Bachelorarbeit an der Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik

Vollständige Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren

Robert Wilms

Betreuer: Prof. Dr. Hubert Flenner

Bochum, der 6. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis der vollständigen Reduzibilität von endlich-dimensionalen Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren. Dazu werden in den Kapiteln 2 und 3 zuerst die nötigen Begriffe definiert. Kapitel 2 beschäftigt sich daher mit der Definition von Lie-Algebren und deren Eigenschaften. Begriffe wie *auflösbar*, *halbeinfach* und *nilpotent* werden geklärt und damit zusammenhängende Resultate bewiesen. Insgesamt folgt die Darstellung des Kapitels dem Buch [Hu]. Anschließend gibt Kapitel 3 eine kurze Einführung zu Darstellungen, ähnlich wie sie in dem Buch [Vi] zu finden ist.

Das vierte Kapitel liefert dann endlich einen Beweis des Satzes von Weyl. Dieser besagt gerade, dass alle endlich-dimensionalen Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren vollständig reduzibel sind. Auch hier ist die Darstellung der in [Hu] ähnlich. Als ein Beispiel zeigt das fünfte Kapitel die Klassifikation aller Darstellungen von sl_2, den 2×2 Matrizen mit Spur Null. Weiterhin wird auf kanonische Weise eine Auffassung der Darstellungen von sl_2 als symmetrische Potenzen gegeben.

Kapitel 6 und 7 geben einen grundlegend anderen Beweis für den Satz von Weyl, der bereits in Kapitel 4 mit algebraischen Methoden bewiesen worden ist. Die Idee ist hier allerdings, die Behauptung zuerst für kompakte Gruppen zu beweisen und anschließend Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren auf Darstellungen kompakter Gruppen zurückzuführen. Kapitel 6 führt dabei das Haar-Maß ein und beweist sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit, ähnlich wie es in dem Buch [El] vorzufinden ist. Das Haar-Maß wird benötigt, um in Kapitel 7.1 die Behauptung für kompakte Gruppen zu zeigen. Hier folgt der Beweis wieder der Darstellung in [Vi]. Da die Rückführung von Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren auf Darstellungen kompakter Gruppen einige Kenntnisse über die Theorie von Lie-Gruppen benötigt, werden die wichtigsten Sätze in Kapitel 7.2 aus [Pr] zitiert. Dieser Beweis des Satzes von Weyl entspricht der Beweisführung von Weyl selbst.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit nur für Körper mit Charakterstik Null. Des Weiteren ist es auch in manchen Fällen notwendig nur algebraisch abgeschlossene Körper zu betrachten. Aus diesem Grund sei, solange nichts anderes erwähnt wird, $\mathbb{K}$ immer als ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ definiert. Ebenso sind nur Vektorräume mit endlicher Dimension von Interesse, so dass alle Vektorräume als endlich-dimensional angenommen werden. Insbesondere sei, solange nichts anderes erwähnt, V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

2 Lie-Algebren

Um die vollständige Reduzibilität der endlich-dimensionalen Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren zu zeigen, ist vorerst zu klären, was Lie-Algebren sind. Daher befasst sich dieser Abschnitt mit der Definition, Beispielen und Eigenschaften von Lie-Algebren.

2.1 Definitionen und Beispiele

In diesem Unterabschnitt möchten wir den Begriff der Lie-Algebra einführen und folgen dabei der Darstellung in [Hu, Chapter 1].

Definition 2.1. *Eine* Lie-Algebra *ist ein Vektorraum* $\mathfrak{g}$ *über einem Körper* $\mathbb{K}$ *versehen mit einer Operation*

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, (x, y) \mapsto [xy],$$

die Lie-Klammer *genannt wird, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

- *(L1) Die Lie-Klammer ist bilinear.*
- *(L2)* $[xx] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$.
- *(L3)* $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0 \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ (Jacobi-Identität)

Abweichend von der Notation der Definition wird der Übersicht wegen in manchen Fällen $[x, y]$ statt $[xy]$ notiert. Wir setzen, solange nichts anderes erwähnt wird, im Folgenden $\mathfrak{g}$ immer als endlich-dimensional voraus und nehmen auch jede andere Lie-Algebra, solange nichts anderes erwähnt wird, als endlich-dimensional an.

Man beachte, dass wegen (L2) und (L3) die Lie-Klammer schiefsymmetrisch ist:

$$[xy] = -[yx].$$

Beispielsweise ist für jeden endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V der Vektorraum $\mathrm{End}(V)$ durch die Definition des Kommutators $[xy] := xy - yx$ eine Lie-Algebra. Wegen ihrer Beziehung zu $\mathrm{GL}(V)$ wird sie mit $\mathrm{gl}(V) := \mathrm{End}(V)$ bezeichnet (*siehe:* Beispiel 7.9). Folgende Begriffe sind auf natürliche Weise definiert:

- Eine lineare Abbildung zweier Lie-Algebren $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ heißt *Lie-Algebren-Homomorphismus*, falls gilt: $\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)] \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$.
- Ein bijektiver Lie-Algebren-Homomorphismus, heißt *Lie-Algebren-Isomorphismus.*
- Zwei Lie-Algebren heißen *isomorph*, wenn ein Lie-Algebren-Isomorphismus zwischen ihnen existiert.
- Eine Untervektorraum $\mathfrak{h}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *(Lie-)Unteralgebra*, falls gilt:

$$[xy] \in \mathfrak{h} \ \forall x, y \in \mathfrak{h}$$

Beispielsweise sind der Kern und das Bild von Lie-Algebren-Homomorphismen Lie-Unteralgebren. Insbesondere werden Lie-Unteralgebren von $\mathrm{gl}(V)$ *lineare* Lie-Algebren genannt.

2.2 Ideale und Homomorphismen

Wir möchten in diesem Unterabschnitt ähnlich wie in [Hu, Chapter 2] den Begriff des Ideals einer Lie-Algebra definieren und wichtige Eigenschaften in diesem Zusammenhang aufzeigen.

Analog zu anderen algebraischen Strukturen ist das Ideal definiert:

Definition 2.2. *Ein Untervektorraum I einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt* Ideal *von $\mathfrak{g}$, falls gilt:*

$$[xy] \in I \text{ für alle } x \in \mathfrak{g} \text{ und } y \in I$$

Insbesondere sind Ideale Lie-Unteralgebren. Jeder Kern eines Lie-Algebren-Homomorphismus ist beispielsweise ein Ideal.

Dies führt zu einer weiteren zu anderen algebraischen Strukturen analogen Definition:

Definition 2.3. *Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt* einfach*, falls $\mathfrak{g}$ und 0 die einzigen Ideale von $\mathfrak{g}$ sind und $[\mathfrak{g}\mathfrak{g}] = \{[xy] \mid x, y \in \mathfrak{g}\} \neq 0$ gilt.*

Ebenso analog zu anderen algebraischen Strukturen zeigt man, dass folgende Homomorphiesätze gelten:

Proposition 2.4. *(a) Für einen Lie-Algebren-Homomorphismus $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ gilt $\mathfrak{g}/\ker\phi \cong \mathrm{Im}\phi$.*

(b) Für zwei Ideale I, J einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit $I \subseteq J$ gilt, dass (L/I) und (J/I) ebenso Ideale sind und $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.

(c) Für zwei Ideale I, J einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$.

Beweis. Den Beweis führt man analog wie für Gruppen, wie er in [SS1, §32] nachzuschlagen ist. □

Ein wichtiges Objekt im Zusammenhang mit Idealen ist der Normalisator. Der Normalisator eines Untervektorraumes $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist definiert durch

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{a \in \mathfrak{g} \mid [ab] \in \mathfrak{h}\ \forall b \in \mathfrak{h}\}.$$

Er hat folgende Eigenschaften:

- Der Normalisator $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, denn für $a, b \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ und $r \in \mathbb{K}$ folgt:
  - $[(a + b), c] = [ac] + [bc] \in \mathfrak{h}\ \forall c \in \mathfrak{h}$, also $a + b \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.
  - $[(r \cdot a)c] = r \cdot [ac] \in \mathfrak{h}\ \forall c \in \mathfrak{h}$, somit $r \cdot a \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.
  - $[[ab]c] = [a[bc]] + [[ac]b] = [a[bc]] - [b[ac]] \in \mathfrak{h}\ \forall c \in \mathfrak{h}$, daher $[ab] \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.
- Nach Definition ist der Normalisator $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ die größte Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ in der $\mathfrak{h}$ noch ein Ideal ist, für eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$.

Ein erstes nicht triviales Beispiel für ein Ideal ist das Zentrum einer Lie Algebra. Es wird definiert durch:

$$Z(\mathfrak{g}) := \{z \in \mathfrak{g} \mid [zx] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Da $[zx] = -[xz]$ gilt, besteht $Z(\mathfrak{g})$ gerade aus den $z \in \mathfrak{g}$ die mit allen $x \in \mathfrak{g}$ kommutieren, wenn man die Lie-Klammer als Kommutator auffasst. Folglich ist $\mathfrak{g}$ genau dann abelsch, wenn $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ gilt.

2.3 Auflösbare, halbeinfache und nilpotente Lie-Algebren

Wichtige mögliche Eigenschaft von Lie-Algebren, wie auflösbar, halbeinfach und nilpotent, sollen in diesem Unterabschnitt definiert werden. Wir richten uns dabei nach [Hu, Chapter 3.1 und 3.2].

Ein weiteres Beispiel für ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist die derivierte Algebra

$$[\mathfrak{g}\mathfrak{g}] = \{[xy] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Dieses Beispiel lässt sich fortsetzen zu der derivierten Reihe:

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \ \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}\mathfrak{g}], \ \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}\mathfrak{g}^{(1)}], \ \ldots, \ \mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}\mathfrak{g}^{(i-1)}], \ \ldots .$$

Dies führt zu folgender Definition:

Definition 2.5. *Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt* auflösbar*, wenn $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beispielsweise ist das Zentrum eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ immer auflösbar, da gilt:

$$[Z(\mathfrak{g}), Z(\mathfrak{g})] \subseteq [Z(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] = 0.$$

Zu auflösbaren Lie-Algebren lassen sich einige Beobachtungen anstellen:

Proposition 2.6. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, dann gilt:*

(a) Falls $\mathfrak{g}$ auflösbar ist, so gilt dies für alle Unteralgebren und alle homomorphen Bilder von $\mathfrak{g}$.

(b) Falls I ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{g}$, und $\mathfrak{g}/I$ auflösbar ist, so ist auch $\mathfrak{g}$ auflösbar.

(c) Falls I, J auflösbare Ideale von $\mathfrak{g}$ sind, so ist auch $I + J$ ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{g}$.

Beweis. (a) Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so folgt aus der Definition $\mathfrak{h}^{(i)} \subseteq \mathfrak{g}^{(i)}$. Somit folgt aus der Auflösbarkeit einer Lie-Algebra die Auflösbarkeit ihrer Lie-Unteralgebren. Ist $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus zweier Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$, so ist $\phi : \mathfrak{g} \to \phi(\mathfrak{g})$ ein Epimorphisumus und wegen $\phi([\mathfrak{g}\mathfrak{g}]) = [\phi(\mathfrak{g})\phi(\mathfrak{g})]$ folgt mit vollständiger Induktion $\phi(\mathfrak{g}^{(i)}) = \phi(\mathfrak{g})^{(i)}$. Damit folgt, dass mit $\mathfrak{g}$ auch das homomorphe Bild $\phi(\mathfrak{g})$ auflösbar ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $(\mathfrak{g}/I)^{(n)} = 0$ gilt. Wie in (a) bereits gezeigt erhalten wir dann für den kanonischen Epimorphismus $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$, dass $\pi(\mathfrak{g}^{(n)}) = (\mathfrak{g}/I)^{(n)} = 0$ gilt, welches gleichbedeutend mit $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \ker \pi = I$ ist. Da aber I auflösbar ist, so ist auch $\mathfrak{g}^{(n)}$ als Unteralgebra von I nach (a) auflösbar. Sei $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $(\mathfrak{g}^{(n)})^{(m)} = 0$ gilt, dann folgt: $\mathfrak{g}^{(n+m)} = (\mathfrak{g}^{(n)})^{(m)} = 0$. Folglich ist auch $\mathfrak{g}$ auflösbar.

(c) Als Bild des kanonischen Homomorphismus von I ist $I/(I \cap J)$ auflösbar. Nach Proposition 2.4 (c) gilt $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$, so dass auch $(I + J)/J$ auflösbar ist. Da J auflösbar ist, ist nach (b), auch $I + J$ auflösbar.

□

Wegen der dritten Aussage gibt es ein eindeutiges maximales auflösbares Ideal. Denn ist I ein maximales auflösbares Ideal und J ein weiteres auflösbares Ideal, so folgt aus der Maximalität dass $I+J = I$, denn $I+J$ ist auch ein auflösbares Ideal nach Proposition 2.6 (c). Dies aber ist gleichbedeutend mit $J \subseteq I$, so dass I das einzige maximale auflösbare Ideal ist.

Definition 2.7. *Das maximale auflösbare Ideal einer Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *heißt* Radikal *und wird* Rad $\mathfrak{g}$ *notiert. Falls* Rad $\mathfrak{g} = 0$ *gilt, so heißt* $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

Eine weitere Folge von Idealen ist die absteigende Zentralreihe:

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}\mathfrak{g}], \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}\mathfrak{g}^1], \ldots, \mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}\mathfrak{g}^{i-1}].$$

Diese führt zu einer weiteren Definition:

Definition 2.8. *Eine Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *heißt* nilpotent, *wenn* $\mathfrak{g}^n = 0$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Da offensichtlich $\mathfrak{g}^{(i)} \subseteq \mathfrak{g}^i$ gilt, sind nilpotente Lie-Algebren zugleich auch auflösbar. Ein weiterer wichtiger Begriff ist die adjungierte Darstellung:

Definition 2.9. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra. Die Abbildung*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g}), x \to \mathrm{ad}\ x, \ \ \textit{mit}\ \mathrm{ad}\ x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, y \to [xy]$$

ist eine Darstellung (siehe Darstellungen Kapitel 3) und heißt die adjungierte Darstellung.

Ein Endomorphismus $x \in \mathrm{gl}(V)$ heißt *nilpotent*, wenn $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, so heißt $x \in \mathfrak{g}$ *ad-nilpotent*, wenn ad x nilpotent ist.

Lemma 2.10. *Sei* $x \in \mathrm{gl}(V)$ *ein nilpotenter Endomorphismus. Dann ist* x *ad-nilpotent.*

Beweis. Mit $x \in \mathrm{gl}(V)$ assoziieren wir zwei Endomorphismen von $\mathrm{gl}(V)$, zum Einen die Linksmultiplikation $\lambda_x(y) = xy$, zum Anderen die Rechtsmultiplikation $\rho_x(y) = yx$, für $y \in \mathrm{gl}(V)$. Diese sind nilpotent, denn es gilt $\lambda_x^n(y) = x^n y = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, da x

nilpotent ist (analog für ρ_x). Da sie kommutieren, ist ihre Differenz wiederum nilpotent. Denn seien $m, n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\lambda_x^n = 0$ und $\rho_x^m = 0$ gilt, dann folgt

$$(\lambda_x - \rho_x)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} (-1)^{m+n-i} (\lambda_x^i \cdot \rho_x^{m+n-i}) = 0.$$

Da $\mathrm{gl}(V)$ eine lineare Lie-Algebra ist, gilt $\mathrm{ad}\ x = \lambda_x - \rho_x$. Somit ist $\mathrm{ad}\ x$ nilpotent, das heißt x ist ad-nilpotent. □

2.4 Satz von Engel

Dieser Unterabschnitt hat den Beweis des Satzes von Engel zum Ziel. Diesen werden wir für spätere Resultate benötigen. Wir führen den Beweis ähnlich wie in [Hu, Chapter 3.3].

Der Satz von Engel dient als Kriterium, um zu entscheiden, ob eine Lie-Algebra nilpotent ist. Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 2.11. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Unteralgebra von $\mathrm{gl}(V)$, für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V. Falls $\mathfrak{g}$ nur aus nilpotenten Endomorphismen besteht und $V \neq 0$, dann gibt es ein $v \in V$ mit $v \neq 0$, so dass $\mathfrak{g} \cdot v = 0$.*

Beweis. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$. Der Fall $\dim \mathfrak{g} = 0$ ist trivial. Sei nun $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Nach Lemma 2.10 operiert $\mathfrak{h}$ mittels ad als eine Lie-Algebra nilpotenter linearer Abbildungen auf $\mathfrak{g}$, und somit auch auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, (x, \bar{y}) \to x.\bar{y} := \pi(\mathrm{ad}\ x(y)),$$

wobei π der kanonische Homomorphismus ist. Wegen $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$ existiert nach der Induktionsannahme ein Vektor $\bar{y} = y + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{h}.\bar{y} = 0$. Das aber ist gleichbedeutend mit $\pi(\mathrm{ad}\ x(y)) = 0\ \forall x \in \mathfrak{h}$ und damit $\mathrm{ad}\ x(y) = [xy] \in \mathfrak{h}\ \forall x \in \mathfrak{h}$. Das aber bedeutet gerade, dass $y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ im Normalisator von $\mathfrak{h}$ liegt.

Nun sei $\mathfrak{h}$ die größte echte Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Da der Normalisator $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ eine Unteralgebra ist, nach dem vorherigen Argument aber ein $y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$ existiert, folgt $\mathfrak{g} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, das heißt $\mathfrak{h}$ ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Angenommen $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$, dann existiert eine eindimensionale echte Unteralgebra $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (sie wird einfach von einem $x \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ erzeugt). Dann ist aber das Urbild $\pi^{-1}(\mathfrak{h}')$ eine echte Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit Kodimension 1, ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}$. Folglich gilt $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$, so dass wir $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K} \cdot z$ für ein $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ schreiben können.

Nach Induktionsannahme ist $W := \{v \in V \mid \mathfrak{h} \cdot v = 0\} \neq \{0\}$. Da $\mathfrak{h}$ ein Ideal ist, ist W stabil unter $\mathfrak{g}$, denn es gilt

$$y \cdot (x \cdot w) = x \cdot (y \cdot w) - [xy] \cdot w = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}, w \in W.$$

Das bedeutet aber gerade $\mathfrak{g} \cdot w \in W\ \forall w \in W$. Wählt man nun $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ wie oben, dann hat z als Endomorphismus auf W einen Eigenvektor $v \in W \setminus \{0\}$ zum Eigenwert

0, da z nach Voraussetzung nilpotent ist. Daher gilt $z \cdot v = 0$. Wegen $v \in W \setminus \{0\}$ gilt auch $\mathfrak{h} \cdot v = 0$ und es folgt insgesamt $\mathfrak{g} \cdot v = (\mathfrak{h} + \mathbb{K} \cdot z) \cdot v = 0$. □

Nun sind wir in der Lage, den Satz von Engel zu formulieren und zu beweisen:

Satz 2.12 (Satz von Engel)**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Sind alle Elemente von $\mathfrak{g}$ ad-nilpotent, dann ist $\mathfrak{g}$ nilpotent.*

Beweis. $\mathfrak{g}$ sei eine Lie-Algebra aus ad-nilpotenten Elementen. Wir führen den Beweis über Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$. Betrachtet man die Lie-Algebra $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g} \subseteq \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$, so lässt sich, da wir $\mathfrak{g}$ als endlich-dimensional angenommen hatten, Lemma 2.11 anwenden: Es existiert ein $x \in \mathfrak{g}$ mit $x \neq 0$, so dass $\mathrm{ad}\, x(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}x] = 0$, das aber bedeutet $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$, wobei $Z(\mathfrak{g})$ das Zentrum ist. Dann hat $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ kleinere Dimension als $\mathfrak{g}$ und besteht wiederum nur aus ad-nilpotenten Elementen, ist also nach Induktionsannahme nilpotent. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}))^n = 0$ gilt, folglich ist $\mathfrak{g}^n \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Damit ist aber $\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}\mathfrak{g}^n] \subseteq [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = 0$, nach Definition des Zentrums. Somit ist $\mathfrak{g}$ nilpotent. □

2.5 Jordanzerlegung

Für die nachstehenden Aussagen ist die Jordanzerlegung von Bedeutung. Wir werden den zentralen Satz nur zitieren. Insgesamt ist dieser Unterabschnitt weitestgehend [Hu, Chapter 4.2] und [Hu, Chapter 5.4] entnommen.

Wir erinnern daran, dass ein Endomorphismus $x \in \mathrm{gl}(V)$ halbeinfach heißt, wenn alle Nullstellen seines Minimalpolynoms verschieden sind. Anders formuliert ist x genau dann halbeinfach, wenn es als Matrix diagonalisierbar ist, da wir $\mathbb{K}$ als algebraisch abgeschlossen und V als endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum vorausgesetzt haben. Wir zitieren hier [Hu, Chapter 4.2, Proposition]:

Satz 2.13. *Es sei $x \in \mathrm{gl}(V)$, wobei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Dann gilt:*

(a) Es existieren eindeutig $h, n \in \mathrm{gl}(V)$, mit $x = h + n$, h halbeinfach, n nilpotent und h und n kommutieren.

(b) Es gibt Polynome $p(T)$, $q(T)$ in einer Variablen und ohne konstanten Term, so dass h=$p(x)$ und n=$q(x)$. Insbesondere kommutieren h und n mit jedem Endomorphismus, der mit x kommutiert.

(c) Sind A, B Unterräume von V mit $A \subseteq B \subseteq V$ und $x(B) \subseteq A$, dann gilt auch $h(B) \subseteq A$ und $n(B) \subseteq A$.

Beweis. Siehe [Hu, Chapter 4.2, Proposition]. □

Wir nennen h den halbeinfachen und n den nilpotenten Teil von x. Eine Folgerung ist:

Korollar 2.14. *Es sei $x \in \mathrm{gl}(V)$, V endlich-dimensional und $x = h + n$ die zugehörige Jordanzerlegung. Dann ist $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, h + \mathrm{ad}\, n$ die Jordanzerlegung von $\mathrm{ad}\, x$.*

Beweis. Nach Lemma 2.10 ist mit n auch ad n nilpotent. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch ad h halbeinfach ist. Da h und n kommutieren gilt: $[\mathrm{ad}\, h, \mathrm{ad}\, n] = \mathrm{ad}\, [h, n] = 0$, so dass nach Satz 2.13 (a) $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, h + \mathrm{ad}\, n$ die eindeutige Jordanzerlegung sein muss. □

Für eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ führt man die abstrakte Jordanzerlegung ein: Nach [Hu, 4.2, Lemma B] und [Hu, 5.3, Theorem] enthält ad $\mathfrak{g}$ den nilpotenten und den halbeinfachen Teil von jedem seiner Elemente. Zu $x \in \mathfrak{g}$ finden wir daher eine Jordanzerlegung von ad x: $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, h + \mathrm{ad}\, n$. Dann gilt aber gerade $x = h + n$ mit $[hn] = 0$, wobei h ad-halbeinfach (das heißt ad h ist halbeinfach) und n ad-nilpotent ist. Wir nennen $x = h + n$ die abstrakte Jordanzerlegung und h den halbeinfachen sowie n den nilpotenten Teil von x.

Wir werden später *(Satz 4.6)* zeigen, dass für lineare halbeinfache Lie-Algebren die gewöhnliche und die abstrakte Jordanzerlegung übereinstimmen.

2.6 Das Cartansche Kriterium

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Cartanschen Kriterium. Das Cartansche Kriterium ist ein Kriterium für die Auflösbarkeit von Lie-Algebren. Wir folgen in diesem Unterabschnitt in großen Teilen der Darstellung von [Hu, Chapter 4.3].

Für das Cartansche Kriterium benötigen wir den Begriff der Spur auf $\mathrm{gl}(V)$, so dass wir hier an die Spur erinnern möchten. Für einen Endomorphismus $x \in \mathrm{gl}(V)$ eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V bezeichnet $\mathrm{Tr}(x)$ die Spur von x, welche als die Summe der Eigenwerte von x definiert ist. Die Spur hat folgende Eigenschaften:

- Die Spur ist linear: $\mathrm{Tr}(r \cdot x + s \cdot y) = r \cdot \mathrm{Tr}(x) + s \cdot \mathrm{Tr}(y)\ \forall r, s \in \mathbb{K}$ und $x, y \in \mathrm{gl}(V)$
- Es gilt: $\mathrm{Tr}(x \cdot y) = \mathrm{Tr}(y \cdot x)\ \forall x, y \in \mathrm{gl}(V)$

(siehe [SS2, §64, Satz 64.12])

Für den Beweis des Cartanschen Kriteriums benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 2.15. *Es seien $A \subseteq B$ zwei Unterräume von $\mathrm{gl}(V)$, V endlich-dimensional. Weiter sei $M := \{x \in \mathrm{gl}(V) \mid [x, B] \subseteq A\}$. Falls für $x \in M$ gilt, dass $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ für alle $y \in M$, so ist x nilpotent.*

Beweis. Es sei $x = h + n$, wobei $h \in \mathrm{gl}(V)$ halbeinfach und $n \in \mathrm{gl}(V)$ nilpotent ist. Eine solche Zerlegung existiert eindeutig nach Satz 2.13 (a). Es sei $v_1, \ldots v_m$ mit $m = \dim V$ eine Basis, bezüglich der h eine Diagonalmatrix ist, mit den Diagonaleinträgen $a_1, \ldots, a_m$. Sei nun E der von $a_1, \ldots, a_m$ aufgespannte Unterverktorraum von $\mathbb{K}$ über dem Primkörper $\mathbb{Q}$, also dem Teilkörper von $\mathbb{K}$, der keinen echten Teilkörper enthält. Um zu zeigen, dass x nilpotent ist, ist zu zeigen, dass $x = n$, also $h = 0$. Dazu reicht es aber $E = 0$, und da E nach Konstruktion endlich-dimensional ist, $E^* = 0$ zu zeigen, wobei E^* der Dualraum zu E ist.

Sei nun $f \in E^*$ eine beliebige lineare Funktion $f : E \to \mathbb{Q}$. Es sei $y \in \mathrm{gl}(V)$ das Element, dessen Matrix die Diagonalmatrix mit den Einträgen $f(a_1), \ldots, f(a_m)$ ist. Es sei $\{e_{ij}\}$ mit $i,j \leq m$ die zugehörige Standardbasis von $\mathrm{gl}(V)$, mit $e_{ij}(v_j) = v_i$ und $e_{ij}(v_k) = 0$ für $k \neq j$. Es gilt:

$$\mathrm{ad}\ h(e_{ij}) = [h, e_{ij}] = [\left(\sum_{k=1}^{m} a_k e_{kk}\right), e_{ij}] = \sum_{k=1}^{m} a_k(e_{kk}e_{ij} - e_{ij}e_{kk})$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k(\delta_{ki}e_{kj} - \delta_{jk}e_{ik}) = (a_i - a_j)e_{ij}$$

wobei δ_{ij} das Kroneckersymbol ist. Analog ist $\mathrm{ad}\ y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$. Die Lagrangesche Interpolation (siehe [SS2, §54, Beispiel 2]) garantiert die Existenz eines Polynoms $r(T) \in \mathbb{K}[T]$ mit $r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ für alle Paare i,j. Dabei ist r wohldefiniert, denn aus $a_i - a_j = a_k - a_l$ folgt $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$, da f linear ist. Man beachte, dass r wegen $r(0) = 0$ keinen konstanten Term besitzt. Damit folgt:

$$\mathrm{ad}\ y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij} = r(a_i - a_j)e_{ij} = r(\mathrm{ad}\ h(e_{ij}))$$

für alle $i,j \leq m$ und somit $\mathrm{ad}\ y = r(\mathrm{ad}\ h)$.

Nun ist aber $\mathrm{ad}\ h$ der halbeinfache Teil von $\mathrm{ad}\ x$ nach Korollar 2.14 und daher wegen Satz 2.13 (b) ein Polynom ohne konstanten Term in $\mathrm{ad}\ x$. Somit ist auch $\mathrm{ad}\ y = r(\mathrm{ad}\ h)$ ein Polynom ohne konstanten Term in $\mathrm{ad}\ x$. Wegen $\mathrm{ad}\ x(B) \subseteq A$ erhalten wir, da A und B Unterräume sind, dass $\mathrm{ad}\ y(B) \subseteq A$ und somit $y \in M$. Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{Tr}(xy) = \sum_{j=1}^{m} a_j f(a_j) = 0$. Wendet man nun f auf die Summe an, so erhält man:

$$\sum_{j=1}^{m} f(a_j)f(a_j) = f\left(\sum_{j=1}^{m} a_j f(a_j)\right) = f(0) = 0$$

Da aber für jedes $i \leq m$ $f(a_i)$ rational ist, kann $f(a_i)^2$ nicht negativ werden, folglich muss $(f(a_i))^2 = f(a_i) = 0$ gelten. Da E von den a_i aufgespannt wurde und $\mathrm{char}\ \mathbb{Q} = \mathrm{char}\ \mathbb{K} = 0$ vorausgesetzt war, ist dann bereits $f = 0$. Da $f \in E^*$ beliebig gewählt war, ist nun auch $E^* = 0$. $\square$

Satz 2.16 (Cartansche Kriterium). *Sei $\mathfrak{g}$ eine Unteralgebra von $\mathrm{gl}(V)$, V endlich-dimensional. Gilt $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ für alle $x \in [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$ und $y \in \mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $[\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Dann ist $\mathfrak{g}$ offensichtlich auflösbar. Nach dem Satz von Engel genügt es dafür zu zeigen, dass alle $x \in [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$ nilpotent sind. Wir setzen nun $A := [\mathfrak{g}\mathfrak{g}], B := \mathfrak{g}$ und möchten Lemma 2.15 anwenden. Dabei ist $M = \{z \in \mathrm{gl}(V) \mid [z, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]\}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{Tr}(az) = 0$ für $a \in [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$ und $z \in M$. Dazu seien $a = [x,y] \in [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$ mit $x, y \in \mathfrak{g}$ und $z \in M$ beliebig gewählt. Es gilt:

$$\mathrm{Tr}([x,y]z) = \mathrm{Tr}(xyz) - \mathrm{Tr}(yxz) = \mathrm{Tr}(xyz) - \mathrm{Tr}(xzy) = \mathrm{Tr}(x[y,z]) = \mathrm{Tr}([y,z]x) = 0$$

Denn wegen $z \in M$ ist $[y,z] \in [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$, so dass nach Voraussetzung $\mathrm{Tr}([y,z]x) = 0$ ist. $\square$

Korollar 2.17. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra mit* $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, y) = 0$ *für alle* $x \in [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$ *und* $y \in \mathfrak{g}$. *Dann ist* $\mathfrak{g}$ *auflösbar.*

Beweis. Nach dem Cartanschen Kriterium (Satz 2.16) ist $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/\ker \mathrm{ad}$ auflösbar. Da auch $\ker \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g})$ auflösbar ist, ist nach Proposition 2.6 (b) auch $\mathfrak{g}$ auflösbar. $\square$

3 Darstellungen

Dieser Abschnitt soll in Kürze nur die Definitionen und Aussagen der Darstellungstheorie wiedergeben, die wir noch benötigen werden. Er liefert eine kurze Zusammenfassung von [Vi, §11.1] und [Hu, Chapter 6.1].

Zunächst betrachten wir die allgemeine Definition einer Darstellung:

Definition 3.1. *Eine* Darstellung *einer Menge* X *in einen Vektorraum* V *ist eine Abbildung* $R : X \to \mathrm{End}(V)$.

Wir nennen eine Darstellung *endlich-dimensional* wenn V endlich-dimensional ist. Im Folgenden werden wir uns nur für endlich-dimensionale Darstellungen interessieren.

Weist die Menge eine bestimmte algebraische Struktur auf, so verlangt man von einer Darstellung dieser algebraischen Struktur, dass die Abbildung die Operation(en) der Struktur respektiert. In unserem Fall von Lie-Algebren bedeutet das konkret:

Definition 3.2. *Eine* Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ *in einen Vektorraum* V *ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$.

Dabei wird im Folgenden für $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ statt $\phi(x) \cdot v$ kurz $x.v$ notiert. Man kann also jede Darstellung einer Lie-Algebra als eine Gruppenoperation

$$\mathfrak{g} \times V \to V,\ (x, v) \to x.v$$

auffassen. Für zwei Darstellungen der gleichen Menge lassen sich Darstellungshomomorphismen definieren:

Definition 3.3. *Seien* $R : X \to \mathrm{End}(V)$ *und* $S : X \to \mathrm{End}(U)$ *zwei Darstellung von* X. *Ein* Darstellungshomomorphismus *von* R *nach* S *ist eine lineare Abbildung* $\varphi : V \to U$ *mit folgender Eigenschaft:*

$$S(x) \cdot \varphi = \varphi \cdot R(x)\ \forall x \in X.$$

Eine wichtige Rolle in der Darstellungstheorie spielen die invarianten Unterräume des Vektorraumes der Darstellung:

Definition 3.4. *Es sei* $R : X \to \mathrm{End}(V)$ *eine Darstellung. Ein Unterraum* $U \subseteq V$ *heißt* invariant, *falls* $R(x) \cdot U \subseteq U\ \forall x \in X$ *gilt.*

Beispielsweise sind der Kern und das Bild eines Darstellungshomomorphismus invariante Unterräume. Gerade beim Kern wird diese Eigenschaft später noch häufiger genutzt, um invariante Unterräume zu konstruieren. Folgende Eigenschaften von Darstellungen basieren auf der Definition von invarianten Unterräumen:

Definition 3.5.

- *Eine Darstellung $R : X \to \text{End}(V)$ heißt* irreduzibel*, wenn* 0 *und V die einzigen invarianten Unterräume von V sind.*
- *Eine Darstellung $R : X \to \text{End}(V)$ heißt* vollständig reduzibel*, falls jeder invariante Unterraum $U \subseteq V$ ein invariantes Komplement W hat, d.h. es gilt $V = U \oplus W$ und $V \cap W = 0$.*

Für spätere Beweise benötigen wir das bekannte Lemma von Schur:

Lemma 3.6 (Lemma von Schur)**.** *Jeder Endomorphismus einer irreduziblen endlich-dimensionalen Darstellung über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ ist ein Vielfaches der Identität.*

Beweis. Sei $R : X \to \text{End}(V)$ eine irreduzible endlich-dimensionale Darstellung über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Nach Definition ist $\varphi \in \text{End}(V)$ ein Darstellungsendomorphismus, falls es mit allen $R(x)$ mit $x \in X$ kommutiert. Daher ist mit φ auch $\varphi - \lambda Id$ ein Darstellungsendomorphismus. Wählt man nun $\lambda \in \mathbb{K}$ als Eigenwert von φ, so ist $\dim(\ker(\varphi - \lambda Id)) \geq 1$. Nun ist aber der Kern eines Darstellungshomomorphismus ein invarianter Unterraum, denn es gilt:

$$\phi(R(x) \cdot y) = R(x) \cdot (\phi(y)) = 0 \text{ für alle } y \in \ker \phi \text{ und } x \in X$$

$$\Rightarrow R(x) \cdot y \in \ker \phi \text{ für alle } y \in \ker \phi \text{ und } x \in X$$

Da die Darstellung aber irreduzibel ist, sind 0 und V die einzigen invarianten Unterräume und folglich ist $\ker(\varphi - \lambda Id) = V$, und somit $\varphi - \lambda Id = 0$, also $\varphi = \lambda Id$. □

Abschließend sei noch erwähnt, dass für eine Darstellung $\phi : \mathfrak{g} \to \text{gl}(V)$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Vektorraum V auch $\mathfrak{g}$-Modul genannt wird. Ein invarianter Unterraum $W \subseteq V$ heißt dann $\mathfrak{g}$-Untermodul. Ist die Darstellung irreduzibel (bzw. vollständig reduzibel) so heißt V auch irreduzibler (bzw. vollständig reduzibler) $\mathfrak{g}$-Modul.

4 Satz von Weyl

In diesem Abschnitt soll nun endlichen ein Beweis des Satzes von Weyl geliefert werden. Dieser besagt gerade das endlich-dimensionale Darstellungen halbeinfach Lie-Algebren vollständig reduzibel sind. Wir führen den Beweis in diesem Kapitel ausschließlich mit algebraischen Mitteln.

4.1 Killing Form

In diesem Unterabschnitt möchten wir die Killing Form einführen und sie anschließend für den Beweis eines zentralen Satzes über die Zerlegung halbeinfacher Lie-Algebren in einfache Ideale verwenden. Die Darstellung richtet sich dabei nach [Hu, Chapter 5].

Definition 4.1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Die symmetrische Bilinearform:*

$$\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ x \cdot \mathrm{ad}\ y)$$

wird die Killing Form *genannt.*

Bei der Definition der Killing Form ist es wichtig, dass $\mathfrak{g}$ insbesondere als endlichdimensional vorausgesetzt wurde. Aus den Eigenschaften der Spur (siehe Seite 8) folgt unmittelbar die Bilinearität und Symmetrie der Killing Form. Zusätzlich ist die Killing Form assoziativ in dem Sinne, dass gilt:

$$\kappa([xy], z) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ [xy] \cdot \mathrm{ad}\ z) = \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y] \cdot \mathrm{ad}\ z) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, y \cdot \mathrm{ad}\, z - \mathrm{ad}\, y \cdot \mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, z)$$

$$= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, y \cdot \mathrm{ad}\, z - \mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, z \cdot \mathrm{ad}\, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot [\mathrm{ad}\, y\ \mathrm{ad}\, z]) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\ [yz]) = \kappa(x, [yz]).$$

Der nachfolgende Satz ist von zentraler Bedeutung für die Zerlegung halbeinfacher Lie-Algebren in Ideale.

Satz 4.2. *Eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ besitzt Ideale $\mathfrak{g}_1, \ldots \mathfrak{g}_n$, welche als Lie-Algebren einfach sind, so dass $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ gilt. Jedes einfache Ideal von $\mathfrak{g}$ ist eines der $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$.*

Beweis. Es sei $I \subseteq \mathfrak{g}$ ein beliebiges Ideal. $I^{\perp} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, y) = 0\ \forall y \in I\}$ ist dann ebenso ein Ideal, da die Killing Form assoziativ ist. Nach Korollar 2.17 ist $I \cap I^{\perp}$ auflösbar und da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, ist somit $I \cap I^{\perp} = 0$. Da aber nach der Definition von $I^{\perp}$ $\dim I + \dim I^{\perp} = \dim \mathfrak{g}$ gilt, muss $\mathfrak{g} = I \oplus I^{\perp}$ gelten.

Nun wendet man Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$ an: Falls $\mathfrak{g}$ keine nicht-trivialen Ideale besitzt, ist $\mathfrak{g}$ bereits einfach, und wir sind fertig. Andernfalls sei $\mathfrak{g}_1$ ein minimales nicht-triviales Ideal. Da jedes Ideal von $\mathfrak{g}_1$ auch Ideal von $\mathfrak{g}$ ist, ist auch $\mathfrak{g}_1$ halbeinfach, und da es minimal gewählt wurde, ist es somit einfach. Nun ist aber $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1^{\perp}$ und da jedes Ideal von $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ auch Ideal von $\mathfrak{g}$ ist, ist auch $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ halbeinfach. Dann folgt aber nach Induktionsvoraussetzung, da $\dim \mathfrak{g}_1^{\perp} < \dim \mathfrak{g}$ ist, dass $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ in eine direkte Summe von einfachen Idealen zerfällt. Damit zerfällt auch $\mathfrak{g}$ in eine direkte Summe von einfachen Idealen.

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei I ein beliebiges einfaches Ideal von $\mathfrak{g}$. Dann ist $[I\mathfrak{g}]$ auch ein Ideal. Wäre $[I\mathfrak{g}] = 0$, so wäre $I \subseteq Z(\mathfrak{g}) = 0$, da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist. Das aber widerspricht, dass I ein einfaches Ideal ist. Folglich gilt $0 \subsetneq [I\mathfrak{g}] \subseteq I$ und da I einfach ist, somit $[I\mathfrak{g}] = I$. Auf der anderen Seite gilt $I = [I\mathfrak{g}] = [I\mathfrak{g}_1] \oplus \cdots \oplus [I\mathfrak{g}_n]$, so dass alle Summanden bis auf einen Null sein müssen. Sei also $[I\mathfrak{g}_i] = I$. Dann ist $I \subseteq \mathfrak{g}_i$, und da $\mathfrak{g}_i$ einfach ist, folgt $I = \mathfrak{g}_i$ □

Eine wichtige Folgerung, die wir für spätere Beweise noch brauchen werden, ist das anschließende Korollar.

Korollar 4.3. *Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so gilt $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$. Ist $I \subseteq \mathfrak{g}$ ein beliebiges Ideal, so ist I direkte Summe einfacher Ideale von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Es gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ nach Satz 4.2. Folglich ist $[\mathfrak{g}\mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{g}\mathfrak{g}_n]$. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, gilt $Z(\mathfrak{g}) = 0$, so dass $[\mathfrak{g}\mathfrak{g}_i] \neq 0$ für alle i gilt. Da aber $[\mathfrak{g}\mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_i$ ein Ideal ist, wobei $\mathfrak{g}_i$ allerdings einfach ist, folgt $[\mathfrak{g}\mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ für alle i. Insgesamt folgt daher $[\mathfrak{g}\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Die zweite Aussage folgt, da jedes Ideal von I auch ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist. $\square$

4.2 Satz von Weyl

Ziel dieses Unterabschnittes ist es nun endlich den Satz von Weyl über die vollständige Reduzibilität von endlich-dimensionalen Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren zu beweisen. Wir führen den Beweis ähnlich wie er in [Hu, Chapter 6] zu finden ist. In diesem Unterabschnitt sei $\mathfrak{g}$ immer eine halbeinfache Lie-Algebra.

Satz 4.4 (Satz von Weyl)**.** *Es sei $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist ϕ vollständig reduzibel.*

Der Beweis bedarf mehrerer Hilfsmittel. Zuerst sei das *Casimir Element* erklärt. Dazu sei $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ eine injektive Darstellung. Als Verallgemeinerung der Killing Form definiert man $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(\phi(x)\phi(y))$, wobei wiederum aus den Eigenschaften der Spur (siehe Seite 8) die Bilinearität und Symmetrie von β folgt. Analog wie bei der Killing Form lässt sich zeigen, dass β in dem Sinne assoziativ ist, dass gilt: $\beta([xy], z) = \beta(x, [yz])$, woraus wiederum folgt, dass das Radikal $\mathrm{Rad}\ \beta := \{x \in \mathfrak{g} \mid \beta(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}$ ein Ideal ist. Da ϕ injektiv ist, gilt $\phi(\mathrm{Rad}\ \beta) \cong \mathrm{Rad}\ \beta$ und nach dem Cartanschen Kriterium (Satz 2.16) ist $\phi(\mathrm{Rad}\ \beta)$ auflösbar. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, folgt $\mathrm{Rad}\ \beta \cong \phi(\mathrm{Rad}\ \beta) = 0$, dass also β nicht entartet ist.

Sei nun $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Da β nicht entartet ist, gibt es eine eindeutige duale Basis $y_1, \ldots, y_n$ bezüglich β, so dass gilt: $\beta(x_i, y_i) = \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das Kroneckersymbol ist. Für ein $x \in \mathfrak{g}$ lässt sich nun mittels dieser Basen schreiben $[xx_i] = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ und $[xy_i] = \sum_{j=1}^n b_{ij}y_j$. Unter Benutzung der Assoziativität von β erhält man nun folgendes Resultat:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta(x_j, y_k) = \beta(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, y_k) = \beta([xx_i], y_k) = \beta(-[x_i x], y_k)$$

$$= \beta(x_i, -[xy_k]) = \beta(x_i, -\sum_{j=1}^{n} b_{kj}y_j) = -\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\beta(x_i, y_j) = -b_{ki}$$

Das *Casimir Element von ϕ* ist nun definiert durch

$$c_\phi := \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\phi(y_i) \in \mathrm{gl}(V).$$

Benutzt man folgende Identität in $\mathrm{gl}(V)$:

$$[x, yz] = xyz - yzx = xyz - yxz + yxz - yzx = [x, y]z + y[x, z]$$

und $a_{ik} = -b_{ki}$, so beobachtet man:

$$[\phi(x), c_\phi] = [\phi(x), \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\phi(y_i)] = \sum_{i=1}^{n}[\phi(x), \phi(x_i)\phi(y_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[\phi(x), \phi(x_i)]\phi(y_i) + \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)[\phi(x), \phi(y_i)] = \sum_{i=1}^{n} \phi([x, x_i])\phi(y_i) + \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\phi([x, y_i])$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\phi(y_i) + \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\phi\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\phi(x_j)\phi(y_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\phi(x_i)\phi(y_j) = 0$$

Das heißt, dass c_ϕ ein Endomorphismus ist, der mit allen $x \in \phi(\mathfrak{g})$ kommutiert.

Die Spur von c_ϕ ist $\mathrm{Tr}(c_\phi) = \sum_{i=1}^{n} Tr(\phi(x_i)\phi(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, y_i) = \dim \mathfrak{g}$. Ist ϕ irreduzibel, so ist c_ϕ nach dem Lemma von Schur (siehe Lemma 3.6) ein Skalar ($= \dim \mathfrak{g}/\dim V$, wegen $\mathrm{Tr}(c_\phi) = \dim \mathfrak{g}$). In diesem Fall ist c_ϕ ersichtlich unabhängig von der Basiswahl.

Für eine nicht injektive Darstellung ϕ ist der Kern $\ker \phi \subseteq \mathfrak{g}$ ein Ideal und nach Korollar 4.3 somit direkte Summe einfacher Ideale. Sei $\mathfrak{g}'$ die Summe der verbleibenden einfachen Ideale der nach Satz 4.2 eindeutig existierenden direkten Summe einfacher Ideale von $\mathfrak{g}$, also $\mathfrak{g} = \ker \phi \oplus \mathfrak{g}'$. Dann ist die Einschränkung von ϕ auf $\mathfrak{g}'$ eine injektive Darstellung von $\mathfrak{g}'$ und wir nennen sein Casimir Element c_ϕ ebenso Casimir Element von $\mathfrak{g}$. Es kommutiert wiederum mit allen $x \in \phi(\mathfrak{g}') = \phi(\mathfrak{g})$.

Für das folgende Lemma ist die Definition von $\mathrm{sl}(V)$ erforderlich:

$$\mathrm{sl}(V) := \{x \in \mathrm{gl}(V) \mid \mathrm{Tr}(x) = 0\}$$

Aus den Eigenschaften der Spur (siehe Seite 8) folgt unmittelbar, dass $\mathrm{sl}(V)$ eine Lie-Algebra und damit eine Unteralgebra von $\mathrm{gl}(V)$ ist. Sind $x, y \in \mathfrak{g}$, so gilt $\mathrm{Tr}([xy]) = \mathrm{Tr}(x \cdot y - y \cdot x) = \mathrm{Tr}(x \cdot y) - \mathrm{Tr}(y \cdot x) = 0$. Wir erhalten somit $[\mathrm{gl}(V)\mathrm{gl}(V)] \subseteq \mathrm{sl}(V)$.

Lemma 4.5. *Es sei $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann gilt $\phi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{sl}(V)$. Ist insbesondere V eindimensional, so ist $\phi(\mathfrak{g}) = 0$.*

Beweis. Nach Korollar 4.3 gilt $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$. Darauf folgt:

$$\phi(\mathfrak{g}) = \phi([\mathfrak{g}\mathfrak{g}]) = [\phi(\mathfrak{g})\phi(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathrm{gl}(V)\mathrm{gl}(V)] \subseteq \mathrm{sl}(V).$$

Ist V eindimensional, so ist $\phi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{sl}(V) = 0$. □

Nun sind wir in der Lage den Beweis zum Satz von Weyl zu führen:

Beweis zum Satz 4.4. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass V einen $\mathfrak{g}$-Untermodul W von Kodimension Eins hat. Nach Lemma 4.5 ist die Darstellung $\mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V/W)$ die

Nullabbildung. Damit erhalten wir die exakte Sequenz: $0 \to W \to V \to V/W \to 0$. Wir möchten mittels Induktion nach $\dim W$ zeigen, dass es genügt, sich auf den Fall zu beschränken, dass W ein irreduzibler $\mathfrak{g}$-Modul ist. Sei also W' ein echter $\mathfrak{g}$-Untermodul von W. Bildet man in der exakten Sequenz die Restklassen zu W', so erhält man die exakte Sequenz $0 \to W/W' \to V/W' \to (V/W')/(W/W') \cong V/W \to 0$. Nach Induktionsannahme ist V/W' nun vollständig reduzibel, das heißt es gibt einen eindimensionalen $\mathfrak{g}$-Untermodul $\overline{W}/W'$, so dass $V/W' = \overline{W}/W' \oplus W/W'$. Daher erhalten wir die exakte Sequenz: $0 \to W' \to \overline{W} \to \overline{W}/W' \to 0$ analog zur ersten exakten Sequenz, mit dem Unterschied, dass $\dim W' < \dim W$, so dass es nach Induktionsannahme einen $\mathfrak{g}$-Untermodul X gibt mit $\overline{W} = W' \oplus X$. Da aber $V/W' = W/W' \oplus \overline{W}/W'$ gilt, folgt $V = W \oplus X$, denn zum Einen ist X eindimensional und W hat Kodimension Eins, zum Anderen gilt $W \bigcap X = 0$, denn $\overline{W}/W'$ war komplementär zu W/W' gewählt, aber $\overline{W} = W' \oplus X$.

Wir können also im Folgenden annehmen, dass W irreduzibel ist. Es sei c_ϕ das Casimir Element von ϕ. Da c_ϕ mit allen Elementen aus $\phi(\mathfrak{g})$ kommutiert, ist es ein Darstellungsendomorphismus von V, insbesondere ist $c_\phi(W) \subseteq W$ und $\ker c_\phi$ ist ein $\mathfrak{g}$-Untermodul von V. Da die Darstellung $\mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V/W)$ trivial ist, operiert auch c_ϕ als Linearkombination von Elementen der Form $\phi(x)$ mit $x \in \mathfrak{g}$ trivial auf V/W. Daher ist $V/W \subseteq \ker c_\phi$ und c_ϕ hat auf V/W die Spur 0: $\mathrm{Tr}_{V/W}(c_\phi) = 0$. Nach dem Lemma von Schur 3.6 operiert c_ϕ als Skalar auf dem irreduziblen $\mathfrak{g}$-Untermodul W. Wäre dieses Skalar 0, so wäre $\mathrm{Tr}_W(c_\phi) = 0$ und damit insgesamt $\mathrm{Tr}_V(c_\phi) = 0$, was für das Casimir Element nicht sein kann. Somit ist $c_\phi \cdot w \neq 0$ für $0 \neq w \in W$, das heißt $W \cap \ker c_\phi = 0$. Dann ist aber $\ker c_\phi$ ein eindimensionaler $\mathfrak{g}$-Untermodul von V komplementär zu W. Damit ist für den Spezialfall die vollständige Reduzibilität gezeigt.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Es sei W mit $0 \subsetneq W \subsetneq V$ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul. Es sei $\mathrm{Hom}(V, W)$ der Raum der linearen Abbildungen $V \to W$. Wir fassen $\mathrm{Hom}(V, W)$ als $\mathfrak{g}$-Modul wie folgt auf:

$$(x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v) \text{ für } f \in \mathrm{Hom}(V, W), x \in \mathfrak{g} \text{ und } v \in V$$

Wir definieren

$$\mathcal{V} := \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid \exists a_f \in \mathbb{K} \text{ mit } f(w) = a_f \cdot w \text{ für alle } w \in W\} \subseteq \mathrm{Hom}(V, W)$$

$$\mathcal{W} := \{f \in \mathcal{V} \mid f(w) = 0 \text{ für alle } w \in W\} \subseteq \mathcal{V}$$

Da W ein $\mathfrak{g}$-Modul ist, sind auch $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ $\mathfrak{g}$-Moduln, denn ist $f \in \mathcal{V}$ mit $f(w) = a_f \cdot w$ mit $a_f \in \mathbb{K}$ für alle $w \in W$ so folgt:

$$(x.f)(w) = x.f(w) - f(x.w) = a_f \cdot (x.w) - a_f \cdot (x.w) = 0$$

und daher $(x.f) \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Zudem folgt hieraus $\phi(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{W}$. Da in $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ ein Element bereits durch das Skalar $a_f \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt ist, gilt $\dim \mathcal{V}/\mathcal{W} = 1$. Das führt zu der exakten Sequenz $0 \to \mathcal{W} \to \mathcal{V} \to \mathcal{V}/\mathcal{W} \to 0$, die wir bereits aus dem Spezialfall kennen.

Daher gibt es einen eindimensionalen g-Untermodul $\mathcal{X}$ von $\mathcal{V}$, welcher komplementär zu $\mathcal{W}$ ist. Es sei $f \in \mathcal{X}$ so gewählt, dass es $\mathcal{X}$ erzeugt. Da $f \notin \mathcal{W}$ können wir nach Division durch $a_f \neq 0$ annehmen, dass $f(w) = w$ für alle $w \in W$. Da nach Lemma 4.5 $\mathfrak{g}$ auf $\mathcal{X}$ trivial operiert, gilt $0 = (x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v)$ somit $x.f(v) = f(x.v)$, was bedeutet, dass f ein $\mathfrak{g}$-Homomorphismus ist. Daher ist $\ker f$ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul von V. Wegen $f(v) \in W$ für alle $v \in V$ und $f(w) = w$ für alle $w \in W$ gilt zum Einen $\dim f(V) = \dim W$ somit $\dim \ker f = \dim V - \dim W$ und zum Anderen $\ker f \cap W = \emptyset$. Daher ist $\ker f$ der gesuchte komplementäre g-Untermodul zu W, es gilt $V = W \oplus \ker f$. □

Als eine Folgerung aus dem Satz von Weyl erhalten wir:

Satz 4.6. *Sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{gl}(V)$ eine halbeinfache, lineare Lie-Algebra, V endlich-dimensional. Dann enthält $\mathfrak{g}$ bereits den halbeinfachen und den nilpotenten Teil jeder seiner Elemente. Insbesondere stimmen abstrakte und gewöhnliche Jordanzerlegung überein.*

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{g}$ beliebig gewählt und $x = h + n$ die Jordanzerlegung nach Satz 2.13 in $\mathrm{gl}(V)$, das heißt, dass $h \in \mathrm{gl}(V)$ halbeinfach und $n \in \mathrm{gl}(V)$ nilpotent ist. Es ist zu zeigen, dass $n, h \in \mathfrak{g}$. Da $\mathrm{ad}\, x(\mathfrak{g}) = [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$ folgt wegen Satz 2.13 (c), dass auch $\mathrm{ad}\, h(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ und $\mathrm{ad}\, n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$. Das bedeutet $h, n \in N_{\mathrm{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ wobei $N_{\mathrm{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ den Normalisator von $\mathfrak{g}$ in $\mathrm{gl}(V)$ bezeichnet.

Für einen $\mathfrak{g}$-Untermodul $W \in V$ definieren wir:

$$\mathfrak{g}_W := \{y \in \mathrm{gl}(V) \mid y(W) \subseteq W \text{ und } \mathrm{Tr}_W(y) = 0\}$$

Es gilt $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}_W$ für alle $\mathfrak{g}$-Untermodule $W \subseteq V$, denn zum Einen gilt $x(W) \subseteq W$ für ein beliebiges $x \in \mathfrak{g}$, da W ein $\mathfrak{g}$-Modul ist, und zum Anderen gibt es wegen Korollar 4.3 $y, z \in \mathfrak{g}$ mit $x = yz - zy$. Folglich ist $\mathrm{Tr}_W(x) = \mathrm{Tr}_W(yz) - Tr_W(zy) = 0$. Wir setzen:

$$\mathfrak{g}' := N_{\mathrm{gl}(V)}(\mathfrak{g}) \cap \bigcap_{W\ \mathfrak{g}-\text{Untermodul von } V} \mathfrak{g}_W$$

Dabei ist $\mathfrak{g}'$ eine Unteralgebra von $N_{\mathrm{gl}(V)}(\mathfrak{g})$. Ist $x \in \mathfrak{g}$ mit Jordanzerlegung $x = h + n$ dann gilt $\mathrm{Tr}_W(n) = 0$, da n nilpotent ist. Da wir $\mathrm{Tr}_W(x) = 0$ bereits gezeigt haben, folgt auch $\mathrm{Tr}_W(h) = \mathrm{Tr}_W(x - n) = 0$, und somit wegen Satz 2.13 (c) $h, n \in \mathfrak{g}_W$ für alle $\mathfrak{g}$-Untermodule W, somit $h, n \in \mathfrak{g}'$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$. Da $\mathfrak{g}'$ ein endlich-dimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul ist, gilt nach dem Satz von Weyl: $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ für ein $\mathfrak{g}$-Untermodul $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}'$. Da $\mathfrak{g}'$ aber bereits im Normalisator $N_{\mathrm{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ liegt, ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] \subseteq \mathfrak{g}$, so dass $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$ trivial operieren muss. Wir wählen einen beliebigen irreduziblen $\mathfrak{g}$-Untermodul W von V. Für $y \in \mathfrak{h}$ gilt $[\mathfrak{g}, y] = 0$, so dass y ein Darstellungsendomorphismus ist und somit nach dem Lemma von Schur 3.6 ein Vielfaches der Identität. Da aber $y \in \mathfrak{g}_W$ gilt, ist $\mathrm{Tr}_W(y) = 0$. Da nach dem Satz von Weyl V sich darstellen lässt als $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, wobei W_i irreduzibler $\mathfrak{g}$-Untermodul ist für $1 \leq i \leq k$, folgt auch $\mathrm{Tr}_V(y) = 0$, so dass, da y ein Vielfaches der Identität ist, $y = 0$ gelten muss. Dann ist aber $\mathfrak{h} = 0$, da $y \in \mathfrak{h}$ beliebig gewählt war. Das bedeutet gerade $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ und somit $h, n \in \mathfrak{g}$.

Die gewöhnliche und abstrakte Jordanzerlegung stimmen nun überein, da die Jordanzerlegung nach Satz 2.13 (a) eindeutig ist. □

Als Anwendung des Satzes erhalten wir für abstrakte halbeinfache Lie-Algebren:

Korollar 4.7. *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$. Ist $x = h + n$ die abstrakte Jordanzerlegung von $x \in \mathfrak{g}$, so ist $\phi(x) = \phi(h) + \phi(n)$ die gewöhnliche Jordanzerlegung von $\phi(x)$.*

Beweis. Da h halbeinfach ist, wird $\mathfrak{g}$ von den Eigenvektoren von ad h aufgespannt. Dann wird aber $\phi(\mathfrak{g})$ von den Eigenvektoren von $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\phi(h)$ aufgespannt, was zeigt, dass $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\phi(h)$ wiederum halbeinfach ist. Analog ist auch $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\phi(n)$ nilpotent und kommutiert mit $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\phi(h)$, so dass $\phi(x) = \phi(h) + \phi(n)$ die abstrakte Jordanzerlegung und nach dem Satz 4.6 damit auch die gewöhnliche Jordanzerlegung von $\phi(x)$ in $\phi(\mathfrak{g})$ ist. □

5 Darstellungen von sl_2

Als ein Beispiel der Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren möchten wir in diesem Abschnitt alle irreduziblen Darstellungen von sl_2, das heißt von $\mathrm{sl}(W)$ mit W als zweidimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum, klassifizieren und anschließend als symmetrische Potenzen interpretieren.

5.1 Klassifikation der Darstellungen von sl_2

Der folgende Unterabschnitt zeigt die Klassifikation der irreduziblen Darstellungen von sl_2 ähnlich wie sie in [Hu, Chapter 7] zu finden ist.

Die Standardbasis von sl_2 sei gegeben durch:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Nachrechnen erhält man: $[he] = 2e, [hf] = -2f, [ef] = h$

Sei nun $\phi : \mathrm{sl}_2 \to \mathrm{gl}(V)$ eine irreduzible endlich-dimensionale Darstellung von sl_2. Da h durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird, ist es halbeinfach. Nach Korollar 4.7 ist damit auch $\phi(h)$ halbeinfach und wird somit durch eine Diagonalmatrix repräsentiert. Daher können wir V in eine direkte Summe von Eigenräumen zerlegen:

$$V = \sum_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda \text{ mit } V_\lambda := \{v \in V | h.v = \lambda v\}.$$

Dabei garantiert die algebraische Abgeschlossenheit von $\mathbb{K}$, dass $\mathbb{K}$ alle Eigenwerte von h enthält. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ kein Eigenwert von h, so gilt V_λ=0. Ist hingegen $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert, so ist $V_\lambda \neq 0$. In diesem Fall nennt man λ *Gewicht* und V_λ heißt *Gewichtsraum.*

Für das Verhalten der Darstellung auf den Eigenräumen erhält man:

Lemma 5.1. *Für $v \in V_\lambda$ gilt $e.v \in V_{\lambda+2}$ und $f.v \in V_{\lambda-2}$.*

Beweis. Es gilt $[he].v = (h \cdot e).v - (e \cdot h).v$ in der linearen Lie-Algebra sl_2. Folglich gilt

$$h.(e.v) = (h \cdot e).v = [he].v + e.(h.v) = 2e.v + \lambda e.v = (\lambda + 2)e.v$$

Analog gilt:

$$h.(f.v) = [hf].v + f.(h.v) = -2f.v + \lambda f.v = (\lambda - 2)f.v$$

□

Da V endlich-dimensional ist, kann es nur endlich viele solcher Eigenräume geben, da V die direkte Summe dieser ist. Folglich gibt es λ mit $V_\lambda \neq 0$ und $V_{\lambda+2} = 0$. Dann gilt $e.v = 0$ für alle $v \in V_\lambda$ aufgrund des Lemmas. Einen solchen Vektor $0 \neq v \in V_\lambda$, für den $e.v = 0$ gilt, nennt man maximalen Vektor vom Gewicht λ.

Um nun die Darstellungen von sl_2 zu untersuchen, macht man folgende Beobachtung:

Lemma 5.2. *Es sei V ein endlich-dimensionaler irreduzibler sl_2-Modul und $v_0 \in V_\lambda$ ein maximaler Vektor. Setze weiter $v_{-1} := 0$ und $v_i := \frac{1}{i!} f^i.v_0$ für $i \geq 0$. Dann gilt für $i \geq 0$*

(a) $h.v_i = (\lambda - 2i)v_i$,

(b) $f.v_i = (i+1)v_{i+1}$,

(c) $e.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$

Beweis. Aussage (a) erhält man durch i-fach wiederholte Anwendung des Lemma 5.1. Die Aussage (b) ist eine Umformung der Definition von v_i. Man beweist (c) mit Induktion nach i. Für den Induktionsanfang $i = 0$ ist die Aussage klar ist, denn nach Definition ist v_0 ein maximaler Vektor und $v_{-1} = 0$. Für den Induktionsschritt bemerkt man:

$$e.v_i = e.(\frac{1}{i} f.v_{i-1}) = \frac{1}{i}([ef].v_{i-1} + f.(e.v_{i-1})) = \frac{1}{i}(h.v_{i-1} + f.(e.v_{i-1}))$$

wegen (a) und der Induktionsvoraussetzung erhält man weiter

$$= \frac{1}{i}((\lambda - 2(i-1))v_{i-1} + (\lambda - i + 2)f.v_{i-2})$$

und mit (b) erhält man schließlich

$$= \frac{1}{i}((\lambda - 2i + 1)v_{i-1} + (i-1)(\lambda - i + 2)v_{i-1}) = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$$

□

Nun kann man folgende Aussagen über die Darstellungen von sl_2 machen:

Satz 5.3. *Es sei* $\phi : \mathrm{sl}_2 \to \mathrm{gl}(V)$ *eine irreduzible endlich-dimensionale Darstellung, also* V *ein irreduzibler* sl_2*-Modul. Dann gilt:*

(a) $V = \sum_{i=0}^{m} V_{m-2i}$*, wobei* $\sum$ *hier als direkte Summe von Vektorräumen zu verstehen ist. Dabei ist* $\dim V = m+1$ *und* $\dim V_\mu = 1$ *für alle* $\mu \in \{-m, -m+2, \ldots, m-2, m\}$.

(b) Es gibt einen bis auf skalare Vielfache eindeutigen maximalen Vektor in V*, der das Gewicht* m *hat.*

(c) Die Darstellung von sl_2 *ist durch die Gleichungen aus Lemma 5.2 bereits gegeben.*

Insbesondere gibt es bis auf Isomorphie zu jeder möglichen Dimension $\dim V = m+1$, $m \geq 0$ *höchstens eine Darstellung.*

Beweis. Nach Lemma 5.2 (a) liegen die v_i alle in verschiedenen Eigenräumen von h und sind somit alle linear unabhängig. Da aber $\dim V < \infty$, gibt es ein kleinstes m, so dass $v_m \neq 0$ und $v_{m+1} = 0$ und folglich $v_{m+i} = \frac{(m+1)!}{(m+i)!} f^{i-1}.v_{m+1} = 0$ für alle $i > 0$. Der von $v_0, \ldots, v_m$ aufgespannte Unterraum von V ist nach Lemma 5.2 invariant bezüglich der Darstellung und somit ein sl_2-Untermodul. Da wir die Darstellung aber als irreduzibel vorausgestzt haben, ist dieser Untermodul gerade V und $v_0, \ldots, v_m$ somit eine Basis von V. Damit beschreiben die Gleichungen Lemma 5.2 (a)-(c) bereits vollständig die Darstellung, da sie paarweise die Operation der Basiselemente von sl_2 auf die Basiselemente von V beschreiben. Dies beweist (c).

Betrachtet man nun Lemma 5.2 (c) für $i = m+1$, so stellt man fest, dass wegen $v_{m+1} = 0$ auch $0 = e.v_{m+1} = (\lambda - m)v_m$ und wegen $v_m \neq 0$ folglich $\lambda = m$ gelten muss, so dass m der Eigenwert von h zu dem maximalen Vektor v_0 ist. Nach Lemma 5.2 (a) sind die Eigenräume von h dann gerade die V_μ mit $\mu = m, m-2, \ldots, -m+2, -m$, da es gerade $m+1$ solche Eigenräume gibt, für jeden Vektor $v_i \neq 0$ einen. Da diese Eigenräume jeweils von genau einem der Vektoren v_i aufgespannt werden, gilt $\dim V_\mu = 1$ und folglich $\dim V = m+1$. Das beweist (a).

Nach obigen Feststellungen muss ein maximaler Vektor v_{max} im Eigenraum $V_\lambda = V_m$ enthalten sein. Dieser ist nach Aussage (a) eindimensional, so dass der maximale Vektor bis auf skalare Vielfache eindeutig ist. Wegen $v_{max} \in V_m$ ist sein Gewicht m. Dies zeigt (b). □

5.2 Darstellungen von sl_2 als symmetrische Potenzen

In diesem Unterabschnitt werden wir die Darstellungen von sl_2 als symmetrische Potenzen eines zweidimensionalen Vektorraumes auffassen. Die Ergebnisse dieses Unterabschnittes sind [SS2, §80], [Bo, Chapter 1, §3.3] und [Pr, Chapter 10, 1.1] entnommen.

Es sei zuerst an das Tensorprodukt erinnert, dessen Definition und Eigenschaften man in [SS2, §80] findet.

$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ sei das Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_n$. Mit

$$\tau : V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,\ (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$

bezeichnen wir die multilineare Abbildungen, welche die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes erfüllt. Alle Elemente in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ haben die Form: $\sum_{k=1}^m a_k \cdot v_1^k \otimes \cdots \otimes v_n^k$ mit $a_k \in \mathbb{K}$, $v_i^k \in V_i$ und $m \in \mathbb{N}$. In dem Spezialfall $V_1 = \cdots = V_n = V$ schreiben wir $V^{\otimes n}$ für $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ und sprechen von der n-ten Tensorpotenz.

Für jede n-te Tensorpotenz $V^{\otimes n}$ von V möchten wir einen besonderen Untervektorraum $J_n(V) \subseteq V^{\otimes n}$ auszeichnen, der von allen

$$v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} - v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$

erzeugt wird. Dabei ist $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ eine Permutation, das heißt eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf sich selbst. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 5.4. *Der Vektorraum $S^nV := V^{\otimes n}/J_n(V)$ heißt die n-te* symmetrische Potenz *von V.*

Auch für die symmetrische Potenz hat man eine multilineare Abbildung:

$$\tau_S := \pi \circ \tau : V^n \to S^nV,$$

wobei $\tau : V^n \to V^{\otimes n}$ die multilineare Abbildung wie oben und $\pi : V^{\otimes n} \to S^nV$ die kanonische Abbildung ist. Allerdings stellt man fest, dass für eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ gilt: $\tau_S(v_1, \ldots, v_n) = \tau_S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$, was die Bezeichnung symmetrisch erklärt. Man schreibt: $\tau_S(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \ldots v_n$, wobei $v_i \in V$. Ähnlich wie beim Tensorprodukt, haben dann alle Elemente in S^nV die Form: $\sum_{k=1}^m a_k \cdot v_1^k \ldots v_n^k$ mit $a_k \in \mathbb{K}$, $v_i^k \in V$ und $m \in \mathbb{N}$.

Für einen m-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V kann man die n-te symmetrische Potenz auch als den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad n in m Variablen ansehen, kurz es gilt: $S^nV \simeq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]_n$. Diese Isomorphie ist auf natürliche Weise gegeben, wenn man eine Basis $v_1, \ldots v_m$ von V wählt und die Basisvektoren v_i mit den Variablen x_i identifiziert. Dann induziert die multilineare Fortsetzung von:

$$\phi(v_{i_1} \ldots v_{i_n}) = x_{i_1} \ldots x_{i_n}$$

den Isomorphismus.

Für Darstellungen $\phi_i : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V_i)$ mit $0 \leq i \leq n$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ findet man eine Darstellung: $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)$ mit

$$\phi(g) \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^n v_1 \otimes \cdots \otimes (\phi_i(g) \cdot v_i) \otimes \cdots \otimes v_n.$$

Wir nennen diese die kanonische Darstellung auf $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Nach [Bo, Chapter 1, § 3.3] sind die derartigen Darstellungen sogar die einzigen von $\mathfrak{g}$ auf $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Sei nun $V_1 = \cdots = V_n = V$ und somit $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n = V^{\otimes n}$. Da offensichtlich

$$g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = g.(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)})$$

für eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ gilt, erhalten wir auf kanonische Weise eine Darstellung $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(S^n V)$.

Sei nun W der zweidimensionale Vektorraum, auf dem sl_2 definiert ist. Es gibt wegen $\mathrm{sl}_2 \subseteq \mathrm{gl}(W)$ die identische Darstellung: $\mathrm{id} : \mathrm{sl}_2 \to \mathrm{gl}(W)$. Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Standardbasis von W, so ist die Darstellung explizit gegeben durch:

$$e.x = 0 \quad f.x = y \quad h.x = x \quad e.y = x \quad f.y = 0 \quad h.y = -y$$

Wie eben beschrieben erhalten wir die kanonische Darstellung: $\phi : \mathrm{sl}_2 \to \mathrm{gl}(S^n W)$ mit $g.(w_1 \dots w_n) = \sum_{i=1}^n w_1 \dots (g \cdot w_i) \dots w_n$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes beschreibt der folgende Satz den Zusammenhang zwischen den Darstellungen von sl_2 und den symmetrischen Potenzen.

Satz 5.5. *Alle irreduziblen endlich-dimensionalen Darstellungen von* sl_2 *sind bis auf Isomorphie von der Form* $\phi : \mathrm{sl}_2 \to \mathrm{gl}(S^m W)$.

Beweis. Es sei $\varphi : \mathrm{sl}_2 \to \mathrm{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung von sl_2. Es sei $m := \dim V - 1$. Man betrachte die lineare Abbildung: $\psi : V \to S^m W$ die durch

$$v_i \to \binom{m}{i} x^{m-i} y^i$$

induziert wird, wobei die v_i wie in Lemma 5.2 definiert seien und nach dem Beweis von Satz 5.3 eine Basis bilden. Allerdings bilden auch die $\binom{m}{i} x^{m-i} y^i$ eine Basis von $S^m W$, so dass die Abbildung ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Nun betrachte man die Operation von sl_2 auf die Basis $\binom{m}{i} x^{m-i} y^i$ die durch die kanonische Darstellung gegeben ist:

$$h.\left(\binom{m}{i} x^{m-i} y^i\right) = (m-i)\binom{m}{i} x^{m-i} y^i - i\binom{m}{i} x^{m-i} y^i = (m-2i)\binom{m}{i} x^{m-i} y^i$$

$$f.\left(\binom{m}{i} x^{m-i} y^i\right) = (m-i)\binom{m}{i} x^{m-i-1} y y^i + 0 = (i+1)\binom{m}{i+1} x^{m-(i+1)} y^{i+1}$$

$$e.\left(\binom{m}{i} x^{m-i} y^i\right) = 0 + i\binom{m}{i} x^{m-i} y^{i-1} x = (m-i+1)\binom{m}{i-1} x^{m-(i-1)} y^{i-1}$$

Offensichtlich sind das gerade die Gleichungen aus Lemma 5.2 (a)-(c). Da nach Satz 5.3 (c) die Darstellung durch diese Gleichungen bestimmt ist, ist ψ ein Darstellungsisomorphismus. $\square$

6 Das Haar-Maß

Wir möchten im Folgenden das für den nächsten Abschnitt benötigte Haar-Maß einführen. Das Haar-Maß ist ein Maß auf lokal-kompakten Gruppen, das invariant bezüglich der Gruppenoperation ist. Vorerst definieren wir die Begriffe lokal-kompakte Gruppe und Maß.

6.1 Topologische Gruppen

In diesem Unterabschnitt definieren wir den Begriff der topologischen Gruppe und zeigen einige wichtige Resultate und Eigenschaften dieser Gruppen. Die Darstellung folgt zu großen Teilen [El, VIII. §3.1].

Definition 6.1. *Eine* topologische Gruppe *ist eine Gruppe G versehen mit einer Topologie, so dass die Gruppenoperationen:*

$$m : G \times G \to G,\ (x, y) \to x \cdot y,$$

$$i : G \to G,\ x \to x^{-1}$$

stetig sind, d.h. Urbilder offener Mengen wiederum offen sind. Hierbei trägt $G \times G$ die Produkttopologie. Ist G insbesondere als topologischer Raum kompakt, so nennen wir G eine kompakte Gruppe.

Beispielsweise sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ mit der Operation $+$ bzw. $\cdot$ topologische Gruppen. $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ mit der Operation $\cdot$ ist ein Beispiel für eine kompakte Gruppe.

Im Folgenden sind insbesondere lokal-kompakte topologische Gruppen von Interesse, das heißt topologische Gruppen die zugleich als topologischer Raum lokal-kompakt sind. Ein Raum heißt lokal-kompakt, wenn es zu jedem Punkt eine kompakte Teilmenge gibt, welche eine offene Umgebung des Punktes enthält.

Es sei im Folgenden G immer eine topologische Gruppe, und $e \in G$ ihr neutrales Element. Für ein $g \in G$ sind die Links- und Rechtstranslation wie folgt definiert:

$$L_g : G \to G,\ x \mapsto gx$$

$$R_g : G \to G,\ x \mapsto xg$$

Lemma 6.2. *Für alle $g \in G$ sind L_g und R_g Homöomorphismen. Die Inversenbildung $i : G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$ ist ebenso ein Homöomorphismus.*

Beweis. Die Multiplikation $G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto xy$ ist nach Definition stetig. Somit sind auch die Einschränkungen L_g und R_g stetig. Da $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$ und $R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$ sind L_g und R_g bijektiv und ihre Umkehrabbildungen stetig. Folglich sind L_g und R_g homöomorph. Die Abbildung i ist nach Definition stetig. Da $i = i^{-1}$ gilt, ist i bijektiv und i^{-1} stetig, und somit i homöomorph. □

Für die Untersuchung von topologischen Gruppen, ist der Begriff der Umgebungsbasis von zentraler Bedeutung. Ein Mengensystem $\mathfrak{U}(x)$ von offenen Mengen ist eine Umgebungsbasis von $x \in G$, wenn zu jeder offenen Menge $O \subseteq X$ mit $x \in O$ ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $U \subseteq O$ existiert. Im folgenden sei $\mathfrak{U}(e)$ immer eine Umgebungsbasis von e.

Lemma 6.3. *Es gilt:*

a) $\{gV \mid V \in \mathfrak{U}(e)\}$, $\{Vg \mid V \in \mathfrak{U}(e)\}$ *sind Umgebungsbasen von* g *und* $\{V^{-1} \mid V \in \mathfrak{U}(e)\}$, $\{V \cap V^{-1} \mid V \in \mathfrak{U}(e)\}$ *Umgebungsbasen von* e*. Insbesondere gibt es Umgebungsbasen von* e*, die nur aus symmetrischen Mengen, d.h. aus Mengen* V *mit* $V^{-1} = V$*, bestehen.*

b) *Für jedes* $U \in \mathfrak{U}(e)$ *gibt es ein* $V \in \mathfrak{U}(e)$ *mit* $V^2 := V \cdot V \subseteq U$*.*

c) *Für* $A \subseteq G$ *und eine offene Menge* $U \subseteq G$ *sind* $A \cdot U$ *und* $U \cdot A$ *offen.*

d) *Sind* $K, L \subseteq$ *kompakt, so ist auch* $K \cdot L$ *kompakt.*

e) *Zu jedem* $U \in \mathfrak{U}(e)$ *existiert ein* $V \in \mathfrak{U}(e)$ *mit* $\overline{V} \subseteq U$*.*

Beweis. a) Nach Lemma 6.2 ist L_g ein Homöomorphismus. $\{gV \mid V \in \mathfrak{U}(e)\}$ besteht aber gerade aus den Bildern $gV = L_g(V)$ des Homöomorphismus, folglich muss es sich um eine Umgebungsbasis von $L_g(e) = g$ handeln. Analoges gilt für die Rechtstranslation. $\{V^{-1} \mid V \in \mathfrak{U}(e)\}$ und $\{V \cap V^{-1} \mid V \in \mathfrak{U}(e)\}$ sind Umgebungsbasen von e, weil i nach Lemma 6.2 ein Homöomorphismus ist und Vereinigungen von Umgebungsbasen wieder Umgebungsbasen sein müssen.

b) Da die Multiplikation $m : G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto xy$ stetig ist, ist das Urbild $m^{-1}(U)$ offen. In der Produkttopologie von $G \times G$ bildet aber $\{V \times V \mid V \in \mathfrak{U}(e)\}$ eine Umgebungsbasis von $\{e\} \times \{e\}$. Folglich gibt es ein $V \in \mathfrak{U}(e)$ mit $V \times V \subseteq m^{-1}(U)$. Das bedeutet aber $V^2 = V \cdot V = m(V \times V) \subseteq m(m^{-1}(U)) = U$.

c) Nach Lemma 6.2 sind L_g bzw. R_g homöomorph. Daher ist gU bzw. Ug offen für alle $g \in G$. Da beliebige Vereinigungen offener Mengen wiederum offen sind, sind auch $\bigcup_{g \in A} gU = AU$ bzw. $\bigcup_{g \in A} Ug = UA$ offen.

d) Da $K, L \subseteq G$ kompakt sind, ist auch $K \times L \subseteq G \times G$ kompakt, und somit auch das Bild der Multiplikationsabbildung $m(K \times L) = KL$.

e) Nach Aussage a) und b) finden wir ein $V \in \mathfrak{U}(e)$ mit $V = V^{-1}$ und $V^2 \subseteq U$. Sei nun $x \in \overline{V}$, dann schneidet xV den Rand von V. Da beides offene Mengen sind, gilt sogar $xV \cup V \neq \emptyset$. Folglich finden wir $v, w \in V$ mit $xv = w$, und somit $x = wv^{-1} \in V \cdot V^{-1} = V \cdot V = V^2 \subseteq U$. Daraus folgt $\overline{V} \subseteq U$.

□

Lemma 6.4. *Sind* K *eine kompakte und* U *eine offene Menge mit* $K \subseteq U \subseteq G$*, so gibt es ein* $V \in \mathfrak{U}(e)$ *mit* $KV \subseteq U$*. Insbesondere gibt es ein abgeschlossenes und kompaktes* $V \in \mathfrak{U}(e)$ *mit* $KV \subseteq U$*, wenn* G *lokal-kompakt ist.*

Beweis. Für jedes $x \in K$ ist nach Lemma 6.3 a) $\{xV | V \in \mathfrak{U}(e)\}$ eine Umgebungsbasis von x. Da $x \in U$ und U offen ist, gibt es somit ein $U_x \in \mathfrak{U}(e)$ mit $xU_x \subseteq U$ und nach

Lemma 6.3 b) auch ein $V_x \in \mathfrak{U}(e)$ mit $V_x^2 \subseteq U_x$. Dann ist $(xV_x)_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es daher $x_1, \ldots x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n x_j V_{x_j}$. Wir setzen $V := \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$. Dann gilt

$$KV \subseteq \bigcup_{j=1}^n x_j V_{x_j} V \subseteq \bigcup_{j=1}^n x_j V_{x_j}^2 \subseteq \bigcup_{j=1}^n x_j U_{x_j} \subseteq U.$$

Nach Lemma 6.3 e) gibt es dann auch eine abgeschlossene Menge $A \subseteq V$, die eine offene Umgebung von e enthält, mit $KA \subseteq U$. Ist G lokal-kompakt, so gibt es zu $e \in G$ eine kompakte Umgebung, das heißt eine kompakte Menge, die eine offene Menge von e enthält. Da abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen wiederum kompakt sind, finden wir insbesondere ein abgeschlossenes und kompaktes $V \in \mathfrak{U}(e)$ mit $KV \subseteq U$. □

Wir definieren für Funktionen auf topologischen Gruppen den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit, den wir für spätere Beweise brauchen werden:

Definition 6.5. *Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt links-gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ gibt, so dass $|f(x) - f(xu)| < \epsilon$ für alle $u \in U$ und $x \in G$ gilt. Analog heißt f rechts-gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ gibt, so dass $|f(x) - f(ux)| < \epsilon$ für alle $u \in U$ und $x \in G$ gilt.*

Wir bezeichnen mit $C_c(G)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : G \to \mathbb{R}$, deren Träger kompakt sind. Dabei ist der Träger von f der Abschluss der Menge, auf der f nicht verschwindet, das heißt formal: $\mathrm{Tr}\ f := \overline{\{x \in G | f(x) \neq 0\}}$.

Lemma 6.6. *Es sei G eine topologische Gruppe. Dann ist jedes $f \in C_c(G)$ sowohl links- als auch rechts-gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir beweisen nur die links-gleichmäßige Stetigkeit, die rechts-gleichmäßige Stetigkeit kann analog gezeigt werden. Wir wählen $f \in C_c(G)$ und $\epsilon > 0$. Da f stetig ist, gibt es zu jedem $x \in \mathrm{Tr}\ f$ eine Umgebung $U_x \in \mathfrak{U}(e)$ von e, so dass $|f(x) - f(xu)| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $u \in U_x$ gilt. Wegen Lemma 6.3 a) und b) existiert dann zu jedem $x \in G$ ein symmetrisches offenes V_x mit $V_x^3 := (V_x^2)V_x \subseteq U_x$. Die Familie $(V_x)_{x\in \mathrm{Tr}\ f}$ ist eine Überdeckung von $\mathrm{Tr}\ f$, so dass wir, da $\mathrm{Tr}\ f$ kompakt ist, $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Tr}\ f$ wählen können, so dass $\mathrm{Tr}\ f \subseteq \bigcup_{j=1}^n x_j V_{x_j}$. Nun setzen wir $V := \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$ und behaupten, dass dann bereits $|f(x) - f(xv)| < \epsilon$ für alle $v \in V$ und $x \in G$ gilt. In der Tat ist, wenn $xV \cap \mathrm{Tr}\ f = \emptyset$, die Behauptung klar, da $f(x) = f(xv) = 0$. Wenn hingegen $xV \cap \mathrm{Tr}\ f \neq \emptyset$, so gibt es wegen $\mathrm{Tr}\ f \subseteq \bigcup_{j=1}^n x_j V_{x_j}$ ein $j \leq n$, so dass $xV \cap x_j V_{x_j} \neq \emptyset$. Dann ist aber $x \in x_j V_{x_j} V^{-1} = x_j V_{x_j} V \subseteq x_j V_{x_j}^2$, folglich $xV \subseteq x_j V_{x_j}^2 V \subseteq x_j V_{x_j}^3 \subseteq x_j U_{x_j}$. Dann gilt für alle $v \in V$:

$$|f(x) - f(xv)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(xv)| < \epsilon$$

Folglich ist f links-gleichmäßig stetig. □

6.2 Maße

Um die Existenz und Eindeutigkeit eines Haar-Maßes zu zeigen, möchten wir in diesem Unterabschnitt die nötigen Definitionen und Eigenschaften aus der Maßtheorie, wie sie in [El, I. §3],[El, II. §1] und [El, VIII. §1 und §2] zu finden sind, knapp zusammenfassen.

Für die Definition eines Maßes bedarf es dem Begriff der σ-Algebra. [El, I. 3.8 b)]

Definition 6.7. *Es sei X eine Menge, und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt* σ-Algebra, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $X \in \mathfrak{A}$

(ii) $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen bezüglich der Komplementbildung.

(iii) $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen bezüglich Durchschnittsbildung beliebig vieler Elemente.

Für ein beliebiges Mengensystem $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ findet man eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{S})$ die $\mathfrak{S}$ enthält:

$$\sigma(\mathfrak{S}) = \bigcap_{\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{A} \text{ ist } \sigma \text{ -Algebra}} \mathfrak{A}$$

Das Standardbeispiel für eine σ-Algebra auf einem Topologischen Raum ist $\sigma(\mathfrak{O})$, welche von $\mathfrak{O}$, dem Mengensystem aller offenen Mengen in X, erzeugt wird. Sie wird die σ-Algebra der Borelschen Mengen von X genannt und kurz mit $\mathfrak{B}$ notiert.

Auf σ-Algebren kann man den Begriff des Maßes definieren [El, II. 1.1]:

Definition 6.8. *Für ein $\mathfrak{A}$ heißt eine Abbildung $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$* Maß, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu \geq 0$,

(iii) für eine Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ disjunkter Mengen mit $A_i \in \mathfrak{A}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Wir möchten Maße mit besonderen Eigenschaften auszeichnen [El, VIII. 1.1]:

- Es sei $\mu : \mathfrak{B} \to [o, \infty]$ ein Maß auf den Borelmengen von einem topologischen Raum X. Wenn zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U existiert, so dass $\mu(U) \leq \infty$, dann heißt μ ein *Borel-Maß.*

- Es sei μ ein Borel-Maß. Gilt für alle $A \in \mathfrak{B}$:

  $$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}$$

  so heißt μ ein *Radon-Maß.*

Im Folgenden ist für uns die Integration von reellwertigen Funktionen bezüglich eines Maßes von Interesse. Die Integration nach einem Maß wird als Inhalt der Vorlesungen Analysis I - III vorausgesetzt. Sie wird beispielsweise in [El, Kapitel IV, §1 -§3] ausführlich erklärt. Dabei wird für die Integration die reellwertige Funktion in ihren negativen und ihren positiven Anteil zerlegt, für den man jeweils eine Folge von Treppenfunktionen sucht, die gegen den Betrag des jeweiligen Anteils konvergiert. Das Integral ist dann der Grenzwert der Integrale der Treppenfunktionen, wobei das Integral einer Treppenfunktion einfach die Summe der Maße der Mengen, auf denen die Treppenfunktion konstant ist, multipliziert mit dem Funktionswert ist. Allerdings funktioniert dies nur für meßbare Funktionen. Wir interessieren uns aber ohnehin nur für stetige Funktionen mit kompakten Träger, welche allesamt messbar sind.

Der nachfolgende Satz besagt, wann wir das Integral nach einem Maß als eine positive Linearform $I : C_c(X) \to \mathbb{R}$ auffassen können. Hier ist $C_c(X)$ wiederum die Menge der stetigen Funktionen mit kompakten Träger. Eine Abbildung $I : C_c(X) \to \mathbb{R}$ heißt dabei positive Linearform, wenn sie $\mathbb{R}$-linear ist, und positiv in dem Sinne, dass gilt: $I(f) \geq 0$ für alle nicht-negativen Funktionen $f \in C_c(G)$. Wir möchten den Darstellungssatz von F. Riesz hier zitieren [El, VIII. 2.5]:

Satz 6.9 (Darstellungssatz von F. Riesz)**.** *Es sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum. Dann existiert zu jeder positiver Linearform $I : C_c(X) \to \mathbb{R}$ ein Radon-Maß $\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$, so dass $I(f) = \int_X f d\mu$ für $f \in C_c(X)$. Dabei ist:*

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f \in C_c(X), f \geq \chi_K\} \ \forall \ K \text{ kompakt}$$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A, K \text{ kompakt}\} \ \forall \ A \in \mathfrak{B}.$$

Beweis. Siehe [El, VIII. 2.5]. □

Hierbei ist χ_K die charakteristische Funktion von K, das heißt:

$$\chi_K : X \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0, & x \notin K \end{cases}$$

6.3 Das Haar-Maß

In diesem Abschnitt werden wir die Existenz und Eindeutigkeit eines Haar-Maßes, d.h. eines bzgl. der Gruppenoperation invariantes Maß zeigen. Wir führen den Beweis ähnlich wie in [El, I. §3.2 und §3.3].

Definition 6.10. *Eine Linearform $I : C_c(G) \to \mathbb{R}$ heißt* linksinvariant *wenn*

$$I(f \circ L_g) = I(f) \ \forall f \in C_c(G), g \in G.$$

Ebenso heißt ein Maß $\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ linksinvariant*, wenn*

$$\mu(gA) = \mu(A) \ \forall A \in \mathfrak{B}, g \in G.$$

Analog lässt sich der Begriff *rechtsinvariant* definieren. Überhaupt gelten alle folgenden Resultate sowohl für die links- als auch die rechtsinvariante Eigenschaft, so dass wir der Einfachheit wegen uns auf linksinvariant beschränken möchten. Allerdings heißt dies nicht, dass linksinvariante Linearformen automatisch rechtsinvariant sind, was für abelsche Gruppen allerdings trivialerweise gilt. Ein Maß bzw. eine Integralform die sowohl links- als auch rechtsinvariant ist, nennen wir *invariant.*

Es gibt folgende Korrespondenz zwischen linksinvarianten Linearformen und linksinvarianten Maßen [El, VIII. 3.9]:

Lemma 6.11. *Sei G eine lokal-kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe. Zu einer linksinvarianten positiven Linearform $I : C_c(G) \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein Radon Maß $\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$, so dass*

$$I(f) = \int_G f d\mu \ \forall f \in C_c(G).$$

Dabei ist μ linksinvariant. Umgekehrt entspricht auch jedem linksinvariaten Radon Maß μ eine linksinvariante positive Linearform I, so dass die obige Gleichung erfüllt wird.

Beweis. Siehe [El, VIII. 3.9]. □

Ob und wie viele linksinvariante Linearformen es gibt, besagt der folgende Satz von Haar [El, VIII. 3.11]:

Satz 6.12 (Satz von Haar)**.** *Es sei G eine lokal-kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe. Dann existiert bis auf positive Vielfache genau eine linksinvariante positive Linearform $I : C_c(G) \to \mathbb{R}$ mit $I \neq 0$. Wir nennen I linkes Haar-Integral auf $C_c(G)$*

Für den Beweis müssen wir zuvor ein wenig Vorarbeit leisten.

Mit $C_c^+(G)$ bezeichnen wir die nicht-negativen stetigen Funktionen auf G mit kompaktem Träger. Wir schreiben im Folgenden kurz $f = 0, f > 0, \ldots$ für $f(x) = 0, f(x) > 0, \ldots \forall x \in G$. Abweichend davon schreiben wir allerdings $f \neq 0$ für $\exists x \in G$ mit $f(x) \neq 0$. Des Weiteren schreiben wir: $\|f\|_\infty := \sup\{f(x) | x \in G\}$ für die Supremumsnorm.

Definition 6.13. *Für $f, g \in C_c^+(G)$ mit $g \neq 0$ definieren wir das Funktional $(f : g)$ wie folgt:*

$$(f : g) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{m} c_k \mid f \leq \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot g \circ L_{x_k^{-1}} \right\}$$

Um zu sehen, dass das Infimum existiert, ist zu zeigen, dass die Menge nicht leer ist. Dazu seien $f, g \in C_c^+(G)$ mit $g \neq 0$. Dann ist $V := \{g > \frac{1}{2}\|g\|_\infty\}$ nichtleer und offen. Trivialerweise gilt $\operatorname{Tr} f \subseteq G = \bigcup_{x \in G} xV$ Da aber $\operatorname{Tr} f$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, das heißt es gibt $x_1, \ldots x_m \in G$, so dass: $\operatorname{Tr} f \subseteq \bigcup_{k=1}^m x_k V$.

Dann gilt aber:

$$f \leq \|f\|_\infty = 2\frac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty} \left(\frac{1}{2}\|g\|_\infty \right) \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} g \circ L_{x_k^{-1}} \right)$$

und somit ist für $c_1 = \cdots = c_m = 2\frac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty}$ die Summe $\sum_{k=1}^m c_k = 2m\frac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty}$ in der Menge enthalten.

Für das Funktional $(f : g)$ mit $f, g \in C_c^+(G)$ und $g \neq 0$ erhält man folgende Eigenschaften:

Lemma 6.14. *Es gilt:*

(1) $(f \circ L_y : g) = (f : g)$ *für alle* $y \in G$

(2) $(\lambda f : g) = \lambda(f : g)$ *für alle nichtnegativen* $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(3) $(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g)$ *für* $f_1, f_2 \in C_C^+(G)$

(4) $\frac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty} \leq (f : g)$

(5) $(f : h) \leq (f : g)(g : h)$ *für* $h \in C_c^+(G)$ *mit* $h \neq 0$

(6) $\frac{1}{(h:f)} \leq \frac{(f:g)}{(h:g)} \leq (f : h)$ *für alle* $f, g, h \in C_c^+(G)$ *mit* $f \neq 0, g \neq 0, h \neq 0$

Beweis. (1) Es gilt: $f \leq \sum_{k=1}^m c_k \cdot g \circ L_{x_k^{-1}} \Leftrightarrow f \circ L_y \leq \sum_{k=1}^m c_k \cdot g \circ L_{x_k^{-1}} \circ L_y = \sum_{k=1}^m c_k \cdot g \circ L_{x_k^{-1} \cdot y}$ und folglich $(f \circ L_y : g) = (f : g)$ für alle $y \in G$.

(2) Aus $f \leq \sum_{k=1}^m c_k \cdot g \circ L_{x_k^{-1}} \Leftrightarrow \lambda f \leq \sum_{k=1}^m (\lambda \cdot c_k) \cdot g \circ L_{x_k^{-1}}$ folgt, dass $(\lambda f : g) = \lambda(f : g)$ für alle nichtnegativen $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(3) Es gilt:

$$f_i \leq \sum_{k=1}^{m_i} c_{k,i} \cdot g \circ L_{x_{k,i}^{-1}} \text{ für } i = 1, 2 \Rightarrow f_1 + f_2 \leq \sum_{k=1}^{m_1} c_{k,1} \cdot g \circ L_{x_{k,1}^{-1}} + \sum_{k=1}^{m_2} c_{k,2} \cdot g \circ L_{x_{k,2}^{-1}}$$

und somit $(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g)$ für $f_1, f_2 \in C_C^+(G)$

(4) Wir erhalten:

$$f \leq \sum_{k=1}^m c_k \cdot g \circ L_{x_k^{-1}}$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \| \sum_{k=1}^m c_k \cdot g \circ L_{x_k^{-1}} \|_\infty \leq \sum_{k=1}^m c_k \cdot \|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \frac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty} \leq \sum_{k=1}^m c_k$$

Daraus folgt: $\frac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty} \leq (f : g)$.

(5) Ist $f \leq \sum_{k=1}^m c_k \cdot g \circ L_{x_k^{-1}}$ und $g \leq \sum_{l=1}^n d_l \cdot h \circ L_{y_l^{-1}}$, so erhält man

$$f \leq \sum_{k=1}^m c_k \cdot (\sum_{l=1}^n d_l \cdot h \circ L_{y_l^{-1}}) \circ L_{x_k^{-1}} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n c_k d_l \cdot h \circ L_{(x_k \cdot y_l)^{-1}}$$

folglich ist $(f:h) \leq \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n c_k d_l = (\sum_{k=1}^m c_k) \cdot (\sum_{l=1}^n d_l)$ und somit $(f:h) \leq (f:g)(g:h)$ für $h \in C_c^+(G)$ mit $h \neq 0$

(6) Unter Benutzung der eben gezeigten Ungleichung erhält man weiter:

$$\frac{1}{(h:f)} = \frac{(f:g)}{(h:f)(f:g)} \leq \frac{(f:g)}{(h:g)} \leq \frac{(f:h)(h:g)}{(h:g)} = (f:h)$$

für alle $f, g, h \in C_c^+(G)$ mit $f \neq 0, g \neq 0, h \neq 0$

□

Mit Hilfe des Lemmas beweisen wir nun den Satz von Haar.

Beweis von Satz 6.12. Wir beweisen zuerst die Existenz. Dazu konstruieren wir zuerst eine positive Linearform auf $C_c^+(G)$, den nichtnegativen stetigen Funktionen auf G mit kompakten Träger, und setzen diese anschließend zu einer positiven Linearform auf $C_c(G)$ fort. Es sei nun $f_0 \in C_c^+(G)$ mit $f_0 \neq 0$ fest gewählt. Dann ist nach Lemma 6.14 (4) insbesondere $(f_0 : g) \neq 0$ für $g \in C_c^+(G)$ mit $g \neq 0$, so dass wir folgende Abbildung definieren:

$$I_g(f) := \frac{(f:g)}{(f_0:g)} \text{ für } f, g \in C_c^+(G) \text{ mit } g \neq 0$$

Aus Lemma 6.14 (1) folgt, dass I_g linksinvariant ist. Nach Lemma 6.14 (6) gilt:

$$\frac{1}{(f_0; f)} \leq I_g(f) \leq (f : f_0) \text{ für } f \neq 0$$

Demnach ist I_g insbesondere positiv und insbesondere $I \neq 0$. Nach Lemma 6.14 (2) ist I_g verträglich mit der Skalarmultiplikation. Allerdings erhalten wir aus Lemma 6.14 (3):

$$I_g(f_1 + f_2) \leq I_g(f_1) + I_g(f_2) \text{ für } f_1, f_2 \in C_c^+(G).$$

Das ist für die Linearität unzureichend. In der Tat ist I_g im Allgemeinen nicht linear. Allerdings möchten wir zeigen, dass zumindest für alle $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ und $\epsilon > 0$ eine Umgebung U_e von $e \in G$ existiert, so dass

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2) + \epsilon \text{ für alle } g \in C_c^+(G) \text{ mit } g \neq 0 \text{ und Tr } g \subseteq U_e$$

Dazu sei $K :=$ Tr $(f_1 + f_2)$ und $h \in C_c^+(G)$ sei so gewählt, dass $h(x) = 1$ für alle $x \in K$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $\delta < \frac{\epsilon}{4(h:f_0)}$, und setzen $F := f_1 + f_2 + \delta h$. Offensichtlich ist $F \in C_c^+(G)$. Weiter definieren wir:

$$\phi_j(x) := \begin{cases} \frac{f_j(x)}{F(x)} & \text{falls } F(x) > 0 \\ 0 & \text{falls } x \in G \setminus K \end{cases}$$

Dabei ist ϕ_j wohldefiniert, denn zum Einen folgt aus $x \in K$ sofort $F(x) > 0$, zum Anderen gilt aber $\phi_j(x) = 0$ für alle $x \in G \setminus K$ mit $F(x) > 0$. Auf $G \setminus K$ ist ϕ_j konstant und somit stetig. Auf $\{x|F(x) > 0\}$ ist ϕ_j wohldefinierter Quotient stetiger Funktionen und daher ebenso stetig. Da diese Mengen eine offene Überdeckung von G bilden, ist ϕ_j auf G stetig, also $\phi_1, \phi_2 \in C_c^+(G)$. Ebenso folgt aus der Definition $0 \leq \phi_1 + \phi_2 < 1$ und $F \cdot \phi_j = f_j$. Wir wählen ein $\eta > 0$ mit $\eta < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{4(f_1+f_2:f_0)}\right)$. Nach Lemma 6.6 ist ϕ_j gleichmäßig stetig. Daher gibt es eine Umgebung U_e von e, so dass $|\phi_j(x) - \phi_j(xu)| < \eta$ für alle $x \in G$ und $u \in U_e$.

Wir möchten nun zeigen, dass dieses U_e die Behauptung erfüllt. Sei also $g \in C_c^+(G)$ mit $g \neq 0$ und $\mathrm{Tr}\ g \subseteq U_e$. Gilt nun:

$$F \leq \sum_{k=1}^{m} c_k g \circ L_{x_k^{-1}}$$

für $x_1, \ldots x_n \in G$ und $c_1 \ldots c_m \geq 0$, so folgt:

$$f_j(x) = \phi_j(x)F(x) \leq \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_j(x) g \circ L_{x_k^{-1}}(x) \leq \sum_{k=1}^{m} c_k(\phi_j(x_k) + \eta) g \circ L_{x_k^{-1}}(x)$$

denn entweder ist $g \circ L_{x_k^{-1}}(x) = 0$, dann gilt die letzte Umformung trivialerweise, oder es ist $g \circ L_{x_k^{-1}}(x) \neq 0$, dann aber ist $x_k^{-1}x \in \mathrm{Tr}\ g \subseteq U_e$, also $x \in x_k U_e$ und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit gilt $\phi_j(x) \leq \phi_j(x_k) + \eta$, so dass die Umformung auch hier gilt. Daher erhält man, da wie oben bemerkt $\phi_1 + \phi_2 < 1$ gilt:

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq \sum_{k=1}^{m} c_k(\phi_1(x_k) + \eta) + \sum_{k=1}^{m} c_k(\phi_2(x_k) + \eta) \leq \sum_{k=1}^{m} c_k(1 + 2\eta)$$

Daraus folgt aber gerade, wegen der Wahl der c_k und x_k, sowie der Definition von F unter Verwendung von Lemma 6.14 (2) und Lemma 6.14 (3):

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq (F : g)(1 + 2\eta) \leq ((f_1 + f_2 : g) + \delta(h : g))(1 + 2\eta)$$

Mit der Definition von I_g heißt das gerade:

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq (I_g(f_1 + f_2) + \delta I_g(h))(1 + 2\eta)$$

Nutzt man nun noch die Wahl von δ und η aus und dass $I_g(f) \leq (f : f_0)$ gilt, so erhält man:

$$2\eta I_g(f_1 + f_2) \leq 2\eta(f_1 + f_2 : f_0) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\delta I_g(h)(1 + 2\eta) \leq 2\delta(h : f_0) < \frac{\epsilon}{2}$$

Und damit wie behauptet:

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2) + \epsilon$$

Für den Abschluss des Existenzbeweises ist der Satz von Tychonoff von zentraler Bedeutung. Dieser besagt gerade das für eine Familie $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von kompakten topologischen Räumen der Produktraum $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ wiederum kompakt ist. Der Beweis wird hier ausgespart und lässt sich in [Jä, Kapitel 10.1] nachlesen.

Ausgehend von dem kompakten Intervall $\left[\frac{1}{(f_0:f)}, (f:f_0)\right]$ definieren wir den Produktraum

$$X := \prod_{f\in C_c^+(G), f\neq 0} \left[\frac{1}{(f_0:f)}, (f:f_0)\right].$$

X ist nach dem Satz Tychonoff wiederum kompakt. Außerdem gilt

$$I_g = \prod_{f\in C_c^+(G), f\neq 0} I_g(f) \in X \text{ für alle } g \in C_c^+(G) \text{ mit } g \neq 0.$$

Für eine Umgebung U_e von $e \in G$ definieren wir:

$$F(U_e) = \overline{\{I_g \mid g \in C_c^+(G) \text{ mit } g \neq 0 \text{ und Tr } g \subseteq U_e\}}$$

Angenommen es gilt:

$$\bigcap_{U \text{ Umgebung von } e} F(U) = \emptyset$$

Dann ist

$$\bigcup_{U \text{ Umgebung von } e} G \setminus F(U) = X$$

eine offene Überdeckung. Da X ist aber kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, $(G \setminus F(U_1)) \cup \cdots \cup (G \setminus F(U_n)) = X$. Dann gilt bereits: $F(U_1) \cap \cdots \cap F(U_n) = \emptyset$. Allerdings ist $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ ebenso eine Umgebung von e, so dass $F(U_1 \cap \cdots \cap U_n)$ nicht leer ist und nach Definition in jedem $F(U_i)$ für $1 \leq i \leq n$ enthalten ist. Das ist ein Widerspruch, so dass die Annahme falsch sein muss.

Wir wählen daher ein I mit $I \in F(U_e)$ für alle Umgebungen U_e von e und möchten zeigen, dass dies bereits eine linksinvariante positive Linearform ist. Da $F(U_e)$ der Abschluss der Menge $\{I_g \mid g \in C_c^+(G) \text{ mit } g \neq 0 \text{ und Tr } g \subseteq U_e\}$ war, liegt diese dicht in $F(U_e)$. Das heißt, dass in jeder Umgebung von I ein I_g liegt. Als Umgebung können wir das Produkt der ganzen Intervalle mit einer ϵ-Umgebung von $I(f_1)$ für ein festes $f_1 \in C_c^+(G)$ mit $f_1 \neq 0$ und ein beliebiges $\epsilon > 0$ wählen:

$$U_1 := \{J(f_1) \mid |J(f_1) - I(f_1)| < \epsilon\} \times \prod_{f\in C_c^+(G), f\neq 0, f\neq f_1} \left[\frac{1}{(f_0:f)}, (f:f_0)\right]$$

Für $f_2, \ldots, f_n \in C_c^+(G)$ mit $f_i \neq 0$ lassen sich analog Umgebungen $U_2, \ldots, U_n$ finden, so dass wir die Umgebung $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ definieren. Dann gibt es ein $I_g \in U$ mit $g \in C_c^+(G)$ und Tr $g \in U_e$ sowie $g \neq 0$, so dass

$$|I(f_i) - I_g(f_i)| < \epsilon \text{ für } 1 \leq i \leq n$$

Da $0 \neq f_i \in C_c^+(G)$ und $\epsilon > 0$ beliebig gewählt waren, übertragen sich insbesondere die Eigenschaften der Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation und die Linksinvarianz, die für alle I_g gelten, auf I. Insbesondere erfüllt I Gleichung $I(f_1)+I(f_2) \leq I(f_1+f_2)+\epsilon$ für alle $\epsilon > 0$. Es gilt also $I(f_1) + I(f_2) = I(f_1 + f_2)$. Wegen $I \in X$ gilt $I(f) \in \left[\frac{1}{(f_0:f)}, (f : f_0)\right]$. Insbesondere ist I daher positiv und $I(f) \neq 0$ für alle $f \in C_c^+(G)$ mit $f \neq 0$. Damit ist I eine linksinvariante lineare Abbildung mit $I : C_c^+(G) \setminus \{0\} \to (0, \infty)$, wobei die erste 0 die Nullfunktion bezeichnet. Nun kann man aber jede stetige Funktion mit kompakten Träger $f \in C_c(G) \setminus \{0\}$ als Differenz zweier nicht-negativer Funktionen $f^+, f^- \in C_c^+ G$ mit

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) \leq 0 \end{cases} \text{ und } f^-(x) := \begin{cases} 0 & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

darstellen. Damit gilt $f = f^+ - f^-$, so dass unsere linksinvariante positive Linearform I sich wie folgt auf $C_c(G)$ fortsetzen lässt:

$$I^* : C_c(G) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \begin{cases} I(f^+) - I(f^-) & \text{für } f \in C_c(G) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } f = 0 \end{cases}.$$

Insbesondere ist dann $I^*(f_0) = 1 \neq 0$, also I^* nicht Null und bezüglich f_0 normiert. Damit ist die Existenz eines linken Haar-Integrals gezeigt. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen:

Dazu sei $J : C_c(G) \to \mathbb{R}$ ein linkes Haar-Integral. Wir möchten zeigen, dass dann $f \mapsto \frac{J(f)}{J(f_0)}$ bereits eindeutig bestimmt ist. Es seien $f, g \in C_c^+(G)$ mit $g \neq 0$. Wegen der Linksinvarianz, Linearität und Positivität folgt dann:

$$J(f) \leq J(\sum_{k=1}^{m} c_k(g \circ L_{x_k^{-1}})) = \sum_{k=1}^{m} c_k J(g \circ L_{x_k^{-1}}) = \sum_{k=1}^{m} c_k J(g)$$

für gewisse $x_1, \ldots, x_m \in G$ und $c_1, \ldots, c_m \geq 0$. Folglich gilt $J(f) \leq (f : g)J(g)$. Insbesondere gilt dann $J(g) \neq 0$, da sonst $J(f) = 0$ für alle $f \in C_c^+(G)$ wäre, im Widerspruch zur Wahl von J.

Es sei nun $f \in C_c^+(G)$ und $\epsilon > 0$. Da f nach Lemma 6.6 links-gleichmäßig stetig ist, gibt es eine Umgebung U_e des neutralen Elements $e \in G$, so dass $|f(x) - f(xu)| < \epsilon$ für alle $x \in G$ und $u \in U_e$ gilt. Wir wählen ein $g \in C_c^+(G)$ mit $g \neq 0$, wobei Tr $g \subseteq U_e$ und $g(x) = g(x^{-1})$ für alle $x \in G$ gelten soll. Wir betrachten nun die Funktion $h_x : G \to \mathbb{R}, y \mapsto f(y) \cdot g(y^{-1}x)$, also $h_x = f \cdot (g \circ R_x \circ i)$, wobei i die Inversen-Abbildung

$i : G \to G, x \mapsto x^{-1}$ bedeuten soll. Wegen der geforderten Eigenschaft von g gilt:

$$h_x(y) = f(y) \cdot g(y^{-1}x) = f(y) \cdot g(x^{-1}y) \begin{cases} \geq (f(x) - \epsilon)g(x^{-1}y) & \text{für } x^{-1}y \in U \\ = 0 = (f(x) - \epsilon)g(x^{-1}y) & \text{für } x^{-1}y \notin U \end{cases}$$

Da $(f(x) - \epsilon)$ nicht von y abhängt folgt:

$$J(h_x) \geq (f(x) - \epsilon)J(g \circ L_{x^{-1}}) = (f(x) - \epsilon)J(g),$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, weil J linksinvariant ist. Dann ist:

$$f(x) \leq \epsilon + \frac{J(h_x)}{J(g)}.$$

Nun ist aber auch g nach Lemma 6.6 rechts-gleichmäßig stetig, so dass für alle $\eta > 0$ eine Umgebung V_e von e gibt, so dass $|g(x) - g(vx)| < \eta$ für alle $x \in G$ und $v \in V_e$ gilt. Zur kompakten Menge $K := \mathrm{Tr}\ f \cup \mathrm{Tr}\ f_0$ wählen wir eine Partition der Eins, das heißt endlich viele $y_1, \ldots, y_k \in G$ und $\phi_1, \ldots, \phi_k \in C_c^+(G)$ mit $\sum_{j=1}^k \phi_j(x) = 1$ für alle $x \in K$, wobei $\mathrm{Tr}\ \phi_j \subseteq y_k V_e$ für $1 \leq j \leq k$ gelten soll. Für $y \notin y_j V_e$ gilt dann $\phi_j(y) = 0$ und für $y \in y_j V_e$ folgt, da $y_j^{-1}y \in V_e$ gilt, dass $g(x) \leq g(y_j^{-1}yx) + \eta$ und folglich nach entsprechender Substitution auch $g(y^{-1}x) \leq g(y_j^{-1}x) + \eta$. Damit erhalten wir für h_x:

$$h_x(y) = f(y) \cdot g(y^{-1}x) = f(y) \cdot \left(\sum_{j=1}^k \phi_j(y) \right) \cdot g(y^{-1}x) \leq \sum_{j=1}^k f(y) \cdot \phi_j(y) \cdot (g(y_j^{-1}x) + \eta)$$

Wegen der Linearität von J erhalten wir:

$$J(h_x) \leq \sum_{j=1}^k J(f \cdot \phi_j) \cdot (g(y_j^{-1}x) + \eta)$$

Dann ist:

$$f(x) \leq \epsilon + \sum_{j=1}^k \frac{J(f \cdot \phi_j)}{J(g)} \cdot (g(y_j^{-1}x) + \eta) = \epsilon + \eta \frac{J(f)}{J(g)} + \sum_{j=1}^k \frac{J(f \cdot \phi_j)}{J(g)} \cdot g(y_j^{-1}x)$$

Wählt man nun η so klein, dass $\eta \frac{J(f)}{J(g)} < \epsilon$ und zudem eine Funktion $d \in C_c^+(G)$ mit $d(x) = 1$ für alle $x \in K$, so ergibt sich:

$$f(x) \begin{cases} = 0 \leq 2\epsilon d(x) + \sum_{j=1}^k \frac{J(f \cdot \phi_j)}{J(g)} \cdot g(y_j^{-1}x) & \text{für } x \notin K \\ \leq 2\epsilon d(x) + \sum_{j=1}^k \frac{J(f \cdot \phi_j)}{J(g)} \cdot g(y_j^{-1}x) & \text{für } x \in K \end{cases}$$

Also $f(x) - 2\epsilon d(x) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{J(f\cdot\phi_j)}{J(g)} \cdot g(y_j^{-1}x)$ und somit:

$$(f - 2\epsilon d : g) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{J(f \cdot \phi_j)}{J(g)} = \frac{J(f)}{J(g)}$$

Wegen Lemma 6.14 (6) und $J(f_0) \leq (f_0 : g)J(g)$ erhält man mittels Division durch $(f_0 : g)$:

$$I_g(f) = \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} \leq 2\epsilon(d : g)(f_0 : g) + \frac{J(f)}{(f_0 : g)J(g)} \leq 2\epsilon(d : f_0) + \frac{J(f)}{J(f_0)}$$

Folglich haben wir eine von g unabhängige obere Schranke für $I_g(f)$. Da auch f_0 linksgleichmäßig stetig ist, lässt sich die zu Beginn gewählte Umgebung U_e so klein wählen, dass auch $|f_0(x) - f_0(xu)| < \epsilon$ für alle $u \in U_e$ gilt. Dann erhält man analog wie für f:

$$(f_0 - 2\epsilon d : g) \leq \frac{J(f_0)}{J(g)}, \text{ somit } (f_0 : g) \leq 2\epsilon(d : g) + \frac{J(f_0)}{J(g)}$$

Wegen $J(f_0) \leq (f_0 : g)J(g)$ erhalten wir:

$$I_g(f) = \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} \geq \frac{(f : g)}{2\epsilon(d : g) + \frac{J(f_0)}{J(g)}} \geq \frac{J(f)}{2\epsilon(d : g)J(g) + J(f_0)}$$

Dabei ist $(d : g)J(g)$ nach oben abzuschätzen, um eine von g unabhängige untere Schranke für $I_g(f)$ zu erhalten. Wir wählen dazu ein $d^* \in C_c^+(G)$, wobei $d^*(x) = 1$ für alle $x \in K$ gelten soll. Weiter setzen wir $\epsilon^* := \frac{1}{4(d^*:d)}$ und wählen unsere Umgebung U_e zu Beginn so klein, dass $|d(x) - d(xu)| < \epsilon^*$ für alle $u \in U_e$ gilt, was möglich ist, da d linksgleichmäßig stetig ist. Analog wie für f, d und ϵ erhält man für d,d^* und ϵ^* die Ungleichung:

$$(d : g) \leq 2\epsilon^*(d^* : g) + \frac{J(d)}{J(g)} \ \forall g \in C_c^+(G) \text{ mit } g \neq 0, \operatorname{Tr} g \subseteq U_e \text{ und } g(x) = g(x^{-1}) \ \forall x \in G$$

Einsetzen der Definition von ϵ^* liefert

$$(d : g) \leq \frac{(d^* : g)}{2(d^* : d)} + \frac{J(d)}{J(g)} \leq \frac{(d : g)}{2} + \frac{J(d)}{J(g)}$$

wobei die letzte Ungleichung wegen Lemma 6.14 (5) folgt. Folglich ist
$(h : g)J(g) \leq 2J(h)$, so dass wir für $I_g(f)$ folgende Schachtelung erhalten:

$$\frac{J(f)}{4\epsilon J(h) + J(f_0)} \leq I_g(f) \leq 2\epsilon(d : f_0) + \frac{J(f)}{J(f_0)}$$

Das bedeutet aber, dass wir zu jedem $\delta > 0$ eine Umgebung V_e von $e \in G$ wählen können, so dass

$$|I_g(f) - \frac{J(f)}{J(f_0)}| < \delta \ \forall g \in C_c^+(G) \text{ mit } g \neq 0, \mathrm{Tr}\ g \subseteq V_e \text{ und } g(x) = g(x^{-1}) \ \forall x \in G$$

Dann stimmt $\frac{J}{J(f_0)}$ aber bereits mit dem im Existenzbeweis gefundenen I überein, so dass jedes linke Haar-Integral bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt ist. □

Korollar 6.15. *Es sei G eine lokal-kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe. Dann existiert bis auf positive Vielfache genau ein linksinvariantes Radon-Maß $\mu : \mathfrak{B}(G) \to [0, \infty], \mu \neq 0$. Wir nennen μ linkes Haar-Maß auf G.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 6.11 und Satz 6.12. □

Beispiel 6.16. *(1) Für $G = \mathbb{R}^n$ mit der Addition als Gruppenoperation ist es relativ einfach, das zugehörige Haar-Maß und Haar-Integral ausfindig zu machen. Ein Haar-Maß β^n wird erzeugt von*

$$\beta^n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \text{ mit } a_j, b_j \in \mathbb{R} \text{ und } a_j \leq b_j \ \forall j \leq n$$

und heißt das Lebesgue-Borelsche Maß. Das zugehörige Haar-Integral ist dann gegeben durch:

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\beta^n(x) \text{ für } f \in C_c(G)$$

Da G in diesem Fall abelsch ist, stimmen linkes und rechtes Haar-Integral bzw. Haar-Maß überein.

(2) Ebenso findet man für die multiplikative Gruppe $G = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ein Haar-Maß μ, das erzeugt wird durch:

$$\mu([b, a]) = \log(b) - \log(a) \text{ für } a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } a \leq b.$$

Entsprechend findet man ein Haar-Integral:

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(x)}{x} d\beta(x) \text{ für } f \in C_c(G)$$

wobei β das Lebesgue-Borelsche Maß ist.

(3) Ein weniger triviales Beispiel bildet die nicht abelsche multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Quarternionen $G = \mathbb{H}^* \cong \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Definiert man für $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{H}^*$ die Norm: $N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, und bezeichnet mit β^4 das Lebesgue-Borelsche Maß auf $\mathbb{R}^4$, so ist sowohl ein linkes als auch ein rechtes Haar-Integral gegeben durch

$$I(f) = \int_{\mathbb{H}^*} \frac{f(x)}{(N(x))^2} d\beta^4(x) \text{ für } f \in C_c(\mathbb{H}^*)$$

Das folgt unmittelbar aus der Transformationsformel und der Tatsache, dass $|\det(\mathrm{Jac}(L_a))| = (N(a))^2 = |\det(\mathrm{Jac}(R_a))|$.

7 Alternativer Zugang zum Satz von Weyl

Der Satz von Weyl lässt sich wie die meisten Sätze über die endlich-dimensionalen Darstellungen von halbeinfachen Lie-Algebren auf zwei grundlegend verschiedene Arten beweisen: Zum Einen mit algebraischen Methoden, wie wir in Kapitel 4.2 vorgegangen sind, zum Anderen mittels des Unitären Tricks, so wie Weyl selbst den Beweis ursprünglich führte. Die zweite Methode nutzt aus, dass Darstellungen von kompakten Gruppen vollständig reduzibel sind, und führt Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren auf diese zurück. Wir werden in diesem Kapitel zuerst die vollständige Reduzibilität von Darstellungen kompakter Gruppen beweisen und anschließend skizzieren wie wir zu einer Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra eine Darstellung einer kompakten Gruppen erhalten.

7.1 Satz von Weyl für kompakte Gruppen

In diesem Unterabschnitt zeigen wir zunächst die vollständige Reduzibilität von endlich-dimensionalen Darstellungen kompakter Gruppen. Wir richten uns dabei nach [Vi, §11.2]. Für den Beweis des Satzes von Weyl für kompakte Gruppen benötigen wir das Fixpunkt-Lemma, für das wir vorerst den Schwerpunkt einer kompakten Gruppe definieren müssen. Dazu sei M eine nichtleere, beschränkte, konvexe Menge in einem reellen oder komplexen affinen endlich-dimensionalen Raum S. Der von M aufgespannte affine Raum aff M ist als reeller bzw. komplexer Vektorraum eine abelsche lokalkompakte Gruppe, so dass es nach Korollar 6.15 insbesondere ein Haar-Maß μ gibt. Da M konvex ist und aff M erzeugt, kann es keine μ-Nullmenge sein. Andererseits ist $\mu(M) < \infty$, da M beschränkt und μ ein Radon-Maß ist. Das lässt folgende Definition zu:

Definition 7.1. *Jeder nichtleeren, beschränkten, konvexen Teilmenge M eines reellen oder komplexen affinen Raumes S ordnen wir das Element*

$$\mathrm{cent}\ M := \mu(M)^{-1} \int_M x d\mu(x) \in S$$

zu. Wir nennen cent M *den Schwerpunkt von M.*

Das Haar-Maß ist zwar nur bis auf konstante Vielfache eindeutig bestimmt, doch man erkennt, dass cent M nicht von der Wahl des Haar-Maßes abhängt. Da das Haar-Maß des affinen Raumes invariant unter affinen Transformationen ist, erhalten wir:

$$\mathrm{cent}\ \alpha(M) = \mu(\alpha(M))^{-1} \int_{\alpha(M)} x\mu(dx) = \mu(M)^{-1} \int_M \alpha(x)\mu(dx) = \alpha(\mathrm{cent}\ M)$$

Für eine beliebige affin-lineare Funktion, die auf aff M nicht verschwindet, und auf M nur positive Werte annimmt erhält man:

$$f(\text{cent } M) = \mu(M)^{-1} \int_M f(x)\mu(dx) > 0,$$

dass somit der Funktionswert von cent M auch positiv ist. Da dies aber für beliebige Funktion solcher Art gilt, muss cent $M \in M$ gelten.

Lemma 7.2. *Es sei G eine kompakte Gruppe von affinen Transformationen eines reellen affinen endlich-dimensionalen Raumes S. Weiter sei $M \subseteq S$ eine nichtleere konvexe Teilmenge, welche invariant unter G ist. Dann besitzt G einen Fixpunkt in M. Insbesondere besitzt G einen Fixpunkt in S.*

Beweis. Zu einem Punkt $p \in M$ erhält man seine Bahn $G \cdot p$, die Menge alle G-Translationen von p, und weil M unter G invariant ist, gilt $G \cdot p \subseteq M$. Da G kompakt ist, ist auch das Bild $G \cdot p$ kompakt, und daher im affinen Raum aff M beschränkt. Nun betrachte man die konvexe Hülle von $G \cdot p$:

$$\text{conv } (G \cdot p) := \bigcap_{G \cdot p \subseteq K \subseteq M \text{ konvex}} K \subseteq M,$$

welche die kleinste konvexe Menge ist, die $G \cdot p$ enthält. Diese ist ebenso beschränkt, so dass wir den Schwerpunkt cent (conv $(G \cdot p)$) bestimmen können. Es ist klar, dass $G \cdot p$ invariant unter G ist. Daraus folgt aber, dass auch conv $(G \cdot p)$ invariant unter G ist. Zum Einen sind nämlich Bilder von konvexen Mengen unter affinen Transformationen wiederum konvex, zum Anderen sind affine Transformationen bijektiv und ihre Umkehrabbildungen wiederum affin. Folglich ist das Bild von conv $(G \cdot p)$ unter einer affinen Transformation $g \in G$ wieder eine konvexe Menge, die $G \cdot p$ enthält. Gäbe es aber nun eine echte konvexe Teilmenge K mit $G \cdot p \subseteq K \subsetneq g \cdot \text{conv } (G \cdot p)$ im Bild von conv $(G \cdot p)$, dann wäre das Urbild $g^{-1} \cdot K$ eine echte konvexe Teilmenge mit $G \cdot p \subseteq g^{-1} \cdot K \subsetneq \text{conv } (G \cdot p)$, im Widerspruch dazu, dass conv $(G \cdot p)$ die konvexe Hülle ist. Folglich gilt:

$$g \cdot \text{conv } (G \cdot p) = \text{conv } (G \cdot p) \ \forall g \in G$$

und daher folgt für den Schwerpunkt:

$$\text{cent } (\text{conv } (G \cdot p)) = \text{cent } (g \cdot \text{conv } (G \cdot p)) = g \cdot \text{cent } (\text{conv } (G \cdot p)) \ \forall g \in G$$

Folglich ist cent (conv $(G \cdot p)$) $\in M$ für alle $p \in M$ ein Fixpunkt von G. □

Nun sind wir in der Lage den Satz von Weyl über die vollständige Zerlegung von Darstellungen kompakter Gruppe zu beweisen.

Satz 7.3. *Es sei V hier ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ Vektorraum. Dann ist jede Darstellung $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer kompakten Gruppe G vollständig reduzibel.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass zu jedem G-invarianten Unterraum $U \subseteq V$ ein G-invariantes Komplement $W \subseteq V$ existiert. Sei nun $U \subseteq V$ ein G-invarianter Unterraum. Wir betrachten die Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ der linearen Projektionen auf U:

$$S := \{P \in \mathrm{GL}(V) \mid P \cdot v \in U \ \forall v \in V \text{ und } P(u) = u \ \forall u \in U\} \subseteq \mathrm{GL}(V)$$

Da S durch diese linearen Gleichungen gegeben ist, können wir es als Fläche in $\mathrm{GL}(V)$ auffassen, und daher als affinen endlich-dimensionalen Raum, und folglich als reellen affinen endlich-dimensionalen Raum, falls V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, oder als reellen affinen endlich-dimensionalen Raum doppelter Dimension, falls V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

Man betrachte nun die durch die Konjugation gegebene Gruppenoperation:

$$G \times \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V), \ (g, x) \to g \cdot x \cdot g^{-1}$$

Dann ist S invariant bezüglich dieser Operation, denn ist $P \in S$, so folgt

$$(g \cdot P \cdot g^{-1}) \cdot v = g \cdot (P \cdot (g^{-1} \cdot v)) \in g \cdot U = U \ \forall v \in V, g \in G$$

$$(g \cdot P \cdot g^{-1}) \cdot u = g \cdot (P \cdot (g^{-1} \cdot u)) = g \cdot (id_U \cdot (g^{-1} \cdot u)) = u \ \forall u \in U, g \in G$$

und somit $g \cdot P \cdot g^{-1} \in S$. Folglich haben wir einen affinen reellen Raum und eine kompakte Gruppe affiner Transformationen. Daher können wir Lemma 7.2 anwenden und erhalten einen Fixpunkt $P_0 \in S$ von G, das heißt es gilt $g \cdot P_0 \cdot g^{-1} = P_0$ oder äquivalent $g \cdot P_0 = P_0 \cdot g$ für alle $g \in G$. Nun setzen wir $W := \ker P_0$. Da P_0 linear ist, gilt $V = P_0(V) \oplus \ker P_0 = U \oplus W$. Es bleibt zu zeigen, dass W G-invariant ist. Dies folgt aber aus folgender Gleichung:

$$P_0 \cdot (g \cdot w) = g \cdot (P_0 \cdot w) = g \cdot 0 = 0 \ \forall w \in W, g \in G$$

□

7.2 Zusammenhang von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Zur Theorie der Lie-Algebren findet man zwei verschiedene Zugänge. Der eine setzt bei der abstrakten Definition der Lie-Algebra an, wie es in Kapitel 2 der Fall ist. Der andere geht von der Theorie der Lie-Gruppen aus und ordnet jeder Lie-Gruppe eine Lie-Algebra zu. Wir möchten nun in diesem Unterabschnitt die Anfänge der Theorie der Lie-Gruppen skizzieren, um dann eine Zuordnung von kompakten Gruppen zu halbeinfachen Lie-Algebren zu finden. Dabei fassen wir überwiegend Resultate aus [Pr, Chapter 4,7,8,10] zusammen, ohne sie zu beweisen.

Definition 7.4. *Eine Gruppe G die zu gleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, heißt* Lie-Gruppe, *falls die Gruppenoperationen:*

$$\cdot : G \times G \to G, \ (x, y) \to x \cdot y,$$

$$i : G \to G, \ x \to x^{-1}$$

differenzierbar sind. Eine Untergruppe $H \subseteq G$ einer Lie-Gruppe G, die wiederum eine Lie-Gruppe ist, heißt Lie-Untergruppe.

Beispielsweise sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, S^1 \subset \mathbb{C}^*$ aber auch $\mathrm{GL}(V)$ Lie-Gruppen. Es folgt aus der Definition, dass jede Lie-Gruppe eine topologische Gruppe ist.

Für eine nicht notwendig assoziative Algebra A, deren Multiplikation wir mit ab für $a, b \in A$ notieren, definieren wir folgenden Begriff:

Definition 7.5. *Eine* Derivation *einer Algebra A ist eine lineare Abbildung $D : A \to A$, so dass für alle $a, b \in A$ gilt:*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

Die Menge aller Derivationen bezeichnen wir mit $\mathrm{Der}\, A$

Proposition 7.6. *Für eine Algebra A ist* $\mathrm{Der}\, A$ *eine Lie-Unteralgebra von* $\mathrm{gl}(A)$.

Beweis. Nach Definition ist $\mathrm{Der}\, A \subseteq \mathrm{gl}(A)$. Es gilt:

$$[D_1 D_2](x \cdot y) = D_1 \cdot D_2(x \cdot y) - D_2 \cdot D_1(x \cdot y) = D_1 \cdot (D_2(x) \cdot y + x \cdot D_2(y)) - D_2 \cdot (D_1(x) \cdot y + x \cdot D_1(y))$$

$$= (D_1 \cdot D_2)(x) \cdot y - (D_2 \cdot D_1)(x) \cdot y + x \cdot (D_1 \cdot D_2)(y) - x \cdot (D_2 \cdot D_1)(y) = [D_1 D_2](x) \cdot y + x \cdot [D_1 D_2](y)$$

und folglich $[D_1 D_2] \in \mathrm{Der}\, A$ für alle $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}\, A$.

Das heißt, $\mathrm{Der}\, A$ ist abgeschlossen bezüglich der Lieklammer und somit eine Lie-Unteralgebra. □

Definition 7.7. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $C^\infty(M)$ die Algebra der C^∞-differenzierbaren Funktionen auf M. Eine Derivation $X \in \mathrm{Der}\, C^\infty(M)$ nennen wir dann* Vektorfeld *und die Lie-Algebra aller Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}(M) := \mathrm{Der}\, C^\infty(M)$.*

Diese Definition motiviert einer Lie Gruppe eine Lie Algebra zuzuordnen. Wie dies geschieht, beschreibt der folgende Satz, den wir hier ohne Beweis zitieren (*siehe:* [Pr, Chapter 4, 3.1, Theorem 1]):

Satz 7.8. *Es sei G eine Lie-Gruppe. Die linksinvarianten Vektorfelder von G bilden eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{L}(M)$. Wir nennen sie die Lie-Algebra von G und notieren sie mit* Lie(G) *oder kurz mit $\mathfrak{g}$, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht. Ist $e \in G$ die Eins in G, so gilt* $\mathrm{Lie(G)} \cong T_eG$, *wobei T_eG den Tangentialraum von G im Punkt $e \in G$ bezeichnet.*

Beispiel 7.9.

- *Die Lie-Algebra zur Lie-Gruppe* $\mathrm{GL}(V)$ *ist* $\mathrm{End}(V) = \mathrm{gl}(V)$. *Das erkennt man beispielsweise, indem man* $T_e\mathrm{GL}(V)$ *berechnet.*
- *Insbesondere erhält man zu der Lie-Gruppe* $\mathbb{R}^*$ *bzw.* $\mathbb{C}^*$ *die Lie-Algebra* $\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$.
- *Die Lie-Algebra zu* $SL(V)$ *ist* $\mathrm{sl}(V)$.

Ebenso wie zu einer Lie-Gruppe eine Lie-Algebra korrespondiert, findet man auch eine Korrespondenz zwischen Homomorphismen von Lie-Gruppen und Homomorphismen von Lie-Algebren. Dazu zitieren wir folgenden Satz (*siehe:* [Pr, Chapter 4, 3.2, Theorem 2]):

Satz 7.10. *Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus* $\Phi : G_1 \to G_2$ *induziert einen Lie-Algebren-Homomorphismus* $d\Phi : \mathrm{Lie}(G_1) \to \mathrm{Lie}(G_2)$.

Dass man umgekehrt zu einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine Lie-Gruppe G mit $\mathfrak{g} = Lie(G)$ findet, besagt der folgende Satz (*siehe:* [Pr, Chapter 4, 3.2, Theorem]):

Satz 7.11. *(a) Zu jeder Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *existiert eindeutig eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe* G *mit* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

(b) Zu einem Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *existiert eindeutig ein Homomorphismus von einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen* $\phi : G_1 \to G_2$, *so dass* $\varphi = d\phi$.

Der folgende Satz besagt, dass sogar eine Korrespondenz zwischen den inneren Strukturen der Lie-Gruppe und der zugehörigen Lie-Algebra existiert (*siehe:* [Pr, Chapter 4, 3.4, Corollary]):

Satz 7.12. *Für eine zusammenhängende Lie-Gruppe gibt es eine 1-1 Korrespondenz zwischen den abgeschlossenen zusammenhängenden Normalteilern der Lie-Gruppe* G *und den Idealen von* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

Man kann zeigen, dass auch die zusammenhängenden auflösbaren Normalteiler von G und die auflösbaren Ideale von $\mathfrak{g}$ korrespondieren (*siehe:* [Pr, Chapter 4, 7.1]). Das führt zu folgendem Resultat (*siehe:* [Pr, Chapter 4, 7.1, Proposition 3]):

Proposition 7.13. *Für eine Lie-Gruppe* G *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Die Lie-Algebra von G *ist halbeinfach.*

(b) G *hat keine zusammenhängenden auflösbaren Normalteiler.*

Eine Lie-Gruppe G, die (a) und somit auch (b) erfüllt, heißt *halbeinfach*. Für die weiteren Betrachtungen möchten wir neben dem Begriff der Lie-Gruppe den Begriff der linearen algebraischen Gruppe einführen (*siehe:* [Pr, Chapter 7, 1.2, Definition 1]):

Definition 7.14. *Eine* lineare algebraische Gruppe G *ist eine Untergruppe von* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, *welche durch das Nullstellengebilde endlich vieler Polynome in* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *gegeben ist. Das heißt formal:*

$$\exists p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n], \text{ so dass } G = \{x \in \mathbb{K}^n \mid p_1(x) = \cdots = p_k(x) = 0\}$$

Das heißt G ist eine algebraische Varietät. Dabei soll hier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gelten.

Insbesondere sind lineare algebraische Gruppen Lie-Gruppen, denn $GL_n(\mathbb{K})$ ist eine Lie-Gruppe und eine lineare algebraische Gruppe ist als Urbild von $\{0\}$, die abgeschlossen ist, unter Polynomen, die stetig sind, abgeschlossen in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Es gilt aber, dass abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen wiederum Lie-Gruppen sind (*siehe:* [Pr, Chapter 4, 3.2, Theorem 1]). Damit gelten die Resultate für Lie-Gruppen insbesondere für lineare algebraische Gruppen. Wir definieren folgende Eigenschaft: (*siehe:* [Pr, Chapter 7, 3.6, Definition 1]):

Definition 7.15. *Eine lineare algebraische Gruppe heißt* reduktiv*, falls es keinen abgeschlossenen unipotenten Normalteiler enthält. Dabei heißt ein Normalteiler $N \subseteq \mathrm{GL}(V)$ unipotent, wenn für alle $x \in N$ gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(x-1)^n = 0$.*

Analog wie für Lie-Gruppen heißt eine lineare algebraische Gruppe halbeinfach, wenn sie keinen zusammenhängenden auflösbaren Normalteiler enthält. Nach Definition sind halbeinfache lineare algebraische Gruppen bereits reduktiv. Für halbeinfache Lie Algebren haben wir folgenden Satz (*siehe:* [Pr, Chapter 10, 1.5, Theorem 3]):

Satz 7.16. *Zu einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ existiert eine algebraische Gruppe G mit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.*

Der Begriff der algebraischen Gruppe ist allgemeiner definiert als der Begriff der linearen algebraischen Gruppe, allerdings lässt sich jede algebraische Gruppe als eine lineare algebraische Gruppe in einem $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ einbetten.

Mit dem folgenden Resultat können wir nun zeigen, dass endlich-dimensionale Darstellungen von halbeinfachen Lie-Algebren vollständig reduzibel sind (*siehe:* [Pr, 8, 7.2, Korollar]):

Satz 7.17. *Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zu einer reduktiven linearen algebraischen Gruppe G ist die Komplexifizierung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}_0$ zu einer kompakten Lie-Gruppe K. Dabei bedeutet Komplexifizierung, dass $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ gilt.*

Insbesondere können wir diesen Satz auf halbeinfache Lie-Algebren anwenden, da diese nach Proposition 7.13 zu halbeinfachen Lie Gruppen, nach Satz 7.16 zu algebraischen Gruppen und somit zu halbeinfachen, das heißt insbesondere zu reduktiven, linearen algebraischen Gruppen korrespondieren.

Hat man nun eine Darstellung $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so kann man diese Einschränken zu einer Darstellung $\varphi' : \mathfrak{g}_0 \to \mathrm{gl}(V')$ von $\mathfrak{g}_0$. Nach Satz 7.11 erhält man die korrespondierende Lie-Gruppen-Darstellung $\phi : K \to \mathrm{GL}(V')$, die nach Satz 7.3 vollständig reduzibel ist, da K kompakt ist. Das kann aber nur der Fall sein, wenn $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ bereits vollständig reduzibel war. Wir haben damit einen alternativen Beweis für den Satz von Weyl (Satz 4.4) geliefert.

8 Literaturverzeichnis

[Bo] Bourbaki, N.: *Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 1-3.* Springer, 1989

[El] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, 2009

[Hu] Humphreys, J. E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer, 1994

[Jä] Jänich, K.: *Topologie.* Springer, 2008

[Pr] Procesi, C.: *Lie Groups: An Approach through Invariants and Representations.* Springer, 2006

[SS1] Scheja, G. und Storch, U.: *Lehrbuch der Algebra, Teil 1: Unter Einschluß der linearen Algebra.* Teubner Verlag, 1994

[SS2] Scheja, G. und Storch, U.: *Lehrbuch der Algebra, Teil 2: Unter Einschluß der linearen Algebra.* Teubner Verlag, 1988

[Vi] Vinberg, E. B.: *A Course in Algebra.* American Mathematical Society, 2003

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit mit dem Titel

"Vollständige Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren"

selbstständig verfasst, keine anderen als die angegeben Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Bochum, den 4. Januar 2011.

Unterschrift