatz der Arbeit zeigen, das heißt, wir weisen die Existenz von kanonischen Lifts des Frobenius, sogenannten Deligne-Tate-Morphismen, in bestimmten Situationen nach. Zunächst erläutern wir die kristalline Kohomologie um anschließend die Operation des Frobenius auf der d-ten de-Rham-Kohomologiegruppen untersuchen zu können. Dann definieren wir für elliptische Kurven und K3-Flächen die Eigenschaft *Gewöhnlich*, um anschließend zu zeigen, dass sich für den Parameterraum einer Familie gewöhnlicher elliptischer Kurven bzw. gewöhnlicher K3-Flächen ein ausgezeichneter Frobenius-Lift finden lässt, der die Hodge-Filtrierung respektiert.

Für das gesamte Kapitel fixieren wir folgende Notation:
Es sei k ein perfekter Körper mit $\mathrm{char}\, k = p > 2$. Weiter bezeichne W den Wittring von k. Es sei Y ein glattes, noethersches Schema über W und $p\colon X \to Y$ ein glattes, noethersches, projektives Schema über Y. Wir setzen

$$S := \mathrm{Spec}\, W,\ W_n := W/p^nW,\ S_n = \mathrm{Spec}\, W_n$$

und definieren $Y_n = Y \times_S S_n$ und $X_n = X \times_Y Y_n = X \times_S S_n$ als die entsprechenden Basiswechsel. Wir schreiben $p_n\colon X_n \to Y_n$ für den Strukturmorphismus pr_{Y_n}. Wegen der Verträglichkeit von Basiswechseln gilt insbesondere

$$X_{n_1} \cong X_{n_2} \times_{Y_{n_2}} Y_{n_1},\ Y_{n_1} \cong Y_{n_2} \times_{S_{n_2}} S_{n_1}$$

für $n_1 \leq n_2$. In unserer Anwendung wird X/Y eine elliptische Kurve oder eine K3-Fläche über Y sein. Dann ist X_n/Y_n für alle $n \geq 1$ eine elliptische Kurve oder K3-Fläche. Insbesondere ist X_1/Y_1 eine Familie von elliptischen Kurven oder K3-Flächen X_y über dem Körper k.

6.1 Kristalline Kohomologie

Um die Ergebnisse des Abschnitts 5 auf den für uns interessanten Fall anzuwenden, müssen wir zunächst die Wirkung des Frobenius auf der de-Rham-Kohomologiegruppe untersuchen. Zu deren Verständnis trägt die kristalline Kohomologie wesentlich bei, die wir im Folgenden kurz erklären möchten. Kristalline Kohomologie in Charakteristik $p > 0$ wurde in [Bert74] entwickelt. Ebenso sei dem Leser das Buch [BO78] sowie die Übersichtsartikel [Illu75] und [Illu94] für Details empfohlen.

Zunächst benötigen wir die Definition dividierter Potenzen:

Definition 6.1.1. *Unter einer* Struktur dividierter Potenzen γ *auf einem Ideal* $I \subseteq R$ *für einen kommutativen Ring* R *verstehen wir eine Familie* $(\gamma_i\colon I \to R)_{i\in\mathbb{N}}$ *von Abbildungen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) Für alle $x \in I$ *gilt* $\gamma_0(x) = 1$, $\gamma_1(x) = x$ *und* $\gamma_i(x) \in I$ *für* $i \geq 1$.

(ii) Für $x, y \in I$ *und* $k \in \mathbb{N}$ *gilt* $\gamma_k(x+y) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$.

(iii) Für alle $i \in \mathbb{N}$, $r \in R$ und $x \in I$ gilt $\gamma_i(r \cdot x) = r^i \cdot \gamma_i(x)$.

(iv) Für alle $x \in I$ und $i, j \in \mathbb{N}$ gilt $\gamma_i(x) \cdot \gamma_j(x) = \binom{i+j}{i}\gamma_{i+j}(x)$.

(v) Für alle $x \in I$ und $k, l \in \mathbb{N}$ gilt $\gamma_k(\gamma_l(x)) = \frac{(kl)!}{k!(l!)^k}\gamma_{kl}(x)$.

Insbesondere erhält man die Eigenschaft $k!\gamma_k(x) = x^k$. Für den Wittring W ist auf dem Ideal pW durch die Gleichung $k!\gamma_k(x) = x^k$ bereits eine eindeutige Struktur dividierter Potenzen definiert, da $ord_p\left(\frac{p^k}{k!}\right) > 0$ für alle $k \geq 1$ gilt. Ebenso ist für die Garbe von W-Algebren $\mathcal{O}_Y$ auf der Idealgarbe $p\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{O}_Y$ durch $k!\gamma_k(s) = s^k$ für einen Schnitt $s \in p\mathcal{O}_Y(U)$ für eine offene Menge $U \subseteq Y$ eine kanonische Struktur dividierter Potenzen definiert. Dies induziert eine kanonische Sturktur dividierter Potenzen auf der Idealgarbe $p\mathcal{O}_{Y_n} \subseteq \mathcal{O}_{Y_n}$. Für Details zu dividierten Potenzen empfehlen wir das Kapitel [BO78, §3].

Als nächstes möchten wir den kristallinen Situs $(X_1/Y_n)_{crys}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ definieren. Die Objekte von $(X_1/Y_n)_{crys}$ sind Paare $(i\colon U \to T, \gamma)$, wobei $U \subset X_1$ ein offenes Unterschema, i eine abgeschlossene Einbettung von Y_n-Schemata und γ eine Struktur dividierter Potenzen auf dem zu i gehörigen Ideal ist, welche mit der kanonischen Struktur dividierter Potenzen auf dem Ideal $p\mathcal{O}_{Y_n}$ verträglich ist. Die Morphismen $Mor_{(X_1/Y_n)_{crys}}((i_1\colon U_1 \to T_1, \gamma_1), (i_2\colon U_2 \to T_2, \gamma_2))$ sind durch kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & T_1 \arrow[d] \\ U_2 \arrow[r, "i_2"] & T_2 \end{tikzcd}$$

gegeben, so dass die Strukturen dividierter Potenzen γ_1 und γ_2 miteinander verträglich sind. Überdeckungen bilden in $(X_1/Y_n)_{crys}$ Familien von Morphismen

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d] & T_\alpha \arrow[d] \\ U \arrow[r, "i"] & T, \end{tikzcd}$$

so dass die Familie $(T_\alpha \to T)_\alpha$ eine offene Überdeckung von T ist. Eine Garbe $\mathscr{F}$ auf $(X_1/Y_n)_{crys}$ lässt sich als Familie von Zarisiki-Garben $\mathscr{F}_{(U\to T)}$ auf T für jedes Objekt $(U \to T, \gamma)$ mit bestimmten Eigenschaften beschreiben, wie es in [Illu75, 1.1] erklärt wird. Insbesondere wird durch die Familie $\mathscr{F}_{(U\to T)} = \mathcal{O}_T$ eine Strukturgarbe auf $(X_1/Y_n)_{crys}$ definiert, welche wir mit $\underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}$ bezeichnen.

Aus der Definition folgt, dass die Kohomologiegruppe $H^i((X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n})$, funktoriell in X_1/Y_1 ist. Dazu sei X'/Y' ein weiteres glattes, noethersches, projektives Schema über einem glatten, noetherschen Schema Y'/W und $Y'_n = Y' \times_S S_n$ sowie $X'_n = X' \times_{Y'} Y'_n$.

Zu jedem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_1' \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\ Y_1' \arrow[r, "f"] & Y_1, \end{tikzcd}$$

erhalten wir nun einen induzierten Homomorphismus

$$H^i((X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}) \to H^i((X_1'/Y_n')_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1'/Y_n'}),$$

welcher insbesondere $\mathcal{O}_{Y_n}$-linear ist, falls $Y_1' = Y_1$ und $f = \mathrm{id}_Y$ gilt.

Eine bedeutene Eigenschaft der kristallinen Kohomologiegruppen ist ihre Isomorphie zu den de-Rham-Kohomologiegruppen:

Proposition 6.1.2. *Ist Z/Y_n ein glatter Lift von X_1 über Y_n, das heißt Z/Y_n ist ein glattes Schema mit $X_1 \cong Z \times_{Y_n} Y_1$, so existieren für alle $i \geq 0$ und $n \geq 0$ kanonische Isomorphismen:*

$$H^i((X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}) \cong \mathscr{H}^i_{dR}(Z/Y_n).$$

Beweis. Siehe [BO78, Cor 7.4]. □

Nach Konstruktion ist X_n/Y_n immer ein glatter Lift von X_1 über Y_n, so dass wir insbesondere kanonische Isomorphismen

$$H^i((X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}) \cong \mathscr{H}^i_{dR}(X_n/Y_n)$$

erhalten.

6.2 Frobenius-Operation

In diesem Abschnitt möchten wir den absoluten und den relativen Frobenius auf einem Schema über dem Körper k definieren, seine Wirkung auf der de-Rham-Kohomologiegruppe untersuchen und anschließend mittels kristalliner Kohomologie einen kanonischen Frobenius-Lift für die de-Rham-Kohomologiegruppe über W_n definieren.

Zu dem Körper k sei $F_k \colon k \to k,\ a \mapsto a^p$ die klassische Frobeniusabbildung. Diese motiviert folgende Abbildungen für beliebige Schemata über k.

Definition 6.2.1. *Zu einem beliebigen k-Schema Z definieren wir den* absoluten Frobenius F_Z *als die Identität auf dem zu Grunde liegenden topologischen Raum Z und auf der Strukturgarbe $\mathcal{O}_Z$ als die Abbildung*

$$F_Z^{\#}(U) \colon \mathcal{O}_Z(U) \to \mathcal{O}_Z(U),\ s \mapsto s^p$$

für offene Teilmengen $U \subseteq Z$.

Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, dashed, "F_{X_1/Y_1}"] \arrow[drr, bend left, "F_{X_1}"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\
& F^*_{Y_1}X_1 \arrow[r, "pr_{X_1}"'] \arrow[d, "pr_{Y_1}"] & X_1 \arrow[d, "p_1"] \\
& Y_1 \arrow[r, "F_{Y_1}"] & Y_1,
\end{tikzcd}$$

wobei wir $F^*_{Y_1}X_1$ als das Pullback definieren und $pr_{Y_1},\ pr_{X_1}$ die jeweiligen Projektionen des Pullbacks sind. Aus der Eigenschaft des Pullbacks folgt die eindeutige Existenz des Morphismus $F_{X_1/Y_1}\colon X_1 \to F^*_{Y_1}X_1$, so dass das obige Diagramm kommutiert. Diesen nennen wir den *relativen Frobenius* auf X_1/Y_1. Im Folgenden bezeichnen wir mit $F^*_{Y_1}X_1/Y_1$ immer das Schema $pr_{Y_1}\colon F^*_{Y_1}X_1 \to Y_1$, so dass F_{X_1/Y_1} ein Morphismus über Y_1 ist.

Da die d-te kristalline Kohomologiegruppe funktoriell in X_1/Y_1 ist, erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H^d((X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}) \arrow[rr, "\phi'_n"] \arrow[dr, "\gamma_n"'] & & H^d((X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}) \\
& H^d((F^*_{Y_1}X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}), \arrow[ur, "\phi_n"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

wobei ϕ'_n durch F_{X_1}, ϕ_n durch F_{X_1/Y_1} und γ_n durch pr_{X_1} induziert wird. Dabei ist ϕ_n ein $\mathcal{O}_{Y_n}$-linearer Homomorphismus, da er durch einen Morphismus über Y_1 induziert ist. Dagegen sind ϕ' und γ im Allgemeinen nicht $\mathcal{O}_{Y_n}$-linear.

Für ein beliebiges n nehmen wir F_{Y_n} als Lift der Form:

$$\begin{tikzcd}
Y_n \arrow[r, "F_{Y_n}"] & Y_n \\
Y_1 \arrow[u] \arrow[r, "F_{Y_1}"] & Y_1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

an. Die nachfolgenden Betrachtungen beruhen auf der Annahme der Existenz eines solchen Lifts. Später werden wir die Existenz eines solchen Lifts nachweisen. Wenn wir nun wiederum $F^*_{Y_n}X_n$ als das Pullback

$$\begin{tikzcd}
F^*_{Y_n}X_n \arrow[r, "pr_{X_n}"] \arrow[d, "pr_{Y_n}"'] & X_n \arrow[d, "p_1"] \\
Y_n \arrow[r, "F_{Y_n}"] & Y_n
\end{tikzcd}$$

auffassen und $F^*_{Y_n}X_n/Y_n$ für das Schema $pr_{Y_n}\colon F^*_{Y_n}X_n \to Y_n$ schreiben, so ist $F^*_{Y_n}X_n/Y_n$

ein glatter Lift von $F_{Y_1}^* X_1/Y_1$ über Y_n. Für die d-te kristalline Kohomologiegruppe gilt folglich nach Proposition 6.1.2:

$$H^d((X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}) \cong \mathscr{H}_{dR}^d(X_n/Y_n),$$

$$H^d((F_{Y_1}^* X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{F_{Y_1}^* X_1/Y_n}) \cong \mathscr{H}_{dR}^d(F_{Y_n}^* X_n/Y_n).$$

Daher können wir Diagramm (6.1) auch wie folgt notieren:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_{dR}^d(X_n/Y_n) \arrow[rr, "\phi'_n"] \arrow[dr, "\gamma_{F_{Y_n}}"'] & & \mathscr{H}_{dR}^d(X_n/Y_n) \\
& \mathscr{H}_{dR}^d(F_{Y_n}^* X_n/Y_n), \arrow[ur, "\phi_{F_{Y_n}}"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.2}$$

wobei $\phi_{F_{Y_n}}$ und $\gamma_{F_{Y_n}}$ im Gegensatz zu ϕ'_n von der Wahl des Lifts F_{Y_n} abhängen. Dabei ist $\gamma_{F_{Y_n}}$ der durch $pr_{X_n}\colon F_{Y_n}^* X_n \to X_n$ induzierte Homomorphismus, das heißt es gilt $\gamma_{F_{Y_n}}(s) = s \otimes 1$ für $s \in \mathscr{H}_{dR}^d(X_n/Y_n)(U)$, wobei $U \subseteq Y_n$ eine beliebige offene Menge ist und wir $\mathscr{H}_{dR}^d(F_{Y_n}^* X_n/Y_n)$ mittels des Isomorphismus aus Proposition 4.2.5 als $F_{Y_n}^* \mathscr{H}_{dR}^d(X_n/Y_n)$ auffassen.

Wie in (4.4) in Abschnitt 4.3 können wir den zu $\phi_{F_{Y_n}}$ dualen Homomorphismus mittels Poincaré-Dualität als einen Homomorphismus

$$\hat{\phi}_{F_{Y_n}}\colon \mathscr{H}_{dR}^d(X_n/Y_n) \to \mathscr{H}_{dR}^d(F_{Y_n}^* X_n/Y_n)$$

auffassen, der mittels des Isomorphismus aus Proposition 4.2.5 einen Homomorphismus

$$V_{F_{Y_n}}\colon \mathscr{H}_{dR}^d(X_n/Y_n) \to F_{Y_n}^* \mathscr{H}_{dR}^d(X_n/Y_n) \tag{6.3}$$

definiert. Diesen Homomorphismus werden wir im folgenden Abschnitt nutzen, um einen Geradenlift der kanonischen Gerade $F_{Y_1}^* F^d \mathscr{H}_{dR}^d(X_1/Y_1)$ nach $F_{Y_n}^* \mathscr{H}_{dR}^d(X_n/Y_n)$ zu konstruieren, so dass sich die Ergebnisse aus Kapitel 5 anwenden lassen.

6.3 Deligne-Tate-Morphismen

In diesem Abschnitt möchten wir nun die Existenz von Deligne-Tate-Morphismen auf Y, das heißt von kanonischen Lifts des absoluten Frobenius F_{Y_1} nach Charakteristik Null, für gewöhnliche modulare Familien von elliptischen Kurven und K3-Flächen X/Y nachweisen. Dazu geben wir zunächst eine für unsere Zwecke günstige Definition von gewöhnlich.

Definition 6.3.1. *Wir nennen eine elliptische Kurve bzw. eine K3-Fläche X_1/Y_1 für ein Schema Y_1 über einem perfekten Körper k der Charakteristik* $\operatorname{char} k = p > 2$ *gewöhnlich, falls die durch den absoluten Frobenius induzierte Abbildung $R^d p_{1*}\mathcal{O}_{X_1} \to R^d p_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$ bijektiv ist. Wir nennen eine elliptische Kurve bzw. eine K3-Fläche X/Y für ein Schema Y über dem Wittring W gewöhnlich, wenn die Reduktion modulo p gewöhnlich ist.*

Beispiel 6.3.2. *(a) Eine elliptische Kurve ist genau dann gewöhnlich, wenn sie nicht supersingulär ist. Für die Definition von gewöhnlich siehe daher auch [Hart77, Ch. IV.4, p. 332] und [Silv09, V.3]. Insbesondere ist eine elliptische Kurve über k mit Charakteristik* $\operatorname{char} k = p > 2$ *in der Legendre-Form $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, genau dann gewöhnlich, wenn*

$$h_p(\lambda) = \sum_{i=0}^{(p-1)/2} \binom{\frac{p-1}{2}}{i}^2 \lambda^i \neq 0$$

gilt (siehe [Hart77, Ch. IV, Cor. 4.22]).

(b) Es sei nun X_1/Y_1 die Legendre-Familie aus Beispiel 3.1.2(b). Die Lösungsmenge von $h_p(\lambda) = 0$ ist die Menge der supersingulären Punkte von X_1/Y_1. Wenn wir

$$Y_1' = Y_1 \setminus \{h_p(t) = 0\}$$

setzen und X_1' als das Pullback $X_1' = X_1 \times_{Y_1} Y_1'$ definieren, so ist X_1'/Y_1' eine gewöhnliche elliptische Kurve über Y_1', die nach Beispiel 4.5.3(a) auch modular ist.

(c) Ist in (b) die Charakteristik insbesondere $p = 3$, so erhalten wir $\{t = -1\}$ als Menge der supersingulären Punkte, so dass $Y_1' = \operatorname{Spec} \overline{k}\left[t, \frac{1}{t(t-1)(t+1)}\right]$ gilt. Wir können durch $Y' = \operatorname{Spec} W(\overline{k})\left[t, \frac{1}{t(t-1)(t+1)}\right]$ einen glatten Lift von Y_1' über dem Wittring $W(\overline{k})$ von $\overline{k}$ definieren. Wenn wir X' wiederum durch die Gleichung

$$y^2 = x(x-1)(x-t)$$

projektiv über Y' definieren, so erhalten wir ebenso einen glatten Lift von X_1' über Y'. Somit ist X'/Y' eine gewöhnliche, modulare Familie elliptischer Kurven über dem Wittring $W(\overline{k})$.

(d) Der Begriff Gewöhnlich lässt sich in einer viel allgemeineren Situation als das Übereinstimmen des Hodge-Polygon mit dem Newton-Polygon definieren. Unsere Definition für K3-Flächen stimmt mit dieser Definition überein. Siehe dazu auch [Szym11, 1.2]. Für K3-Flächen ist es schwieriger gewöhnliche Beispiele zu konstruieren als für elliptische Kurven. Zum Einen ist eine K3-Fläche, die nicht supersingulär ist, nicht notwendiger Weise gewöhnlich. Zum Anderen ist beispielsweise die Fermat-Quartik aus Beispiel 3.2.2 für $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ immer supersingulär und somit insbesondere nicht gewöhnlich (siehe [Tate65]).

Wir möchten nun den zentralen Satz dieser Arbeit formulieren. Dabei handelt es sich für elliptische Kurven um eine Variante von [Ogus01, 2.10], wobei wir in unserer Formulierung auf die Verwendung von Kristallen verzichten. Der Satz lässt sich für den Fall von K3-Flächen erweitern, allerdings benötigen wir folgende zusätzliche Annahme:

Annahme 6.3.3. *Das Schema X/Y erfülle die folgende Eigenschaft: Für alle $n \geq 1$ existiert ein Lift $\hat{F}_{Y_n}$ des absoluten Frobenius*

$$\begin{tikzcd} Y_n \arrow[r, "\hat{F}_{Y_n}"] & Y_n \\ Y_1 \arrow[u] \arrow[r, "F_{Y_1}"] & Y_1, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

so dass $V_{\hat{F}_{Y_n}}(F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)) \subseteq F^*_{Y_n} F^{d-1} \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$ gilt.

Für elliptische Kurven ist die Annahme wegen $d - 1 = 0$ trivialerweise erfüllt. Für K3-Flächen ist dem Autor nicht bekannt, in welchen Fällen die Annahme erfüllt oder nicht erfüllt wird oder ob sie sogar nie oder immer erfüllt wird.

Satz 6.3.4. *Es sei X/Y eine gewöhnliche, modulare elliptische Kurve oder eine gewöhnliche, modulare K3-Fläche, so dass Annahme 6.3.3 erfüllt ist. Dann existiert für jedes $n \geq 1$ genau ein Lift $F_n \colon Y_n \to Y_n$ des absoluten Frobenius $F_{Y_1} \colon Y_1 \to Y_1$, so dass zum Einen*

$$V_{F_n}(F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)) = F^*_n F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$$

gilt und zum Anderen die Lifts in dem Sinne miteinander verträglich sind, dass für zwei Zahlen $n_1 \leq n_2$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Y_{n_2} \arrow[r, "F_{n_2}"] & Y_{n_2} \\ Y_{n_1} \arrow[u] \arrow[r, "F_{n_1}"] & Y_{n_1}. \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{6.4}$$

Beweis. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über n. Für $n = 1$ ist trivialerweise $F_1 = F_{Y_1}$ bereits ein eindeutiger Lift. Daher folgt der Fall $n = 1$ aus dem folgenden Lemma:

Lemma 6.3.5. *Es gilt $V_{F_{Y_1}}(F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_1/Y_1)) = F^*_{Y_1} F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_1/Y_1)$.*

Beweis. Der relative Frobenius $F_{X_1/Y_1} \colon X_1 \to F^*_{Y_1} X_1$ induziert wie in Abschnitt 4.3 ein Diagramm ähnlich zu (4.6):

$$\begin{tikzcd} F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_1/Y_1) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\hat{\psi}"] \arrow[dd, bend right=60, "V_{F_{Y_1}}"'] & \mathscr{H}^d_{dR}(X_1/Y_1) \arrow[d, "\hat{\phi}"] \arrow[dd, bend left=60, "V_{F_{Y_1}}"] \\ F^d \mathscr{H}^d_{dR}(F^*_{Y_1} X_1/Y_1) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\cong"] & \mathscr{H}^d_{dR}(F^*_{Y_1} X_1/Y_1) \arrow[d, "\cong"] \\ F^*_{Y_1} F^d \mathscr{H}^d_{dR}(X_1/Y_1) \arrow[r, "\subseteq"] & F^*_{Y_1} \mathscr{H}^d_{dR}(X_1/Y_1) \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\hat{\psi}\colon F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_1/Y_1) \to F^d\mathscr{H}^d_{dR}(F^*_{Y_1}X_1/Y_1)$ bis auf Isomorphie die zu dem vom relativen Frobenius induzierten Homomorphismus $\psi\colon R^dp_*\mathcal{O}_{F^*_{Y_1}X_1} \to R^dp_*\mathcal{O}_{X_1}$ duale Abbildung. Da X/Y gewöhnlich ist, ist ψ ein Isomorphismus, so dass auch $\hat{\psi}$ ein Isomorphismus ist. Daher gilt $V(F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_1/Y_1)) = F^*_{Y_1}F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_1/Y_1)$.

□

Nun möchten wir die Aussage für $n > 1$ zeigen, unter der Annahme, dass sie für $n-1$ bereits stimmt. Dazu möchten wir die Ergebnisse aus Kapitel 5 auf unseren speziellen Fall anwenden. Zunächst sei bemerkt, dass es genügt, den Fall eines affinen Schemas $Y_n = \operatorname{Spec} A$ zu betrachten. Denn für ein allgemeines Schema Y_n lässt sich der gesuchte Lift F_n durch Verklebung der entsprechenden Lifts $F_{n,i}$ auf den affinen Mengen U_i einer affinen Überdeckung $Y_n = \bigcup_i U^i_n$ konstruieren, da für $i \neq j$ die Einschränkungen der Lifts $F_{n,i}$, $F_{n,j}$ auf eine affine Menge V_l einer affinen Überdeckung des Durchschnitts $U^i_n \cap U^j_n = \bigcup_l V_l$ ebenso die eindeutige Eigenschaft des Satzes erfüllen, so dass $F_{n,i}$ und $F_{n,j}$ auf dem Durchschnitt $U^i_n \cap U^j_n$ übereinstimmen müssen.

Wir möchten unseren speziellen Fall in die Notation von Kapitel 5 einsetzen:

(a) Es sei $R = W_n$.

(b) Die globalen Schnitte der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{Y_n}$ seien $A = \mathcal{O}_{Y_n}(Y_n)$.

(c) Die globalen Schnitte der Idealgarbe zu $Y_{n-1} \to Y_n$ seien $J \subseteq A$. Insbesondere gilt $J = p^{n-1}A$ und $\mathcal{O}_{Y_{n-1}}(Y_{n-1}) \cong A/J$, folglich auch $J^2 = 0$.

(d) Der Homomorphismus $g' = F^{\#}_{n-1}$ sei der zu dem eindeutigen Lift F_{n-1} aus dem Satz für $n-1$ korrespondierende Homomorphismus $g'\colon A/J \to A/J$.

(e) Es seien $H = (F^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n))(Y_n)$ die globalen Schnitte der lokal freien Garbe $F^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$. Insbesondere gilt $H/J \cong (F^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1}))(Y_{n-1})$.

(f) Es seien $M = \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)(Y_n)$ die globalen Schnitte der lokal freien de-Rham-Kohomologiegruppe $\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$.

(g) Wir wählen $\nabla = \nabla_{GM}(Y_n)$ als die vom Gauß-Manin Zusammenhang auf den globalen Schnitten induzierte Abbildung $\nabla\colon M \to M \otimes_A \Omega_{A/R}$.

(h) Die Gerade $K \subseteq H/J$ sei das Bild von $(F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1}))(Y_{n-1})$ unter dem Isomorphismus $(F^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1}))(Y_{n-1}) \cong H/J$.

(i) Der Geradenlift $L_0 = (F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n))(Y_n) \subseteq H$ sei die globalen Schnitte der lokal freien Garbe $F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$ und damit ein Lift der Geraden K.

(j) Es sei $h_0 \in \Lambda(g')$ ein beliebig gewählter Lift von g'. Zu dem bezeichnen wir mit F_{Y_n} den zu h_0 korrespondierenden geometrischen Morphismus und schreiben entsprechend $V_{h_0}\colon M \to h_0^*M$ für die von der Abbildung $V_{F_{Y_n}}$ aus (6.3) induzierte Abbildung auf den globalen Schnitten.

Dabei erhalten wir den Isomorphismus aus (e), da $X_{n-1} = X_n \times_{Y_n} Y_{n-1}$ als Basiswechsel definiert ist und die Hodge-Filtrierung nach Beispiel 4.2.6 mit Basiswechseln verträglich ist. Weiter erfüllen K und L_0 die Eigenschaften einer Gerade, da sie lokal frei vom Rang 1 und der Quotient $\mathrm{gr}^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1})$ bzw. $\mathrm{gr}^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$ lokal frei ist, so dass die kurze exakte Sequenz

$$0 \to F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_i/Y_i) \to F^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_i/Y_i) \to \mathrm{gr}^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_i/Y_i) \to 0$$

für $i \in \{n-1, n\}$ spaltet. Folglich ist K bzw. L_0 ein direkter Summand in H/J bzw. H. Dass L_0 ein Geradenlift von K ist, folgt wiederum aus der Verträglichkeit der Hodge-Filtrierung mit Basiswechsel (siehe Beispiel 4.2.6).

Weiter ist die Annahme 5.3.4 erfüllt, denn:

(1) Die Existenz eine Lifts $h_0 \in \Lambda(g')$ folgt in diesem Fall aus dem infinitesimalen Lifting-Kriterium Proposition 2.3.6, da Y_n affin und glatt ist.

(2) Die Existenz eines Geradenlifts $L_0 \in \Lambda_H(K)$ ist durch die Wahl von L_0 in (i) gesichert.

(3) Da $\mathrm{gr}^0\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n) \cong R^d p_* \mathcal{O}_{X_n}$ lokal frei ist, ist der Quotient M/H projektiv. Aus Griffiths Transveralität (siehe Proposition 4.4.5) folgt, dass der in (g) gewählte Zusammenhang auf M die Eigenschaft $\nabla(L_0) \subseteq H \otimes_A \Omega_{A/R}$ erfüllt.

Da X/Y nach Voraussetzung modular ist, ist auch X_n/Y_n modular, so dass ∇' nach Korollar 4.6.3 ein Isomorphismus ist. Daher können wir Korollar 5.3.8 anwenden, so dass es äquivalent ist, einen ausgezeichneten Lift von g' oder eine ausgezeichnete Familie von Lifts $\mathscr{L}_{h_0} \subseteq h_0^* H$ für alle $h_0 \in \Lambda(g')$ mit $\epsilon_{(h_1,h_2)}(\mathscr{L}_{h_1}) = \mathscr{L}_{h_2}$ zu finden.

Zur Konstruktion einer solchen Familie von Geradenlifts nutzen wir die kanonische Gerade L_0 und den Morphismus $V_{h_0}\colon M \to h_0^* M$ aus (j). Zunächst zeigen wir die Unabhängigkeit von V_{h_0} von der Wahl des Lifts $h_0 \in \Lambda(g')$ mittels der Isomorphismen $\epsilon_{(h_1,h_2)}$.

Lemma 6.3.6. *Es seien $h_1, h_2 \in \Lambda(g')$ zwei Lifts von g'. Dann gilt $V_{h_2} = \epsilon_{(h_1,h_2)} \circ V_{h_1}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst eine analoge Aussage für den Homomorphismus $\phi_{F_{Y_n}}$ aus Diagramm (6.2) und zeigen anschließend, dass die Isomorphismen $\epsilon_{(h_1,h_2)}$ in einem gewissen Sinne mit der Poincaré-Dualität verträglich sind. Wir schreiben dabei $\phi_h = \phi_{h^\#}$, wobei $h \in \Lambda(g')$, $h^\#$ der zu h assoziierte geometrische Morphismus und $\phi_{h^\#}$ der Homomorphismus aus Diagramm (6.2) ist. Analog schreiben wir $\gamma_h = \gamma_{h^\#}$.

Für $h \in \Lambda(g')$ erhalten wir wegen der Gleichungen $\phi'_n = \phi_h \circ \gamma_h$ und $\gamma_h(s) = s \otimes 1$ sowie der A-Linearität von ϕ_h die Gleichungen

$$\phi_h(s \otimes a) = a \cdot \phi_h(s \otimes 1) = a \cdot \phi_h(\gamma_h(s)) = a \cdot \phi'_n(s), \tag{6.5}$$

$$\phi'_n(as) = \phi_h(\gamma_h(as)) = \phi_h(as \otimes 1) = \phi_h(s \otimes h(a)) = h(a) \cdot \phi'_n(s), \tag{6.6}$$

wobei $s \in M$ und $a \in A$ gilt. Wir möchten nun zeigen, dass $\phi_{h_1} = \phi_{h_2} \circ \epsilon_{(h_1,h_2)}$ gilt. Setzen wir die Definition von $\epsilon_{(h_1,h_2)}$ aus Proposition 5.3.5 ein, so ist diese Gleichung äquivalent zu:

$$\phi_{h_1}(s \otimes a) = \phi_{h_2}(s \otimes a) + \phi_{h_2}(\sum_{k=1}^{m} \nabla(D_k)(s) \otimes j_k \cdot a).$$

Unter Verwendung von Gleichung (6.5) lässt sich diese Gleichung umformen zu:

$$a \cdot \phi'_n(s) = a \cdot \phi'_n(s) + \sum_{k=1}^{m} j_k \cdot a \cdot \phi'_n(\nabla(D_k(s)).$$

Daher genügt es, $\sum_{k=1}^{m} j_k \cdot \phi'(\nabla(D_k(s)) = 0$ zu zeigen. Wie in dem Beweis zur Proposition 5.3.5 schreiben wir $\nabla(s) = \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes da_i$. Dann gilt $\nabla(D_k)(s) = \sum_{i=1}^{n} D_k(a_i) \cdot s_i$. Unter der Verwendung von Gleichung (6.6) und Korollar 5.1.3 rechnen wir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} j_k \cdot \phi'(\nabla(D_k(s)) = \sum_{k=1}^{m} j_k \cdot \phi'(\sum_{i=1}^{n} D_k(a_i) \cdot s_i) &\overset{(6.6)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} j_k \cdot h_2(D_k(a_i)) \cdot \phi'(s_i) \\ \overset{5.1.3}{=} \sum_{i=1}^{n} (h_1 - h_2)(a_i) \cdot \phi'(s_i) &\overset{(6.6)}{=} \sum_{i=1}^{n} (\phi'(a_i s_i) - \phi'(a_i s_i)) = 0. \end{aligned}$$

Wir haben somit gezeigt, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} h_1^*M \arrow[rr, "\epsilon_{(h_1,h_2)}"] \arrow[dr, "\phi_{h_1}"'] & & h_2^*M \arrow[dl, "\phi_{h_2}"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Somit kommutiert auch das dazu duale Diagramm, das wir mittels Poincaré-Dualität wie folgt auffassen:

$$\begin{tikzcd} h_1^*M & & h_2^*M \arrow[ll, "\hat{\epsilon}_{(h_1,h_2)}"'] \\ & M. \arrow[ul, "V_{h_1}"] \arrow[ur, "V_{h_2}"'] & \end{tikzcd}$$

Für den Beweis des Lemmas genügt es daher $\hat{\epsilon}_{(h_1,h_2)} = \epsilon_{(h_2,h_1)}$ zu zeigen. Dazu sei zunächst bemerkt, dass die perfekte Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ aus (4.3) eine perfekte Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon M \otimes_A M \to A$$

induziert. Für einen Lift $h \in \Lambda(g')$ induziert dies wiederum eine perfekte Paarung

$$h^*\langle \cdot, \cdot \rangle \colon h^*M \otimes_A h^*M \to A,\ (s_1 \otimes a_1) \otimes (s_2 \otimes a_2) \mapsto a_1 a_2 \cdot h(\langle s_1, s_2 \rangle),$$

so dass der induzierte Homomorphismus

$$\varphi_h \colon h^*M \to \mathrm{Hom}_A(h^*M, A),\ \ s_1 \otimes a_1 \mapsto (s_2 \otimes a_2 \mapsto a_1a_2 \cdot h(\langle s_1, s_2\rangle))$$

den bereits verwendeten Isomorphismus $h^*M \cong (h^*M)^\vee (:= \mathrm{Hom}_A(h^*M, A))$ der Poincaré-Dualität beschreibt. Wir möchten nun die Wirkung des zu $\epsilon_{(h_1,h_2)}$ dualen Homomorphismus $\epsilon^\vee_{(h_1,h_2)} \colon (h_2^*M)^\vee \to (h_1^*M)^\vee$ auf ein Element der Gestalt

$$f := \varphi_{h_2}(s_1 \otimes a_1) = (s_2 \otimes a_2 \mapsto a_1a_2 \cdot h_2(\langle s_1, s_2\rangle)) \in (h_2^*M)^\vee$$

für $(s_1 \otimes a_1) \in h_2^*M$ untersuchen. Unter der Verwendung der Definition von $\epsilon_{(h_1,h_2)}$ aus Proposition 5.3.5, der Gleichung für $(h_1 - h_2)$ aus Korollar 5.1.3 und der Eigenschaft, dass $j \cdot h_1 = j \cdot h_2$ für jedes $j \in J$ gilt, rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\epsilon^\vee_{(h_1,h_2)}(f)(s_2 \otimes a_2) =& (f \circ \epsilon_{(h_1,h_2)})(s_2 \otimes a_2) = f(s_2 \otimes a_2 + \sum_{k=1}^m \nabla(D_k)(s_2) \otimes j_k \cdot a_2) \\
=& a_1a_2 \cdot h_2(\langle s_1, s_2\rangle) + \sum_{k=1}^m a_1 \cdot j_k \cdot a_2 \cdot h_2(\langle s_1, \nabla(D_k(s_2)\rangle) \\
=& a_1a_2 \cdot h_1(\langle s_1, s_2\rangle) - a_1a_2 \cdot (h_1 - h_2)(\langle s_1, s_2\rangle) \\
&+ \sum_{k=1}^m a_1 \cdot j_k \cdot a_2 \cdot h_1(\langle s_1, \nabla(D_k(s_2)\rangle) \\
\overset{5.1.3}{=}& a_1a_2 \cdot h_1(\langle s_1, s_2\rangle) - a_1a_2 \cdot \sum_{k=1}^m j_k \cdot h_1(D_k(\langle s_1, s_2\rangle)) \\
&+ \sum_{k=1}^m a_1 \cdot j_k \cdot a_2 \cdot h_1(\langle s_1, \nabla(D_k(s_2)\rangle)
\end{aligned}$$

Nun gilt aber $D_k(\langle s_1, s_2\rangle) = \langle \nabla(D_k)(s_1), s_2\rangle + \langle s_1, \nabla(D_k)(s_2)\rangle$ nach Gleichung (4.10). Daher folgt

$$\epsilon^\vee_{(h_1,h_2)}(f)(s_2 \otimes a_2) = a_1a_2 \cdot h_1(\langle s_1, s_2\rangle) - \sum_{k=1}^m a_1 \cdot j_k \cdot a_2 \cdot h_1(\langle \nabla(D_k)(s_1), s_2\rangle).$$

Für den mittels Poincaré-Dualität korrespondierenden Homomorphismus $\hat{\epsilon}_{(h_1,h_2)}$ folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon}_{(h_1,h_2)}(s_1 \otimes a_1) &= (\varphi_{h_1}^{-1} \circ \epsilon^\vee_{(h_1,h_2)} \circ \varphi_{h_2})(s_1 \otimes a_1) = \varphi_{h_1}^{-1}(\epsilon^\vee_{(h_1,h_2)}(f)) \\
&= s_1 \otimes a_1 - \sum_{k=1}^m \nabla(D_k)(s_1) \otimes j_k \cdot a_1 = \epsilon_{(h_2,h_1)}(s_1 \otimes a_1).
\end{aligned}$$

□

Zunächst können wir $V_{h_0}(L_0)$ nur als Untermodul von h_0^*M auffassen. Um die Ergebnisse aus Kapitel 5 anwenden zu können benötigen wir allerdings eine Gerade in h_0^*H. Für elliptische Kurven ist dies wegen $H = M$ kein Umstand, für K3-Flächen ist dies der Grund für unsere Annahme 6.3.3.

Lemma 6.3.7. *Es gilt* $V_{h_0}(L_0) \subseteq h_0^*H$.

Beweis. Für elliptische Kurven ist die Aussage wegen $H = M$ trivial. Für K3-Flächen ist nach Annahme 6.3.3 zunächst klar, dass ein Lift $\hat{F}_{Y_n}$ existiert, so dass der zu $\hat{F}_{Y_n}$ korrespondierenden Homomorphismus $\hat{h}_0$ die Aussage des Lemmas erfüllt. Daher lässt sich bereits Lemma 6.3.9 anwenden, welches besagt, dass $V_{\hat{h}_0}(L_0) \in \Lambda_{\hat{h}_0^*H}(g'^*K)$ gilt. Wegen der Bijektivität von $\delta_{\hat{h}_0}$ liefert uns dies nach Proposition 5.3.7 einen Lift $h \in \Lambda(g')$ mit der Eigenschaft

$$\epsilon_{(h,\hat{h}_0)}(h^*L_0) = \delta_{\hat{h}_0}(h) = V_{\hat{h}_0}(L_0).$$

Nach Lemma 6.3.6 lässt sich dies durch die Anwendung von $\epsilon_{(\hat{h}_0,h)}$ zu $h^*L_0 = V_h(L_0)$ umformen. Für den beliebig gewählten Lift $h_0 \in \Lambda(g')$ aus (j) gilt nun ebenso nach Lemma 6.3.6:

$$V_{h_0}(L_0) = \epsilon_{(h,h_0)}(V_h(L_0)) = \epsilon_{(h,h_0)}(h^*L_0).$$

Nach Proposition 5.3.5 folgt somit $V_{h_0}(L_0) = \epsilon_{(h,h_0)}(h^*L_0) \subseteq h_0^*H$. □

Im Folgenden möchten wir nun zeigen, dass $V_{h_0}(L_0) \subseteq h_0^*H$ eine Gerade ist, die g'^*K liftet. Dazu benötigen wir vorerst das folgende Lemma:

Lemma 6.3.8. *Das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n) \arrow[r, "V_{F_{Y_n}}"] \arrow[d] & F^*_{Y_n}F^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n) \arrow[d] \\ F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1}) \arrow[r, "V_{F_{n-1}}"] & F^*_{n-1}F^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1}). \end{tikzcd} \tag{6.7}$$

Beweis. Da die Homomorphismen in den kristallinen Kohomologiegruppen

$$H^d((F^*_{Y_1}X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}) \xrightarrow{\phi_n} H^d((X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}),$$

$$H^d((F^*_{Y_1}X_1/Y_{n-1})_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_{n-1}}) \xrightarrow{\phi_{n-1}} H^d((X_1/Y_{n-1})_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_{n-1}}),$$

durch den gleichen Morphismus über Y_1 induziert sind erhalten wir nach Definition der kristallinen Kohomologie das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} H^d((F^*_{Y_1}X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}) \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d] & H^d((X_1/Y_n)_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_n}) \arrow[d] \\ H^d((F^*_{Y_1}X_1/Y_{n-1})_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_{n-1}}) \arrow[r, "\phi_{n-1}"] & H^d((X_1/Y_{n-1})_{crys}, \underline{\mathcal{O}}_{X_1/Y_{n-1}}). \end{tikzcd}$$

Durch die natürlichen Isomorphismen aus Proposition 6.1.2 können wir dieses Diagramm in das folgende Diagramm übersetzen:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^d_{dR}(F^*_{Y_n}X_n/Y_n) \arrow[r, "\phi_{F_{Y_n}}"] \arrow[d] & \mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n) \arrow[d] \\
\mathscr{H}^d_{dR}(F^*_{n-1}X_{n-1}/Y_{n-1}) \arrow[r, "\phi_{F_{n-1}}"] & \mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1}),
\end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Homomorphismen die Reduktionen modulo p^{n-1} sind. Dualisieren der horizontalen Homomorphismen und Komposition mit den Isomorphismen aus Proposition 4.2.5 liefert das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n) \arrow[r, "\phi_{F_{Y_n}}"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "V_{F_{Y_n}}"] & \mathscr{H}^d_{dR}(F^*_{Y_n}X_n/Y_n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & F^*_{Y_n}\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n) \arrow[d] \\
\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1}) \arrow[r, "\phi_{F_{n-1}}"] \arrow[rr, bend right, "V_{F_{n-1}}"'] & \mathscr{H}^d_{dR}(F^*_{n-1}X_{n-1}/Y_{n-1}) \arrow[r, "\cong"] & F^*_{n-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1}).
\end{tikzcd} \tag{6.8}$$

Dabei folgt die Kommutativität der rechten Hälfte des Diagramms aus der Kommutativität der Pullbacks

$$F^*_{n-1}X_{n-1} = F^*_{n-1}(X_n \times_{Y_n} Y_{n-1}) = (F^*_{Y_n}X_n) \times_{Y_n} Y_{n-1}.$$

Wegen Lemma 6.3.7 und der Vertäglichkeit der Hodge-Filtrierung mit dem Basiswechsel $X_{n-1} = X_n \times_{Y_n} Y_{n-1}$ nach Beispiel 4.2.6 können wir das Dagramm (6.8) zu dem Diagramm (6.7) einschränken, so dass Diagramm (6.7) insbesondere kommutiert. $\square$

Lemma 6.3.9. *Der Untermodul $V_{h_0}(L_0) \subseteq h_0^*H$ ist ein Geradenlift von g'^*K, das heißt $V_{h_0}(L_0) \in \Lambda_{h_0^*H}(g'^*K)$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $V_{h_0}(L_0)$ eine Gerade ist. Da das Ideal zu $Y_{n-1} \to Y_n$ nilpotent ist, liegt Y_{n-1} und Y_n der gleiche topologische Raum zu Grunde. Daher können wir das Diagramm (6.7) lokal als Diagramm freier Moduln betrachten. Das Bild von $F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$ in $F^*_{n-1}F^{d-1}\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1})$ ist wegen der ausgezeichneten Eigenschaft von F_{n-1} lokal nicht Null. Folglich ist auch $V_{F_{Y_n}}(F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n))$ lokal ungleich Null. Da das Bild eines freien Moduls in einem freien Modul wiederum frei ist und $F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$ lokal frei vom Rang 1 ist, ist auch $V_{F_{Y_n}}(F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n))$ lokal frei vom Rang 1. Somit ist $V_{h_0}(L_0) \subseteq h_0^*H$ eine Gerade.

Zu dem Diagramm (6.7) korrespondiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} L_0 \arrow[r, "V_{h_0}"] \arrow[d, "\pi_H"'] & h_0^*H \arrow[d, "\pi_{h_0^*H}"] \\ K \arrow[r, "V_{g'}"] & g'^*(H/J). \end{tikzcd}$$

Da F_{n-1} die ausgezeichnete Eigenschaft

$$V_{F_{n-1}}(F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1})) = F^*_{n-1}F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_{n-1}/Y_{n-1})$$

erfüllt gilt $V_{g'}(K) = g'^*K$, so dass wegen $\pi_{h_0^*H}(V_{h_0}(L_0)) = V_{g'}(K) = g'^*K$ die Gerade $V_{h_0}(L_0) \subseteq h_0^*H$ ein Lift von g'^*K ist. $\square$

Wir haben gezeigt, dass die Familie von Geradenlifts $(\mathscr{L}_h)_{h\in\Lambda(g')} = (V_h(L_0))_{h\in\Lambda(g')}$ die Bedingungen aus Korollar 5.3.8 erfüllt, so dass sich das Korollar anwenden lässt. Dieses besagt gerade, dass ein eindeutiger Lift $\hat{h} \in \Lambda(g)$ mit der Eigenschaft $V_{\hat{h}}(L_0) = \hat{h}^*L_0$ existiert. Da wir Y_n als affin angenommen haben, induziert $\hat{h}$ einen Lift $F_n\colon Y_n \to Y_n$ von F_{n-1} und somit insbesondere von $F_1 = F_{Y_1}$, der durch die Eignschaft

$$V_{F_n}(F^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)) = F^*_nF^d\mathscr{H}^d_{dR}(X_n/Y_n)$$

eindeutig ist. Die Verträglichkeit der Lifts F_n im Sinne von Diagramm (6.4) folgt aus der induktiven Konstruktion. Dies schließt den Beweis von Satz 6.3.4 ab. $\square$

Da die ausgezeichneten Lifts $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Sinne von Diagramm (6.4) miteinander verträglich sind, definieren sie formal einen Lift

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F_Y"] & Y \\ Y_1 \arrow[u] \arrow[r, "F_{Y_1}"] & Y_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Daher erhalten wir die Existenz eines Deligne-Tate-Morphismus als direkte Folgerung aus dem Satz 6.3.4:

Satz 6.3.10. *Es sei k ein perfekter Körper der Charakteristik* char $k = p > 2$, *W der zugehörige Wittring, Y/W ein lokal noethersches, glattes Schema und X/Y eine modulare, gewöhnliche elliptische Kurve oder eine modulare, gewöhnliche K3-Fläche, so dass die Annahme 6.3.3 erfüllt ist. Dann existiert ein ausgezeichneter Lift $F_Y\colon Y \to Y$ des absoluten Frobenius $F_{Y_1}\colon Y_1 \to Y_1$ auf der Reduktion $Y_1 = Y \times_{\mathrm{Spec}\ W} \mathrm{Spec}\ W/pW$, das heißt ein Deligne-Tate-Morphismus auf Y.*

Beispiel 6.3.11. *Der Satz 6.3.10 lässt sich beispielsweise auf die Familie X'/Y' aus Beispiel 6.3.2(c) anwenden. Dann gilt $Y' = \mathrm{Spec}\ W(\overline{k})\left[t, \frac{1}{t(t-1)(t+1)}\right]$ und wir erhalten einen kanonischen Lift (einen Deligne-Tate-Morphismus) φ*

$$\begin{tikzcd}
W(\overline{k})\left[t, \frac{1}{t(t-1)(t+1)}\right] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & W(\overline{k})\left[t, \frac{1}{t(t-1)(t+1)}\right] \arrow[d] \\
\overline{k}\left[t, \frac{1}{t(t-1)(t+1)}\right] \arrow[r, "Frob"] & \overline{k}\left[t, \frac{1}{t(t-1)(t+1)}\right] \\
f \arrow[r, mapsto] & f^p,
\end{tikzcd}$$

Allerdings ist es schwierig etwas explizites über diesen Lift φ auszusagen, da er mehrfach implizit definiert ist.

7 Literaturverzeichnis

[Bert74] Berthelot, P.: *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$. LNM 407, Springer-Verlag, 1974

[BO78] Berthelot, P. und Ogus, A.: *Notes on crystalline cohomology.* Math. Notes, vol. 21, Princeton Univ. Press, 1978

[Bour74] Bourbaki, N.: *Algebra I. Chapters 1-3.* Springer, 1974

[Deli81] Deligne, P.: *Relèvement des surfaces K3 en caractérisitque nulle (rédige par L. Illusie).* Surfaces Algébriques, J. Giraud et al., eds., LNM 868, p. 58-79, Springer-Verlag, 1981

[FKKP75] Fitzner, H.-J., Kleinert, W., Kurke, H., Pfister, G., Roczen, M. und Zink, T.: *Modulprobleme in der algebraischen Geometrie I.* Beiträge zur Algebra und Geometrie 4, p. 93-150, 1975

[FKKP78] Fitzner, H.-J., Kleinert, W., Kurke, H., Pfister, G., Roczen, M. und Zink, T.: *Modulprobleme in der algebraischen Geometrie III.* Beiträge zur Algebra und Geometrie 7, p. 91-144, 1978

[Hart75] Hartshorne, R.: *On the De Rham cohomology of algebraic varieties.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 45, p. 5–99, 1975

[Hart77] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977

[HS70] Hilton, P. J. und Stammbach, U.: *A Course in Homological Algebra.* Springer-Verlag, 1970

[Illu75] Illusie, L.: *Report on crystalline cohomology.* Proc. Sympos. Pure Math., vol. 24, Amer. Math. Soc., p. 459-478, 1975

[Illu94] Illusie, L.: *Crystalline Cohomology.* Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., p. 43-70, 1994

[Katz72] Katz, N. M.: *Algebraic Solutions of Differential Equations.* Inventiones math.18, p. 1-118, Springer-Verlag, 1972

[Katz70] Katz, N. M.: *Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 39, p. 175–232, 1970

[KO68] Katz, N. M. und Oda, T.: *On the differentiation of De Rham cohomology classes with respect to parameters.* J. Math. Kyoto Univer. 8, p. 199-213, 1968

[KM97] Kostrikin, A. I. und Manin, Y. I.: *Linear Algebra and Geometry.* Gordon and Breach Science Publishers, 1997

[Liu06] Liu, Q.: *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford University Press, 2006

[Mats80] Matsumura, H.: *Commutative Algebra.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980

[Ogus01] Ogus, A.: *Elliptic crystals and modular motives.* Adv. Math. 162, p. 173-216, 2001

[Silv09] Silverman, J. H.: *The Arithmetic of Ellitpic Curves.* Springer-Verlag, 2009

[Szym11] Szymik, M.: *Crystals and derived local moduli for ordinary K3 surfaces.* Adv. Math. 228, No. 1, p. 1-21, 2011

[Tate65] Tate, J.: *Algebraic cycles and poles of zeta functions.* Arithmetic Algebraic Geometry, p. 93-110, Harper and Row, New York, 1965

[Weib94] Weibel, C. A.: *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, 1994

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel

"Deligne-Tate-Morphismen"

selbstständig verfasst, keine anderen als die angegeben Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Schalksmühle, den 17. September 2011.

Unterschrift